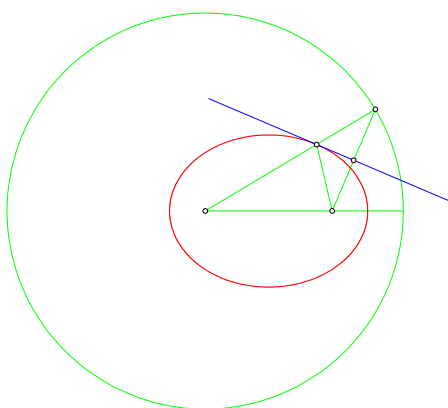


# 蛭子井博孝自作幾何数学：選集

はじめに、楕円ありき

at 17 year old, This figure determined my Destiny



そして、卵形線、。。。。、幾何数学50年  
ここに、その間の作品選集を、  
我が愛する人々に捧げる

卵形線研究センター

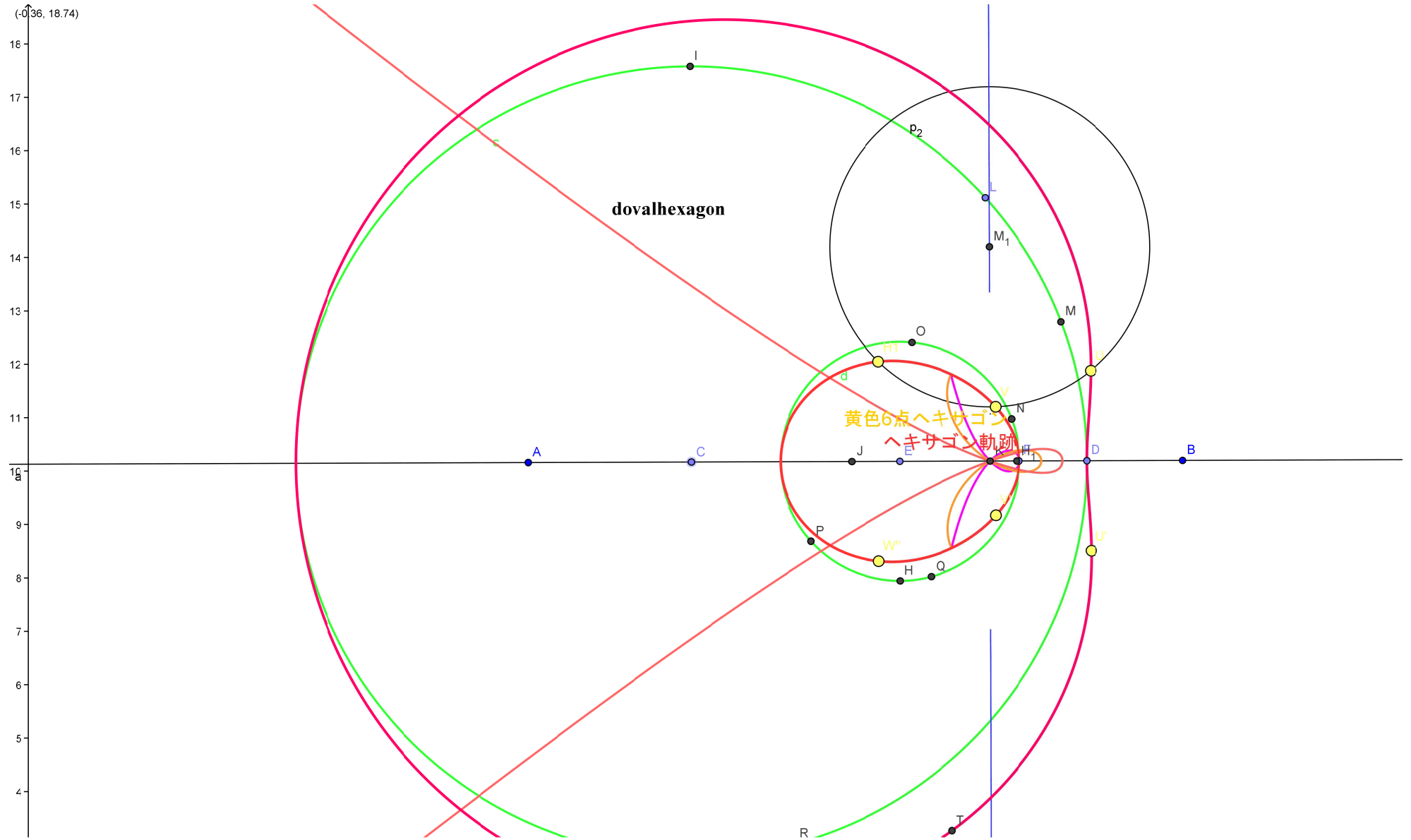
<http://eh85.blogzine.jp/>

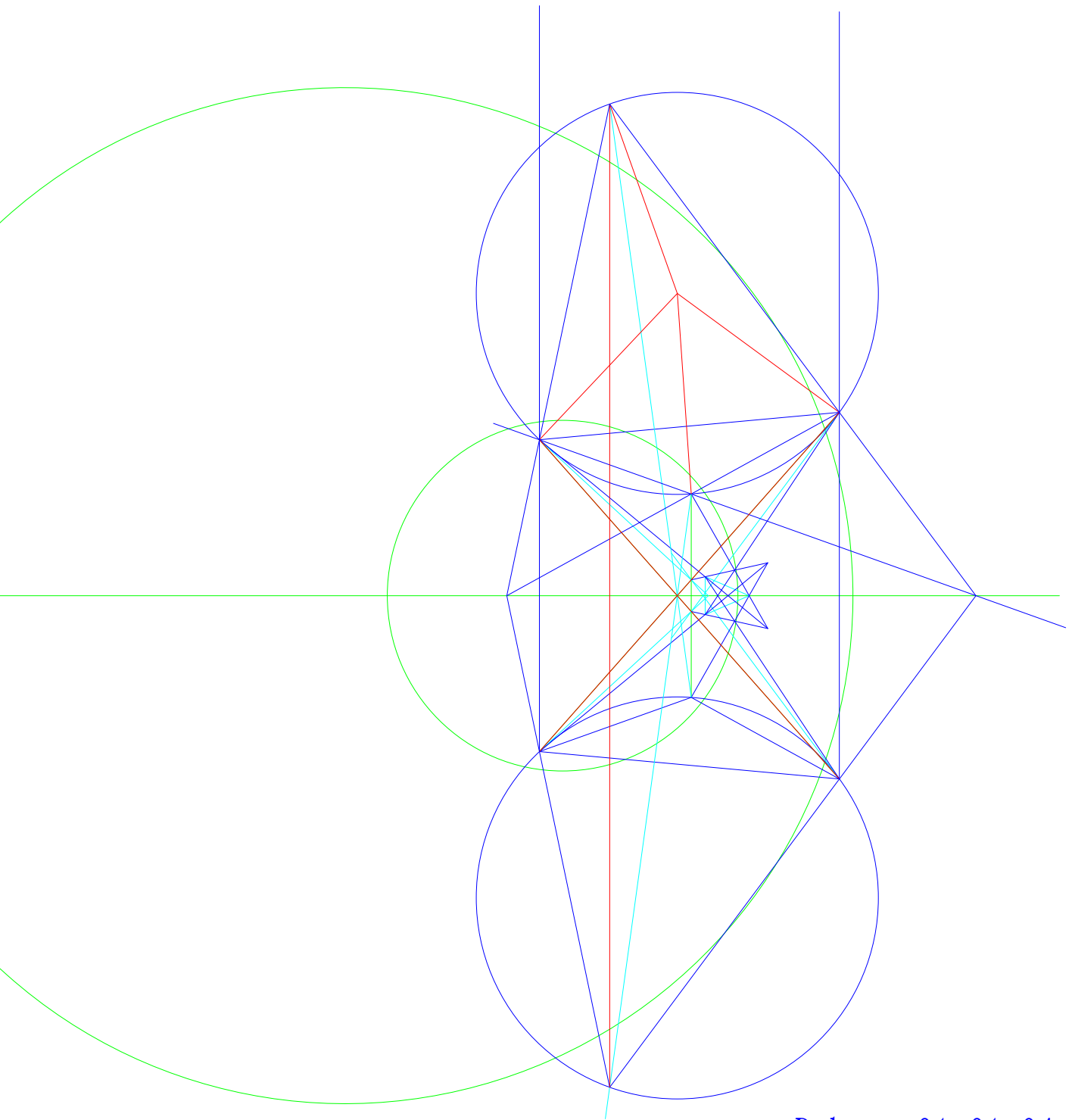
<http://hoval.blogzine.jp/>



# Doval Hexagon

蛭子井博孝 - 2014/01/01



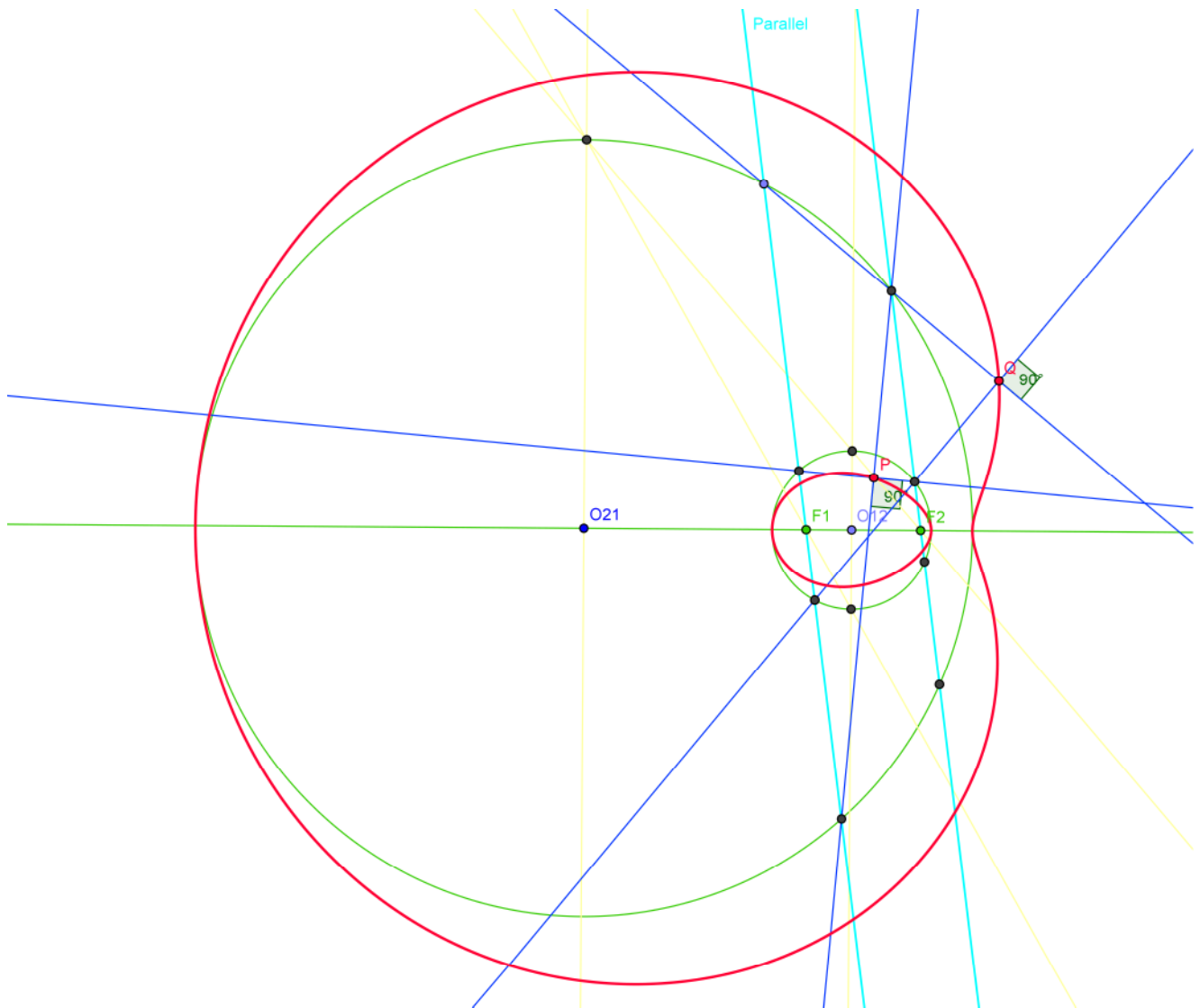


Dohex 01-01-04

Dohex 01-01-03

# Doval (Inner Outer Parts)

蛭子井博孝 岩国市元町4丁目12-10 - 縮尺 (cm単位) : 1:1





> # HI-NUM Continuous 5 Primes Theorem  $\{(p1 + p2^2 + p3 + p4 + p5 = (p2 + 2)^2)\}$  etc. by H  
 .E 2014 - 1 - 21 rv:

> c := 0 : for h from 1 to 20000 do p1 := ithprime(h) : p2 := ithprime(h + 1) : p3  
 := ithprime(h + 2) : p4 := ithprime(h + 3) : p5 := ithprime(h + 4) :

if floor  $\left( \text{evalf} \left( (p1 + p2 + p3^2 + p4 + p5)^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2 = p1 + p2 + p3^2 + p4 + p5$  then c := c  
 + 1 : if (c mod 10 = 1) and c < 11 then print ( ) :

print ( 連続5素数中中央数2乗和 Theorem, "[p1 + p2 + p3^2 + p4 + p5 = (p3 + 2)^2]" ) :  
 print ( ) : print ( 卵形線研究センター 蛭子井博孝 ) :

print ( ebisuihirotaka@io.ocn.ne.jp ) :

print ( 表題の式の構造を連続5素数が持つ5素数の組のリスト表 ) fi : if c < 11

then print  $\left( p1[n[1]] + p2[n[2]] + [p3[n[3]]]^2 + p4[n[4]] + p5[n[5]] \right.$   
 $= \left[ \text{simplify} \left( (p1 + p2 + p3^2 + p4 + p5)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \left[ [p3[n[3], (h + 1) \text{th } p] + 2] \right]^2 \right)$  :  
 print ( ) fi fi : od:

連続5素数中中央数2乗和 Theorem, "[p1+p2+p3^(2)+p4+p5=(p3+2)^(2)]"

卵形線研究センター 蛭子井博孝

(ebisuihirotaka@io).ocn.ne.jp

表題の式の構造を連続5素数が持つ5素数の組のリスト表

$$3_{n_1} + 5_{n_2} + [7_{n_3}]^2 + 11_{n_4} + 13_{n_5} = [9]_{[7_{n_3}, 3 \text{th } p + 2]}^2$$

$$17_{n_1} + 19_{n_2} + [23_{n_3}]^2 + 29_{n_4} + 31_{n_5} = [25]_{[23_{n_3}, 8 \text{th } p + 2]}^2$$

$$79_{n_1} + 83_{n_2} + [89_{n_3}]^2 + 97_{n_4} + 101_{n_5} = [91]_{[89_{n_3}, 23 \text{th } p + 2]}^2$$

$$139_{n_1} + 149_{n_2} + [151_{n_3}]^2 + 157_{n_4} + 163_{n_5} = [153]_{[151_{n_3}, 35 \text{th } p + 2]}^2$$

$$157_{n_1} + 163_{n_2} + [167_{n_3}]^2 + 173_{n_4} + 179_{n_5} = [169]_{[167_{n_3}, 38 \text{th } p + 2]}^2$$

$$227_{n_1} + 229_{n_2} + [233_{n_3}]^2 + 239_{n_4} + 241_{n_5} = [235]_{[233_{n_3}, 50 \text{th } p + 2]}^2$$

$$379_{n_1} + 383_{n_2} + [389_{n_3}]^2 + 397_{n_4} + 401_{n_5} = [391]_{[389_{n_3}, 76 \text{th } p + 2]}^2$$

$$439_{n_1} + 443_{n_2} + [449_{n_3}]^2 + 457_{n_4} + 461_{n_5} = [451]_{\left[ \begin{smallmatrix} 449 \\ n_3, 86 \text{ th } p \end{smallmatrix} \right] + 2}^2$$

$$479_{n_1} + 487_{n_2} + [491_{n_3}]^2 + 499_{n_4} + 503_{n_5} = [493]_{\left[ \begin{smallmatrix} 491 \\ n_3, 93 \text{ th } p \end{smallmatrix} \right] + 2}^2$$

$$821_{n_1} + 823_{n_2} + [827_{n_3}]^2 + 829_{n_4} + 839_{n_5} = [829]_{\left[ \begin{smallmatrix} 827 \\ n_3, 143 \text{ th } p \end{smallmatrix} \right] + 2}^2$$

(1)

>

```
> c := 0 : er := 0 : for h from 1 to 1000005 do p1 := ithprime(h) : p2 := ithprime(h + 1) : p3
:= ithprime(h + 2) : p4 := ithprime(h + 3) : p5 := ithprime(h + 4) : p5s := p1 + p2
+ p3^2 + p4 + p5 : if floor( evalf( (p5s^(1/2)) ) ) = p5s then c := c + 1 : if p3 + 2
≠ simplify( p5s^(1/2) ) then er := er + 1 fi : if c mod 1000 = 1 or er > 0 then print(c, ER
= er, p3, (h + 2) thprime) : print(連続5素数中中央数2乗和 Theorem, "[p1 + p2 + p3^2
+ p4 + p5 = (p3 + 2)^2]") : print( ) :
print( 卵形線研究センター 蛭子井博孝 ) : print( ebisuihirotaka
@io.ocn.ne.jp ) :
print( 表題の式の構造を連続5素数が持つ5素数の組のカウント表) fi fi : od :
print( c / 1000005 ) :
```

1, ER = 0, 7, 4 thprime

連続5素数中中央数2乗和 Theorem, "[p1+p2+p3^(2)+p4+p5=(p3+2)^(2)]"

卵形線研究センター 蛭子井博孝

(ebisuihirotaka@io).ocn.ne.jp

表題の式の構造を連続5素数が持つ5素数の組のカウント表

1001, ER = 0, 345017, 29583 thprime

連続5素数中中央数2乗和 Theorem, "[p1+p2+p3^(2)+p4+p5=(p3+2)^(2)]"

卵形線研究センター 蛭子井博孝

(ebisuihirotaka@io).ocn.ne.jp

表題の式の構造を連続5素数が持つ5素数の組のカウント表

2001, ER = 0, 827369, 65977 thprime

連続5素数中中央数2乗和 Theorem, "[p1+p2+p3^(2)+p4+p5=(p3+2)^(2)]"

卵形線研究センター 蛭子井博孝

(ebisuihirotaka@io).ocn.ne.jp

表題の式の構造を連続5素数が持つ5素数の組のカウント表

3001, ER = 0, 1309073, 100661 thprime

連続5素数中中央数2乗和 Theorem, "[p1+p2+p3^(2)+p4+p5=(p3+2)^(2)]"

卵形線研究センター 蛭子井博孝

(ebisuihirotaka@io).ocn.ne.jp

表題の式の構造を連続5素数が持つ5素数の組のカウント表  
 22001, ER = 0, 13819919, 899153 *thprime*  
 連続5素数中中央数2乗和 Theorem, "[p1+p2+p3^(2)+p4+p5=(p3+2)^(2)]"

卵形線研究センター 蛭子井博孝  
 (ebisuihirotaka@io).ocn.ne.jp

表題の式の構造を連続5素数が持つ5素数の組のカウント表  
 23001, ER = 0, 14486621, 939671 *thprime*  
 連続5素数中中央数2乗和 Theorem, "[p1+p2+p3^(2)+p4+p5=(p3+2)^(2)]"

卵形線研究センター 蛭子井博孝  
 (ebisuihirotaka@io).ocn.ne.jp

表題の式の構造を連続5素数が持つ5素数の組のカウント表  
 24001, ER = 0, 15232193, 984724 *thprime*  
 連続5素数中中央数2乗和 Theorem, "[p1+p2+p3^(2)+p4+p5=(p3+2)^(2)]"

卵形線研究センター 蛭子井博孝  
 (ebisuihirotaka@io).ocn.ne.jp

表題の式の構造を連続5素数が持つ5素数の組のカウント表

$$\frac{24367}{1000005}$$

(2)

```
> c := 0 : for h from 1 to 20000 do p1 := ithprime(h) : p2 := ithprime(h + 1) : p3
:= ithprime(h + 2) : p4 := ithprime(h + 3) : p5 := ithprime(h + 4) :
if floor( evalf( (p1 + p2^2 + p3 + p4 + p5)^(1/2) ) )^2 = p1 + p2^2 + p3 + p4 + p5 then c := c
+ 1 : if (c mod 10 = 1) and c < 11 then print( ) :
print( 連続5素数中第2数2乗和 Theorem, "[p1 + p2^2 + p3 + p4 + p5 = (p2 + 2)^2]" ) :
print( ) : print( 卵形線研究センター 蛭子井博孝 ) :
print( geomathe85@ace.ocn.ne.jp ) :
print( 表題の式の構造を連続5素数が持つ5素数の組のリスト表 ) fi : if c < 11
then print( p1[n[1]] + [p2[n[2]]]^2 + p3[n[3]] + p4[n[4]] + p5[n[5]]
= [simplify( (p1 + p2^2 + p3 + p4 + p5)^(1/2) )][[p2[n[2], (h + 1) th p] + 2]^2 ] :
print( ) fi fi : od:
```

連続5素数中第2数2乗和 Theorem, "[p1+p2^(2)+p3+p4+p5=(p2+2)^(2)]"

卵形線研究センター 蛭子井博孝  
 (geomathe85@ace).ocn.ne.jp

表題の式の構造を連続5素数が持つ5素数の組のリスト表

$$1327_{n_1} + [1361_{n_2}]^2 + 1367_{n_3} + 1373_{n_4} + 1381_{n_5} = [1363]_{[1361_{n_2}, 218th p + 2]}^2$$

$$2069_{n_1} + [2081_{n_2}]^2 + 2083_{n_3} + 2087_{n_4} + 2089_{n_5} = [2083]_{[2081_{n_2}, 313th p + 2]}^2$$

$$4111_{n_1} + [4127_{n_2}]^2 + 4129_{n_3} + 4133_{n_4} + 4139_{n_5} = [4129]_{\left[4127_{n_2}, 567th p + 2\right]}^2$$

$$4621_{n_1} + [4637_{n_2}]^2 + 4639_{n_3} + 4643_{n_4} + 4649_{n_5} = [4639]_{\left[4637_{n_2}, 625th p + 2\right]}^2$$

$$4703_{n_1} + [4721_{n_2}]^2 + 4723_{n_3} + 4729_{n_4} + 4733_{n_5} = [4723]_{\left[4721_{n_2}, 636th p + 2\right]}^2$$

$$5449_{n_1} + [5471_{n_2}]^2 + 5477_{n_3} + 5479_{n_4} + 5483_{n_5} = [5473]_{\left[5471_{n_2}, 722th p + 2\right]}^2$$

$$8893_{n_1} + [8923_{n_2}]^2 + 8929_{n_3} + 8933_{n_4} + 8941_{n_5} = [8925]_{\left[8923_{n_2}, 1109th p + 2\right]}^2$$

$$13729_{n_1} + [13751_{n_2}]^2 + 13757_{n_3} + 13759_{n_4} + 13763_{n_5} = [13753]_{\left[13751_{n_2}, 1626th p + 2\right]}^2$$

$$15629_{n_1} + [15641_{n_2}]^2 + 15643_{n_3} + 15647_{n_4} + 15649_{n_5} = [15643]_{\left[15641_{n_2}, 1823th p + 2\right]}^2$$

$$16673_{n_1} + [16691_{n_2}]^2 + 16693_{n_3} + 16699_{n_4} + 16703_{n_5} = [16693]_{\left[16691_{n_2}, 1930th p + 2\right]}^2$$

(3)

```

> c := 0 : for h from 1 to 20000 do p1 := ithprime(h) : p2 := ithprime(h + 1) : p3
:= ithprime(h + 2) : p4 := ithprime(h + 3) : p5 := ithprime(h + 4) : p6 := ithprime(h
+ 5) : p7 := ithprime(h + 6) : p8 := ithprime(h + 7) : p9 := ithprime(h + 8) :
if floor( evalf( ( (p1 + p2 + p3 + p4 + p5^2 + p6 + p7 + p8 + p9)^(1/2) )^2 ) ) = p1 + p2 + p3
+ p4 + p5^2 + p6 + p7 + p8 + p9 then c := c + 1 : if (c mod 10 = 1) and c < 11
then print( ) : print( 連続9素数中中央数2乗和 Theorem, "[p1 + p2 + p3 + p4 + p5^2
+ p6 + p7 + p8 + p9 = (p5 + 4)^2]" ) : print( ) :
print( 卵形線研究センター 蛭子井博孝 ) : print( geomathe85
@ace.ocn.ne.jp ) :
print( 表題の式の構造を連続9素数が持つ9素数の組のリスト表 ) fi : if c < 11
then print( p1[n[1]] + p2[n[2]] + p3[n[3]] + p4[n[4]] + [p5[n[5]]]^2 + p6[n[6]]
+ p7[n[7]] + p8[n[8]] + p9[n[9]] = [ simplify( (p1 + p2 + p3 + p4 + p5^2 + p6
+ p7 + p8 + p9)^(1/2) ) ] [ [p5[n[5], (h + 4)th p] + 4]^2 ] ) : print( ) fi fi : od:

```

連続9素数中中央数2乗和 Theorem,

$$"[p_1+p_2+p_3+p_4+p_5^2+p_6+p_7+p_8+p_9=(p_5+4)^2]"$$

卵形線研究センター 蛭子井博孝

(geomathe85@ace).ocn.ne.jp

表題の式の構造を連続9素数が持つ9素数の組のリスト表

$$7_{n_1} + 11_{n_2} + 13_{n_3} + 17_{n_4} + [19_{n_5}]^2 + 23_{n_6} + 29_{n_7} + 31_{n_8} + 37_{n_9} = [23]_{[19_{n_5}, 8th p + 4]}^2$$

$$31_{n_1} + 37_{n_2} + 41_{n_3} + 43_{n_4} + [47_{n_5}]^2 + 53_{n_6} + 59_{n_7} + 61_{n_8} + 67_{n_9} = [51]_{[47_{n_5}, 15th p + 4]}^2$$

$$67_{n_1} + 71_{n_2} + 73_{n_3} + 79_{n_4} + [83_{n_5}]^2 + 89_{n_6} + 97_{n_7} + 101_{n_8} + 103_{n_9} = [87]_{[83_{n_5}, 23th p + 4]}^2$$

$$113_{n_1} + 127_{n_2} + 131_{n_3} + 137_{n_4} + [139_{n_5}]^2 + 149_{n_6} + 151_{n_7} + 157_{n_8} + 163_{n_9} = [143]_{[139_{n_5}, 34th p + 4]}^2$$

$$271_{n_1} + 277_{n_2} + 281_{n_3} + 283_{n_4} + [293_{n_5}]^2 + 307_{n_6} + 311_{n_7} + 313_{n_8} + 317_{n_9} = [297]_{[293_{n_5}, 62th p + 4]}^2$$

$$337_{n_1} + 347_{n_2} + 349_{n_3} + 353_{n_4} + [359_{n_5}]^2 + 367_{n_6} + 373_{n_7} + 379_{n_8} + 383_{n_9} = [363]_{[359_{n_5}, 72th p + 4]}^2$$

$$367_{n_1} + 373_{n_2} + 379_{n_3} + 383_{n_4} + [389_{n_5}]^2 + 397_{n_6} + 401_{n_7} + 409_{n_8} + 419_{n_9} = [393]_{[389_{n_5}, 77th p + 4]}^2$$

$$1019_{n_1} + 1021_{n_2} + 1031_{n_3} + 1033_{n_4} + [1039_{n_5}]^2 + 1049_{n_6} + 1051_{n_7} + 1061_{n_8} + 1063_{n_9} = [1043]_{[1039_{n_5}, 175th p + 4]}^2$$

$$1069_{n_1} + 1087_{n_2} + 1091_{n_3} + 1093_{n_4} + [1097_{n_5}]^2 + 1103_{n_6} + 1109_{n_7} + 1117_{n_8} + 1123_{n_9} = [1101]_{[1097_{n_5}, 184th p + 4]}^2$$

$$1697_{n_1} + 1699_{n_2} + 1709_{n_3} + 1721_{n_4} + [1723_{n_5}]^2 + 1733_{n_6} + 1741_{n_7} + 1747_{n_8} + 1753_{n_9} =$$

$$[1727]_{[1723_{n_5}, 269thp + 4]}^2$$

**(4)**

>  
>  
>

# デカルトの卵形線の二・三の性質\*

蛭子井 博 孝\*\*

楕円などの円錐曲線は、その定義あるいは作図に対して、焦点・準円・補助円・準線などが通常使われている。ところが、デカルトの卵形線は、楕円あるいは双曲線が一般化された曲線であることが知られている。そこで、デカルトの卵形線においても同様な性質が存在するのではないかと予想し、それに対して若干の考察を行なってみた。また、デカルトの卵形線は、回転軸の平行な二つの円錐面の交線を、回転軸に垂直な平面へ正射影したものであることが知られている<sup>1)</sup>が、それに対しても若干の考察を行なってみた。

## 1. 楕円の準円、補助円

楕円は、二定点からの距離の和が一定な点の軌跡として定義できる。すなわち、図1において、二定点を  $S_1$ 、 $S_2$ 、楕円上の一点を  $P$  とすると  $S_1P + S_2P = K$  (定数) を満足する。ここで、 $S_1$ 、 $S_2$  を焦点という。

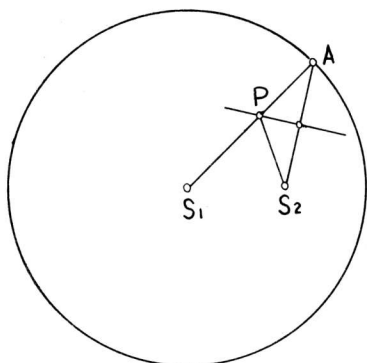


図1

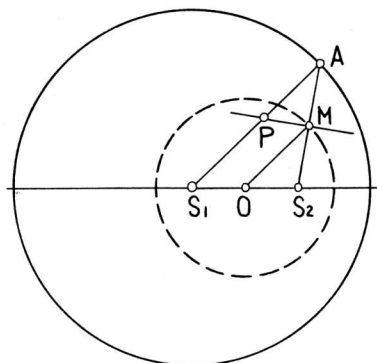


図2

今、線分  $S_1P$  を  $P$  を越えて延長し  $PA = PS_2$  となるように点  $A$  をとると、 $S_1P + PA = K$  となり、 $P$  が楕円上を動くとき、 $A$  は、円  $(S_1; K)$  上を動く。この円  $S_1$  は、準円<sup>2)</sup>と呼ばれる。逆に、この  $S_1A$  を半径とする円  $S_1$  が与えられ、この円内に、中心と異なる任意の一定点  $S_2$  をとり、線分  $S_2A$  の垂直二等分線と  $S_1A$  との交点として、 $P$  を求めれば、明らかに  $P$  は、楕円上にある。

ここで、図2におけるように、 $S_2A$  の中点  $M$  を通り、 $S_1A$  に平行な直線を引き、直線  $S_1S_2$  との交点を  $O$  とすれば、中点連結定理より、 $S_1O = OS_2$ 、また、 $OM = \frac{1}{2} S_1A$  となり、 $O$  は定点、 $OM$  は一定である。ゆえに、 $A$  が円周上を動くとき、 $S_2A$  の中点  $M$  は、円  $(O; OM)$  上を動く。この円  $O$  は、 $S_1S_2$  の中点を中心とし、 $\frac{1}{2} S_1A$  (長軸の長さの半分の長さ) の半径を持つ楕円の長軸の補助円であることがわかる。また、双曲線に対しても同様な性質の存在がよく知られている<sup>3)</sup>

\* 昭和47年7月27日受付

\*\* 大阪大学



## 2. デカルトの卵形線の準円, 補助円

デカルトの卵形線は, 次のように楕円の拡張であることがわかる。

### 2-1 卵形線の定義

デカルトの卵形線は, 双極座標を使って次のように定義される<sup>3)</sup>

$$m r_1 \pm n r_2 = K \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで,  $r_1, r_2$  は, 二定点 (極)  $S_1, S_2$  から卵形線上の一点  $P$  までの距離を表わしている。±の符号は卵形線が二分枝に分かれることを示す。また, 極が前述の円錐曲線の焦点に相等する。以下の説明に便利なように (1) 式を次のように書きかえる。

$$m r_1 \pm n r_2 = k c \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで,  $c$  は焦点間距離  $S_1 S_2$  を表わす。

$S_1, S_2$  に差はないから  $m > n$  としても一般性は失われない。だから, 符号を省いて,  $m, n, k$  を正数としたとき, 次の三つの場合が考えられる。

$$k > m > n > 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$m > k > n > 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$m > n > k > 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

2-2節, 2-3節においては,  $m r_1 - n r_2 = k c$  の場合を考えていない。また, 作図は, 主に (3) の場合であるが, 作図法は (3), (4), (5) の分類に関係しない。この分類の意味および等号の成立する場合も5節で明らかになろう。また, (3) の条件がある場合, +の符号をもつ卵形線を内分枝, -の符号をもつ卵形線を外分枝と呼ぶことにする。

### 2-2 卵形線の準円

図1において  $S_2 P$  をも延長し, 同様なことを行えば, 図3で明らかなように, 円 ( $S_1; K$ ), 円 ( $S_2; K$ ) はともに準円である。また明らかに  $S_1 B \parallel S_2 A$  である。これは, 逆に, 半径  $K$  の等しい円  $S_1, S_2$  がはじめに与えられ, 点  $S_1, S_2$  を通り, 互いに平行な直線  $l_1, l_2$  が円  $S_2, S_1$  とそれぞれ交わる点を  $B, A$  としたとき,  $S_1 A$  と  $S_2 B$  の交点が楕円上の点  $P$  となっていると見なすことができる。

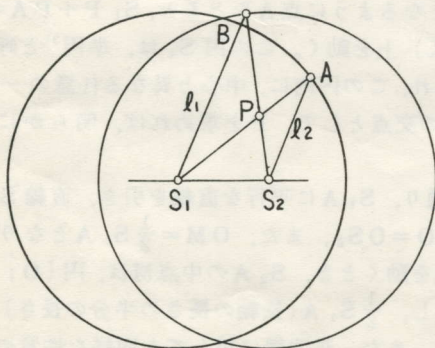


図3

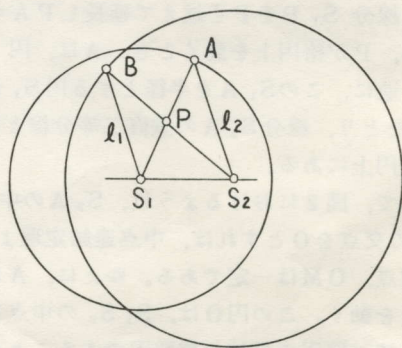


図4

今, 点  $S_1, S_2$  をそれぞれ中心とし, 異なる半径をもつ円 (この円を楕円の準円にならって卵形線の準円と呼ぶことにする) をはじめに与え, 点  $S_1, S_2$  を通り互いに平行な直線  $l_1, l_2$  が円 ( $S_2; \frac{k}{n} c$ ), 円 ( $S_1; \frac{k}{m} c$ ) とそれぞれ交わる点を  $B, A$  とし,  $S_1 A, S_2 B$  の交点が,  $A$  あるいは  $B$  がそれぞれの円周上を動くときに描く軌跡を考える。



図4において、 $S_1 A = \frac{k}{m} c$ 、 $S_2 B = \frac{k}{n} c$ とおく。すると、 $S_1 A : S_2 B = n : m$ となる。そして、 $\triangle S_1 P B$ の $\triangle S_2 P A$ より

$$\frac{PS_1}{PB} = \frac{PA}{PS_2} = \frac{PS_1 + PA}{PB + PS_2} = \frac{S_1 A}{S_2 B} = \frac{n}{m} \dots\dots\dots (6)$$

ゆえに、 $PA = \frac{n}{m} PS_2$ 、また、 $S_1 P + PA = S_1 A = \frac{k}{m} c$ 、これより、 $PS_1 + \frac{n}{m} PS_2 = \frac{k}{m} c$ を得る。ここで、 $S_1 P = r_1$ 、 $S_2 P = r_2$ とすれば、点Pは(2)式を満す。したがって、点Pはデカルトの卵形線上の点であることがわかる。

逆に、デカルトの卵形線  $mr_1 + nr_2 = kc$  が与えられると、それぞれ、中心を  $S_1$ 、 $S_2$ 、半径を  $\frac{k}{m} c$ 、 $\frac{k}{n} c$  とする準円が成立する。外分枝においても同様。

### 2-3 卵形線の補助円

次に、楕円の図2の場合がデカルトの卵形線ではどのようなになるかを考える。楕円では、Mが中点であるから、図5ではMが  $S_2 A$  を  $m : n$  に内分する点としてみる。まず、点Mを通り  $S_1 A$  に平行な直線と  $S_1 S_2$  の交点をOとすれば、 $S_1 O : OS_2 = n : m$  であり、点Oは定点となる。そして、 $S_1 A = \frac{k}{m} c$  とすれば、 $OM = \frac{k}{m} c \times \frac{m}{m+n} = \frac{k}{m+n} c$  となり、Aが円周上を動くとき、点Mは定円  $(O; \frac{k}{m+n} c)$  (楕円にならって補助円と呼ぶことにする) 上にある。そのとき、 $P$  を  $PS_2 : PA = m : n$  を満たすように  $S_1 A$  上に取れば、楕円の拡張となる。この点を具体的に作図するには、Mより  $S_1 A$  に垂線を下しその足をHとする。次にMを中心とし、半径MHの円を描く。この円に、 $S_2$  から接線を引き、 $S_1 A$  との交点をPとすればよい。なぜなら、 $\angle APM = \angle MPS_2$  となり、 $PS_2 : PA = m : n$  となるから。以上のことから、デカルトの卵形線  $mr_1 + nr_2 = kc$  が与えられると、 $S_1 S_2$  を  $n : m$  に内分する点Oを中心とし、 $\frac{k}{m+n} c$  を半径とする補助円が成立する。外分枝に対しては、 $S_1 S_2$  を  $n : m$  に外分する点を中心とし、 $\frac{k}{m-n} c$  を半径とする補助円が同様に成立する。

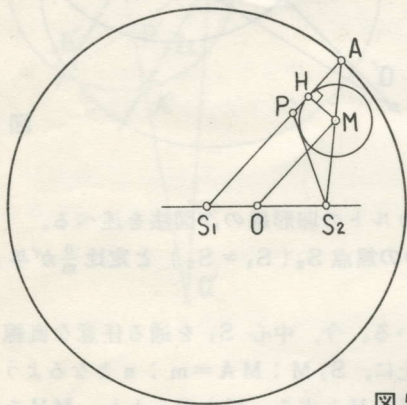


図5

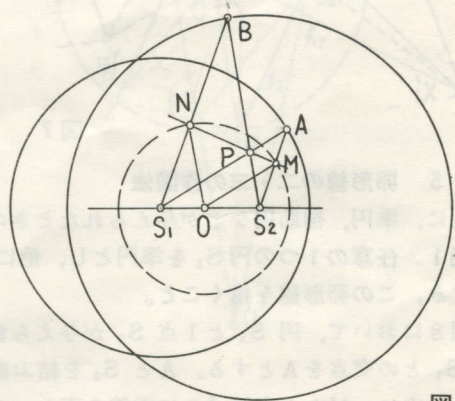


図6

また、図6のように $\angle APS_2$ の二等分線と  $S_1 B$ 、 $S_2 A$  の交点をN、Mとする。この点N、Mは  $S_1 B$  を  $n : m$  に、 $S_2 A$  を  $m : n$  にそれぞれ内分する点であるから、これらの点は、 $S_1 S_2$  を  $n : m$  に内分する点Oを中心とし、 $\frac{k}{m+n} c$  を半径とする円周上にあることが明らかである。逆に、図6において、円Oの中心線上に二点  $S_1$ 、 $S_2$  があり、それらの点を通る互いに平行な直線  $l_1$ 、 $l_2$  が円Oとそれぞれ交わる点をN、Mとし、NM上に  $\angle NPS_1 = \angle MPS_2$  となるように点Pをとってもよい。

### 2-4 準円と補助円の関係

図7において、まず円  $S_1$ 、円  $S_2$  が与えられているとする。その半径を  $\frac{k}{m} c$ 、 $\frac{k}{n} c$  とする。

点  $S_1, S_2$  を通る互いに平行な直線  $h_1, h_2$  が円  $S_1, S_2$  と交わる点をそれぞれ  $X_1, X_2$  とする。(図において、 $X'_1, X'_2$  のように ' のついている点は、 $X_1, X_2$  のように ' のついていない同じ記号の点と同様な性質を持った点である。以下の図においても同様である。)  $X_1 X'_2$  と  $X'_1 X_2$  の交点  $O_{12}$  および  $X_1 X_2$  と  $X'_1 X'_2$  の交点  $O_{21}$  は明らかに直線  $S_1 S_2$  上にあり、補助円の中心である。なぜなら、 $S_1 O_{12} : O_{12} S_2 = \frac{k}{m} c : \frac{k}{n} c = n : m$  で  $O_{12}, O_{21}$  が  $S_1 S_2$  をそれぞれ  $n : m$  に内分、外分する点であるから。

次に  $S_1 X_2$  と  $X_1 S_2$  の交点を  $Y_{12}$  とし、 $Y_{12}$  と  $O_{12}$  を結ぶと、その線分の長さが補助円  $O_{12}$  の半径となる。なぜなら、 $S_1 Y_{12} : Y_{12} X_2 = \frac{k}{m} c : \frac{k}{n} c = n : m$  で  $Y_{12} O_{12} \parallel S_1 X_1$ 、ゆえに、 $Y_{12} O_{12} = S_1 X_1 \times \frac{m}{m+n} = \frac{k}{m+n} c$

同様にして、 $X_1 S_2$  と  $S_1 X'_2$  の交点  $Y_{21}$  とすると、 $O_{21} Y_{21} = \frac{k}{m-n} c$  となり、外分点の補助円の半径となる。以上のようにして、一組の準円から一組の補助円  $O_{12}, O_{21}$  が求められたが、逆に、任意の二円を一組の補助円として与えるとき、それに対する準円が求められる。これは、図7において点線  $Y'_{21} Y_{12}, Y_{21} Y_{12}$  を引き、点  $S_1, S_2$  を求め、この点を通り  $O_{12} Y_{12}$  に平行な直線と点線  $Y'_{21} Y'_{12}, Y'_{21} Y_{12}$  の交点  $X'_1, X_2$  を求めればよい。

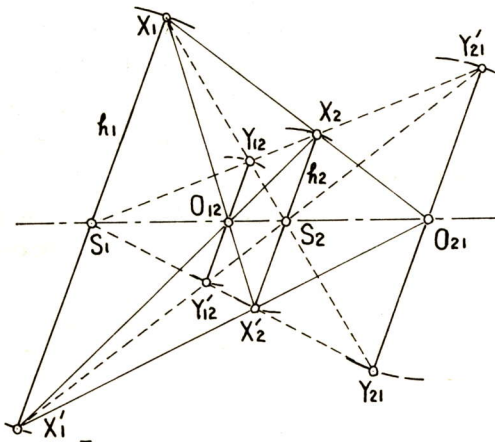


図7

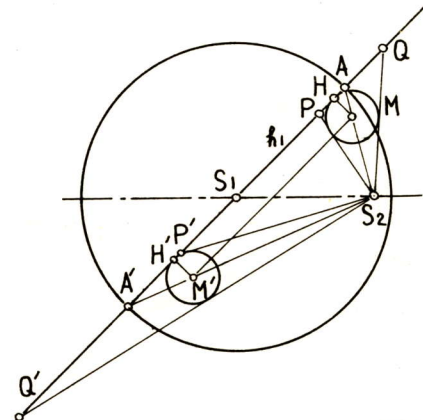


図8

## 2-5 卵形線の二・三の作図法

次に、準円、補助円などが与えられたときのデカルトの卵形線の作図法を述べる。

**作図1.** 任意の1つの円  $S_1$  を準円とし、他に1つの焦点  $S_2$  ( $S_1 \neq S_2$ ) と定比  $\frac{n}{m}$  が与えられたとき、この卵形線を描くこと。

図8において、円  $S_1$  と1点  $S_2$  が与えられている。今、中心  $S_1$  を通る任意な直線  $h_1$  と円  $S_1$  との交点を  $A$  とする。 $A$  と  $S_2$  を結ぶ直線上に、 $S_2 M : MA = m : n$  となるように  $M$  をとる。次に、 $M$  から直線  $h_1$  に垂線を下し、その足を  $H$  とする。 $M$  を中心とし、 $MH$  を半径とする円を描き、 $S_2$  を通り、その円に接する直線との交点を  $P$  とする。 $S_1$  を中心に  $h_1$  を1回転させるとき、 $P, Q$  は、(2) 式を満たす卵形線を描く。ここで、 $P, Q$  は同じ性質をもつが、 $P$  は内分枝を、 $Q$  は外分枝を満たすものを表わす。以下の図においても同様である。

**作図2.** 任意の2つの円を準円として与えられたとき、この卵形線を描くこと。

図9において、円  $S_1$  と円  $S_2$  が与えられている。まず、 $S_1, S_2$  を通り、互いに平行な直線  $l_1, l_2$  を引く。 $l_1$  が円  $S_2$  と交わる点を  $B$ 、 $l_2$  が円  $S_1$  と交わる点を  $A$  とする。このとき、直線  $S_1 A$  と  $S_2 B$  の交点  $P, Q$  は、 $A$  あるいは  $B$  が、円  $S_2$  上あるいは円  $S_1$  上をそれぞれ動くとき、(2) 式を満たす卵形線を描く。



作図3. 任意の1つの円Oを補助円とし, 他に2つの焦点  $S_1, S_2$  ( $S_1 \neq S_2$ ) がOと共線であるように与えられたとき, この卵形線を描くこと。

図10において, 円Oと, その中心線上に任意に二点  $S_1, S_2$  が与えられている。まず,  $S_1, S_2$  を通り, 互いに平行な直線を  $l_1, l_2$  とする。 $l_1, l_2$  が円Oと交わる点をそれぞれN, Mとする。次に, ONに平行に  $S_2$  を通る直線  $h_2$  を引く。同様にOMに平行に  $S_1$  を通る直線  $h_1$  を引く。すると,  $h_1, h_2$  の交点P, Qは, NあるいはMが円O上を動くとき, (2)式を満たす卵形線を描く。ここで, N, P, MあるいはN, Q, Mが共線であることは, パップスの定理より明らか。

作図4. 任意の2つの円  $O_1, O_2$  が補助円として与えられたとき, この卵形線を描くこと。

図11において, 円  $O_1, O_2$  ( $O_1 \neq O_2$ ) が与えられている。前節の準円と補助円の関係より, 焦点  $S_1, S_2$  を求め,  $S_1, S_2$  を通り互いに平行な直線  $l_1, l_2$  を引く。 $l_1$  と円  $O_1, O_2$  が交わる点をそれぞれ  $N_1, N_2$  とし, 同様に  $M_1, M_2$  をとる。次に, 直線  $N_1M_1$  と直線  $N_2M_2$  が垂直に交わる点をPあるいはQとする。すると, P, Qは,  $N_1$  あるいは  $M_1$  が円  $O_1$  上を動くとき, (2)式を満たす卵形線を描く。

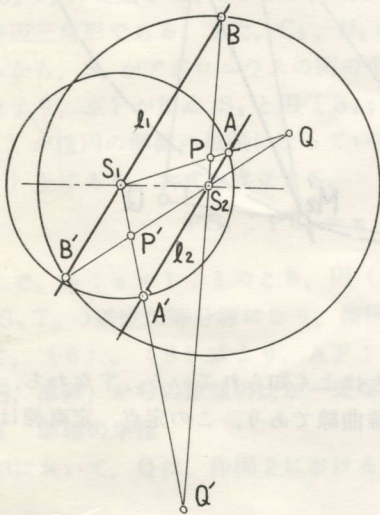


図9

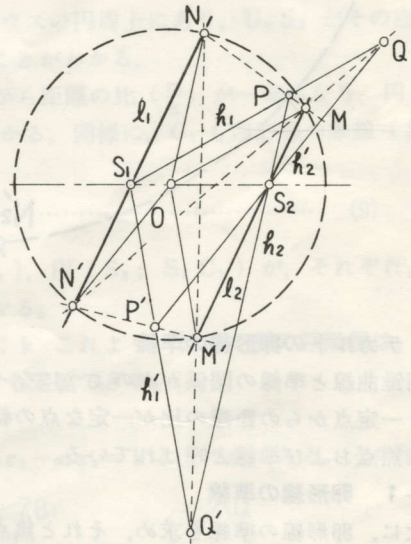


図10

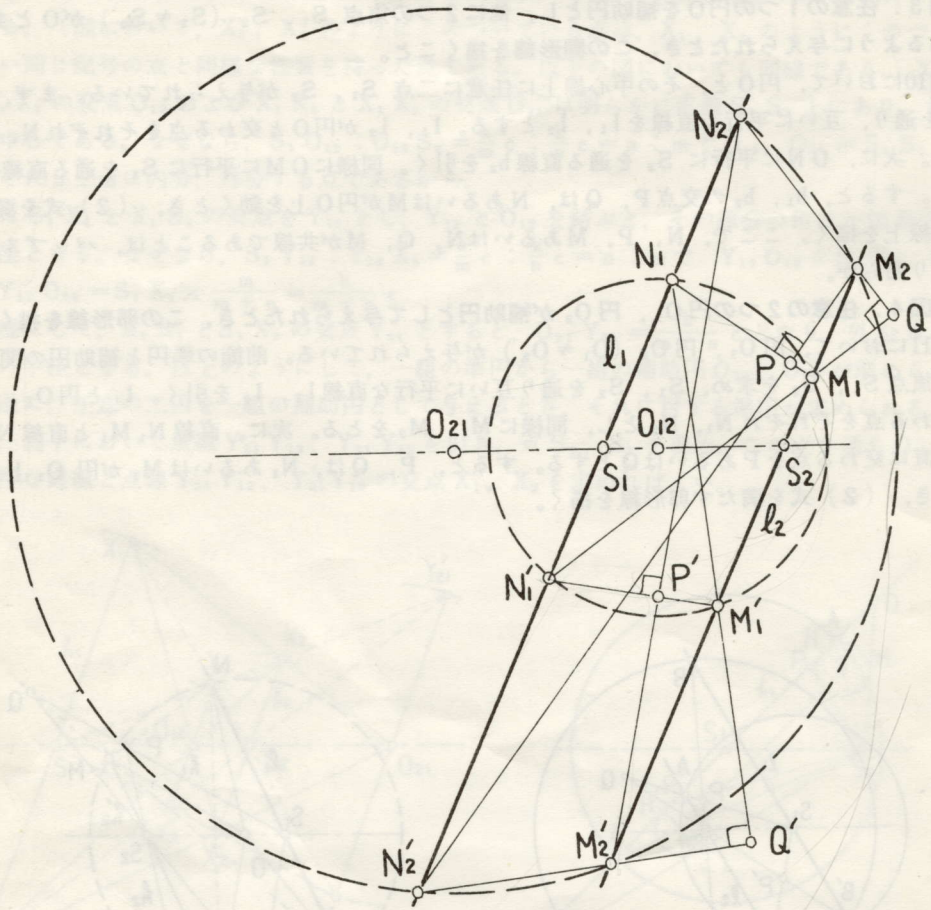


図 11

### 3. デカルトの卵形線の準線

円錐曲線と準線の関係が次のようになっていることはよく知られている。すなわち、一定直線と一定点からの距離の比が一定な点の軌跡は、円錐曲線であり、この定点、定直線は、それぞれ焦点および準線と呼ばれている。

#### 3-1 卵形線の準線

次に、卵形線の準線を求め、それと焦点からの距離の比が一定であることを示す。

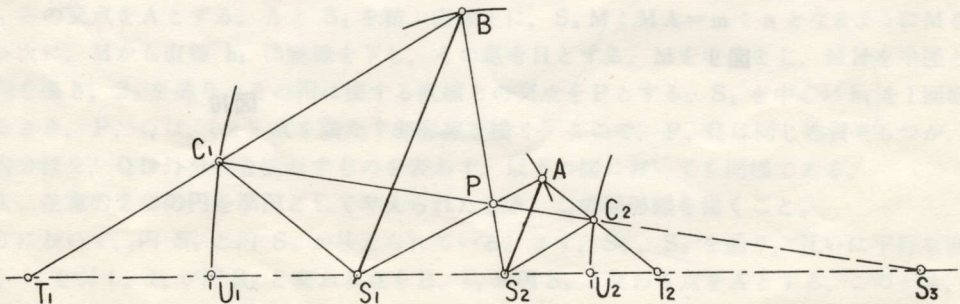


図 12



図12において、二つの準円  $(S_1; \frac{k}{m}c)$ ,  $(S_2; \frac{k}{n}c)$  が与えられているとする。前節作図2によって、P, A, Bが得られたとする。ここで、直線  $S_1 S_2$  上の1点  $T_2$  を  $\triangle AS_1 S_2$  の  $\triangle T_2 S_1 A$  となるように決める。すると、 $S_1 T_2 : S_1 A = S_1 A : S_1 S_2 = \frac{k}{m}c : c$  より

$$S_1 T_2 = \frac{(S_1 A)^2}{S_1 S_2} = \frac{k^2}{m^2}c \quad \dots\dots\dots (7)$$

これより、 $T_2$  は定点であることがわかる。同様に  $T_1$  を決めた。次に、 $S_2$  を通り  $T_1 B$  に平行な直線を引き、 $AT_2$  との交点を  $C_2$  とする。すると、 $\angle C_2 S_2 T_2 = \angle BT_1 S_2 = \angle S_1 B S_2 = \angle AS_2 B$  より、 $\angle PS_2 A = \angle C_2 S_2 T_2$  となり、 $\triangle APS_2 \sim \triangle T_2 C_2 S_2$  となる。ゆえに(6)式より、 $S_2 P : PA = m : n$  となるから、 $S_2 C_2 : C_2 T_2 = m : n$  となり、Aが準円  $(S_1; \frac{k}{m}c)$  上を動くとき、 $C_2$  は二定点  $S_2, T_2$  からの距離の比が  $m : n$  のアポロニウスの円周上を動く。さて、 $\angle APS_2 = \angle T_2 C_2 S_2$  より、四角形  $APS_2 C_2$  は同一円周上にある。ゆえに、 $\angle PC_2 S_2 = \angle PAS_2 = \angle AT_2 S_2$ ,  $\angle S_2 PC_2 = \angle S_2 AT_2$  より、 $\triangle S_2 PC_2 \sim \triangle S_2 AT_2$ , これより、 $S_2 P : PC_2 = S_2 A : AT_2 = S_1 S_2 : S_1 A = c : \frac{k}{m}c = m : k$ , これより、次式が成立する。

$$S_2 P : PC_2 = m : k \quad \dots\dots\dots (8)$$

ゆえに、Pは、アポロニウスの円周上の点  $C_2$  と焦点  $S_2$  からの距離の比が一定となる。

ここで、 $PC_2$  の延長線が直線  $S_1 S_2$  と交わる点を  $S_3$  とする。また、 $\angle S_2 C_2 T_2$  の二等分線と  $S_2 T_2$  の交点を  $U_2$  とすれば、明らかに  $\angle S_3 C_2 U_2 = \angle C_2 U_2 S_3$  となり、 $\triangle S_3 C_2 U_2$  は二等辺三角形である。また、 $C_2, U_2$  がアポロニウスの円周上にあり、 $U_2 S_3$  がその直径上にあるから、 $S_3$  がアポロニウスの円の中心であることがわかる。

これより、点Pが焦点  $S_2$  と円  $(S_3; S_3 C_2)$  から距離の比  $(\frac{m}{k})$  が一定となり、円  $(S_3; S_3 C_2)$  が楕円の準線の拡張になっていることがわかる。同様に、 $C_1$  も卵形線の準線  $(S_3; S_3 C_1)$  上にあり、次式が成立する。

$$PS_1 : PC_1 = n : k \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $m : n = 1 : 1$  のとき、円  $(S_3; S_3 C_2)$ , 円  $(S_3; S_3 C_1)$  が、それぞれ、 $S_2 T_2, S_1 T_1$  の垂直二等分線になり、楕円の準線となる。

さて、(6), (8)式より、 $AP : PC_2 = n : k$  これより、デカルトの卵形線は、二円(準円, 準線)からの距離の比が一定な曲線としても定義できる。

### 3-2 準線の半径

図13において、Qは、作図2におけるように、 $mr_1 - nr_2 = kc$  上の点である。その他の点

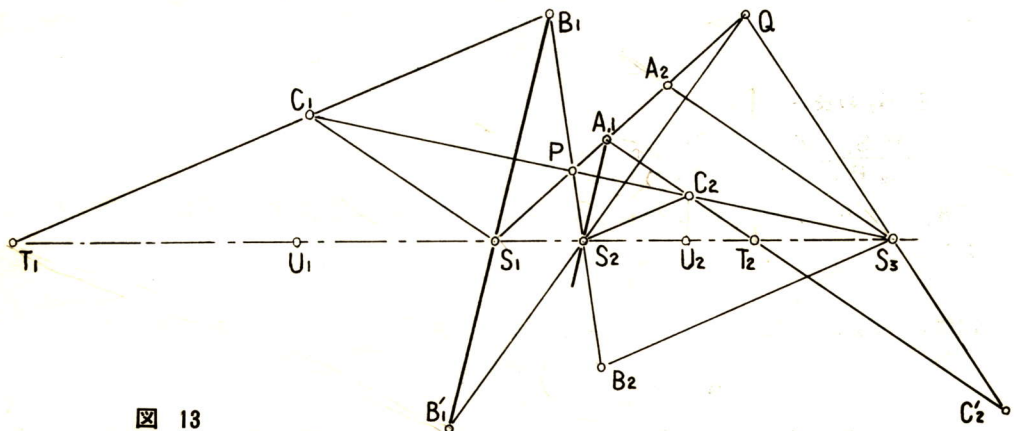


図 13

は、図12と同じである。ここで、 $\angle S_1 B'_1 S_2 = \angle A_1 S_2 Q = \angle C_2 S_2 T_2$ 、また、 $\angle P A_1 S_2 = \angle P C_2 S_2$  ゆえに、 $\angle P Q S_2 = \angle P S_3 S_2$ 、これより、四点  $P Q S_3 S_2$  が同一円周上にあり次の結果を得る。

$$S_1 P \cdot S_1 Q = S_1 S_2 \cdot S_1 S_3 = \text{定数} = \frac{k^2 - n^2}{m^2 - n^2} c^2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

この式の定数の値は、適当に計算すれば求まるが、文献3)より引用した。さて、上式より、卵形線上の外分枝上の点  $Q$  は、 $S_1$  に関する点  $P$  の反点である。それゆえ、内分枝と外分枝が焦点に関して反転曲線の関係にある<sup>3)</sup>

次に準線 ( $S_3$ ;  $S_3 C_2$ ) の半径を求める。 $S_3 C_2 = S_3 U_2 = S_1 S_3 - S_1 S_2 - S_2 U_2$

(10) 式より 
$$S_1 S_3 = \frac{k^2 - n^2}{m^2 - n^2} c \quad \dots\dots\dots (11)$$

図より、 $S_2 U_2 = \frac{m}{m+n} (S_1 T_2 - S_1 S_2)$  (7) 式より  $S_1 T_2 = (k^2/m^2) c$

これより、次の準線の半径 ( $S_3 C_2$ ) が求まり、同様にして  $S_3 C_1$  が求まる。

$$S_3 C_2 = \frac{n}{m} \frac{(k^2 - m^2)}{(m^2 - n^2)} c \quad (12) \quad S_3 C_1 = \frac{m}{n} \frac{(k^2 - n^2)}{(m^2 - n^2)} c \quad \dots\dots\dots (13)$$

#### 4. 卵形線の第3の焦点とそれに対する準円, 補助円, 準線

さて、(10) 式より、 $S_3$  がデカルトの卵形線の第3の焦点であることがわかる。<sup>3)</sup>これは、(8)、(9) の関係が、作図1と類似していることからわかる。

##### 4-1 第3の焦点の他の焦点との同等性

このことについては、図13における、 $S_3 P = r_3$  とすれば、 $r_1$  と  $r_3$  が一次の関係にあることから明らかにされている<sup>3)</sup> が、ここでは、別な見方で明らかにする。

定義より 
$$S_1 S_2 = c = R_{12} \quad \dots\dots\dots (14)$$

(11) 式より 
$$S_1 S_3 = \frac{k^2 - n^2}{m^2 - n^2} c = R_{13} \quad \dots\dots\dots (15)$$

(14)、(15) 式より 
$$S_2 S_3 = \frac{k^2 - m^2}{m^2 - n^2} c = R_{23} \quad \dots\dots\dots (16)$$

これより、 $S_1 S_2 : S_2 S_3 : S_3 S_1 = m^2 - n^2 : k^2 - m^2 : n^2 - k^2$  ゆえに、 $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$  が同等であることがわかる。5節において、このことはより明白になろう。

##### 4-2 第3の焦点と第1, 第2焦点間の準円

前節の同等性から、( $S_1$ ,  $S_2$ ) の間に一組の準円が存在するのと同様に ( $S_2$ ,  $S_3$ ) ( $S_3$ ,  $S_1$ ) の組にも、それぞれ一組の準円が存在すると考えられる。次にそのことを具体的に示す。

図13において、 $S_3$  より  $S_2 C_2$  に平行な直線を引き、直線  $S_2 P$  との交点を  $B_2$  とする。すると、 $S_1 B_2$  の長さは、次のようにして求まる。

$$\frac{P S_2}{C_2 P} = \frac{P B_2}{P S_3} = \frac{P B_2 - P S_2}{P S_3 - P C_2} = \frac{S_2 B_2}{S_3 C_2} \quad \dots\dots\dots$$

(8) 式より  $P S_2 : C_2 P = m : k$  ゆえに  $S_2 B_2 = \frac{m}{k} S_3 C_2$  これに (12) 式の値を代入して

$$S_2 B_2 = \frac{n}{k} \frac{(k^2 - m^2)}{(m^2 - n^2)} c \quad (\text{定数})$$

同様に、 $S_3$  より  $S_1 C_1$  に平行な直線を引き、直線  $S_1 P$  との交点を  $A_2$  とすれば、

$$S_1 A_2 = \frac{m}{k} \frac{(k^2 - n^2)}{(m^2 - n^2)} c \quad (\text{定数})$$

ここで、 $S_2$ 、 $B_2$ 、 $S_3$ 、 $C_2$  および  $P$  の関係が作図2に対応していることがわかる。また、



$S_1, A_2, S_3, C_1, P$ についても同様、これより、次の結果を得る。

焦点  $S_2, S_3$  間の準円の半径は、

$$S_2 B_2 = \frac{n(k^2 - m^2)}{k(m^2 - n^2)} c = \frac{n}{k} R_{23}, \quad S_3 C_2 = \frac{n(k^2 - m^2)}{m(m^2 - n^2)} c = \frac{n}{m} R_{23} \quad \dots\dots\dots (17)$$

焦点  $S_3, S_1$  間の準円の半径は、

$$S_3 C_1 = \frac{m(k^2 - n^2)}{n(m^2 - n^2)} c = \frac{m}{n} R_{13}, \quad S_1 A_2 = \frac{m(k^2 - n^2)}{k(m^2 - n^2)} c = \frac{m}{k} R_{13} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、(15)、(16)式を使った。

#### 4-3 卵形線の定義式

さて、 $S_1 S_2$  間の準円の半径は、(14)式を使って、 $\frac{k}{m} R_{12}, \frac{k}{n} R_{12}$  であり、焦点  $S_1, S_2$  から卵形線上の点  $P$  あるいは  $Q$  までの距離をそれぞれ  $r_1, r_2$  とおくと、 $r_1, r_2$  は、

$$m r_1 \pm n r_2 = k R_{12} \quad \dots\dots\dots (19)$$

を満たしたのと同様に、焦点  $S_3$  からの距離を  $r_3$  とおくと、(17)式より、 $r_2, r_3$  は、

$$\mp k r_2 \pm m r_3 = n R_{23} \quad \dots\dots\dots (20)$$

を満たし、同様に、(18)式より、 $r_3, r_1$  は、下式を満たす。

$$-n r_3 \mp k r_1 = \pm m R_{31} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ただし、 $R_{13} = -R_{31}$ 、 $k > m > n > 0$  の場合で、(19)、(20)、(21)の複号の上の符号が、ともに同一の卵形線の内分枝を表わし、下の方がともに同一の外分枝を表わす。つまり、一組

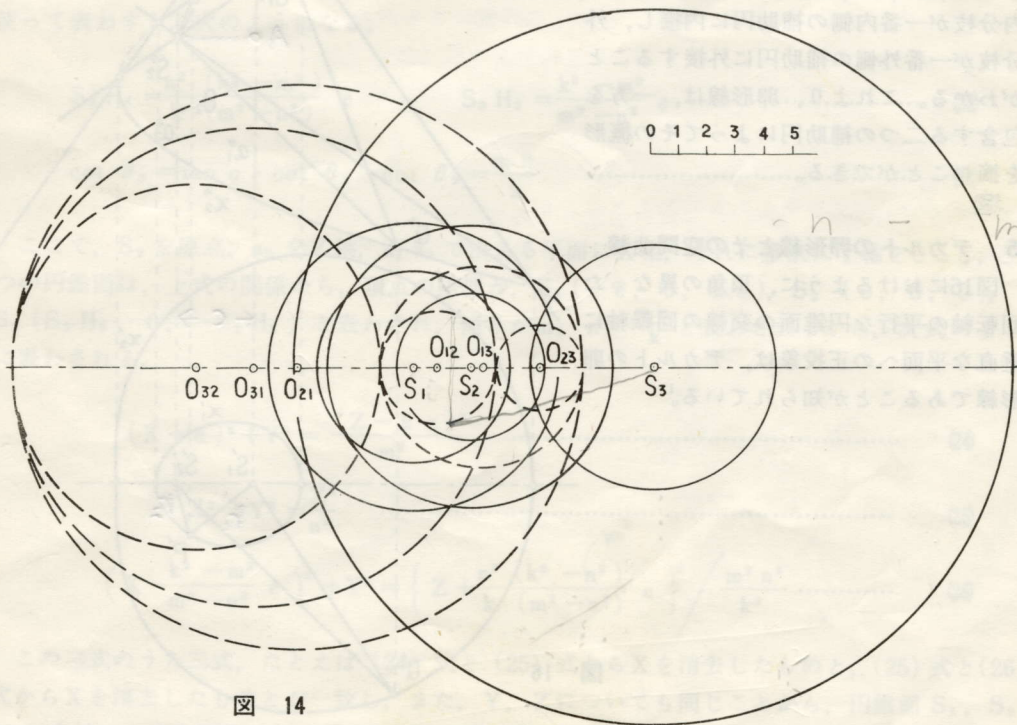


図 14

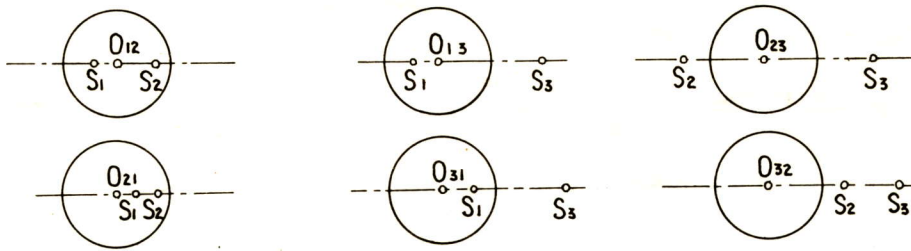


図 15

の卵形線を定義する場合、(19)，(20)，(21)のどれを使ってもよいことになる。

さて、定義式がわかると、準円、補助円がわかる。また、図13におけるように、準円は準線でもあった。これらの円(準円6コ、補助円6コ)を具体的に描くと、図14のようになる。

ただし、 $m=3$ ， $n=2$ ， $k=5$ ， $R_{12}=2$ として(15)，(16)式より、

$$R_{23}=6.4, R_{31}=-8.4$$

図14からわかるように、補助円は、6個の円が互いに接している。これは、補助円の半径と中心の関係から計算してもわかる。また、図15のように、作図3における1つの補助円と2つの焦点の関係は、焦点が補助円上にある場合を除いて、6種類に分類できるが、図14の6個の補助円とそれに対する焦点(補助円  $O_{12}$ ，

$O_{21}$ は焦点間  $S_1 S_2$ をそれぞれ、内分、外分した点を中心としている)の関係は、この6種を全部満たす。また、卵形線は、内分枝が一番内側の補助円に内接し、外分枝が一番外側の補助円に外接することがわかる。これより、卵形線は、一方を包含する二つの補助円によってその概形を摘むことができる。

據

### 5. デカルトの卵形線とその空間曲線

図16におけるように、頂角の異なる回転軸の平行な円錐面の交線の回転軸に垂直な平面への正投影は、デカルトの卵形線であることが知られている。<sup>1)</sup>

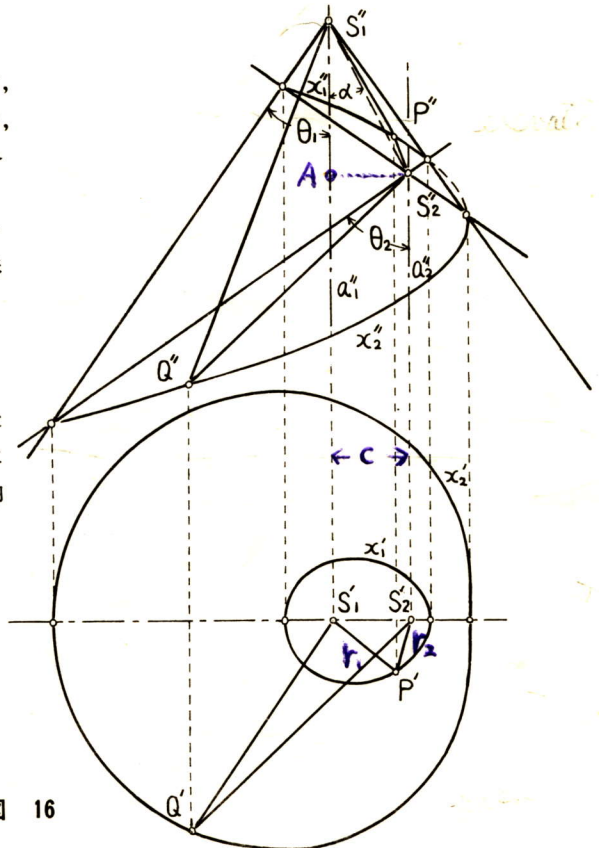


図 16



5-1 二つの円錐面の相貫曲線と卵形線

上記の相貫曲線の正投影象が卵形線であることを、双極座標を使って示す。

今、二つの平行な回転軸によって決まる平面を  $\pi_2$ 、回転軸に垂直な平面を  $\pi_1$  とする。ここで、 $\pi_2$  を立面図、 $\pi_1$  を平面図としたのが、図16である。さて、頂点  $S_1, S_2$  を持つ円錐面の頂角をそれぞれ、 $\theta_1, \theta_2$  とする。ここで、 $\cot \theta_1 = m, \cot \theta_2 = n$  とおく。すなわち、 $m, n$  は、 $\pi_1$  面に対する円錐面の傾角を表わす。また回転軸間距離、すなわち、 $S_1 S_2$  を  $c$  とする。また、回転軸を  $a_1, a_2$  とする。 $a_1$  と  $S_1 S_2$  のなす角を  $\alpha$  とおき、 $\cot \alpha = k$  とおく。交線(すなわち、デカルトの卵形線の空間曲線)を  $x$  とする。 $x$  上の任意の点  $P$  と  $S_1$  を結ぶ線分(すなわち、円錐  $S_1$  の  $P$  点を通る母線上の線分)の  $\pi_1$  面への正射影を  $r_1$  とする。同様に  $S_2 P$  の方を  $r_2$  とする。すると、 $S_1 P$  と  $S_2 P$  の  $a_1$  軸 への正射影は、それぞれ、 $m r_1, n r_2$  に等しく、これらの和は、 $S_1 S_2$  の  $a_1$  軸 への正射影すなわち  $k c$  に等しい。ゆえに、 $m r_1 + n r_2 = k c$  となり、 $\pi_1$  面上の点  $P$  は、(2) 式を満たすデカルトの卵形線上の点であることがわかる。 $Q$  についても同様に考えて、 $m r_1 - n r_2 = k c$  を満たすことがわかる。

5-2 三つの円錐面の相貫曲線と卵形線

次に、<sup>three cones intersecting</sup> 立面図について考える。 $\pi_2$  面上での二つの円錐面の母線の交点を、図17のように、 $A, B, C, D$ 、とする。 $\angle DAC = \angle DBC$  より、明らかに四点  $A, B, C, D$  は同一円周上にある。ここで、直線  $AB$  と  $DC$  の交点を  $S_3$  とする。また、直線  $BS_3$  上に  $S_3$  に対して  $B$  と反対側の1点を  $E$  とする。 $\angle ADC = \angle S_1 B A$  より、 $\angle CS_3 E$  の二等分線  $a_3$  は、 $a_1, a_2$  に平行である。つまり、円錐  $S_1$  と円錐  $S_2$  を決めると、頂点を  $S_3$ 、回転軸を  $a_3$ 、子午線を直線  $AB$  とする円錐面が、一意的に決まることがわかる。ここで、円錐面  $S_1, S_2$  の交線が円錐面  $S_2, S_3$  の交線および円錐面  $S_3, S_1$  の交線と空間的に一致することを示す。

図16と同様に、円錐  $S_3$  の頂角を  $\theta_3$  とする。また、 $a_2 \parallel a_3$  より、 $\angle BS_3 C$  の二等分線は、 $a_2$  に直交する。この交点を  $H_3$  とする。さて、 $S_2 H_3, S_3 H_3$ 、頂角  $\theta_3$  を  $m, n, k, c$  を使って表わすと、次のようになる。

$$S_2 H_3 = \frac{n^2 (k^2 - m^2)}{k (m^2 - n^2)} c \quad S_3 H_3 = \frac{k^2 - m^2}{m^2 - n^2} c \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\cot \theta_3 = \tan \alpha \cdot \cot \theta_1 \cdot \cot \theta_2 = \frac{m n}{k} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 $S_2$  を原点、 $a_2$  を  $Z$  軸、 $a_1 a_2$  で決まる平面に  $X$  軸、それに垂直に  $Y$  軸をとると、三つの円錐面は、上式の関係から、頂点の座標が、 $S_1 (-c, 0, k c), S_2 (0, 0, 0), S_3 (S_3 H_3, 0, -S_2 H_3)$  と表わされ、傾きが  $m, n, \frac{m n}{k}$  と表わされるから、次式のように表わされる。

$$(X + c)^2 + Y^2 = \frac{(Z - k c)^2}{m^2} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$X^2 + Y^2 = \frac{Z^2}{n^2} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\left( X - \frac{k^2 - m^2}{m^2 - n^2} c \right)^2 + Y^2 = \left\{ Z + \frac{n^2 (k^2 - n^2)}{k (m^2 - n^2)} c \right\}^2 \frac{m^2 n^2}{k^2} \quad \dots\dots\dots (26)$$

この三式のうち二式、たとえば (24) 式と (25) 式から  $X$  を消去したものと、(25) 式と (26) 式から  $X$  を消去したものとが一致し、また、 $Y, Z$  についても同じことから、円錐面  $S_1, S_2, S_3$  の交線である空間曲線は、ただ1組存在することがわかる。

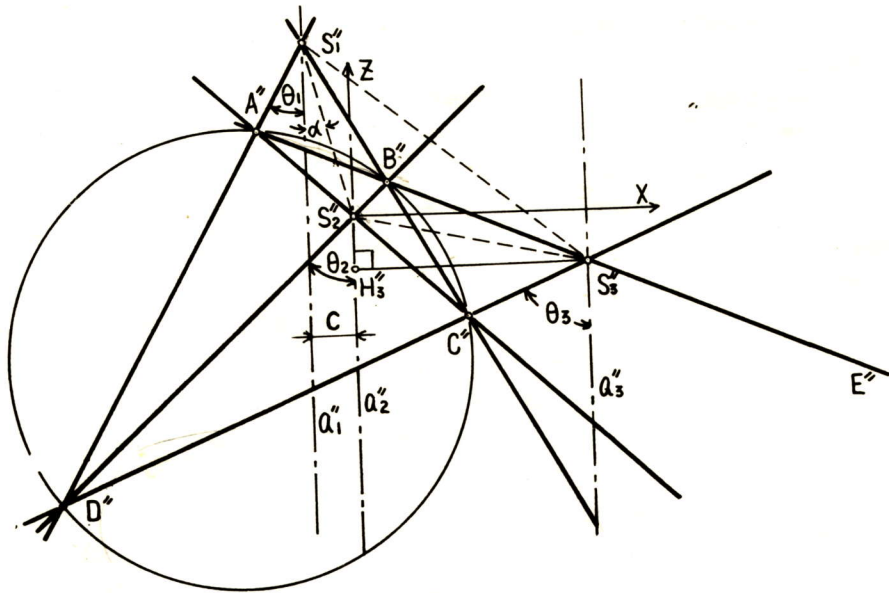


図 17

次に、 $\Delta S_1 S_2 B$  について見ると、 $S_1 B$ 、 $S_2 B$ 、 $S_1 S_2$  の  $\pi_1$  との傾きが  $m$ 、 $n$ 、 $k$  であり明らかに  $k > m > n$  であり、これは、(3) 式に対応している。同様に、 $\Delta S_2 S_3 B_2$  において三辺の傾きの関係が (4) 式の関係にあることがわかる。 $\Delta S_3 S_1 B$  についても、同様。

また、(19) ~ (21) 式の土の符号も図17と比較すれば明らかである。つまり、空間曲線  $x_1$  (図16の内分枝を作る曲線) が、回転軸方向に関して、 $S_1$ 、 $S_2$  の中間にあるから、 $r_1$ 、 $r_2$  の係数の正負の符号が一致し、 $x_2$  は、 $S_1 S_2$  の外側にあるから、 $r_1$ 、 $r_2$  の係数の正負の符号が逆である。また、 $x_1$ 、 $x_2$  と  $S_2$ 、 $S_3$  などの関係から (20)、(21) の土の符号がわかる。

さて、ここで、空間図形とデカルトの卵形線の平面的性質である準円、補助円などの関連を考える。

図18におけるように準円は、各円錐面の頂点を通る回転軸に垂直な平面で切断したときのできる円を  $\pi_1$  に正投影したものであることがわかる。これからも、図14におけるように、6個の準円が存在することがわかる。ただし、図18は、立面図のみ。

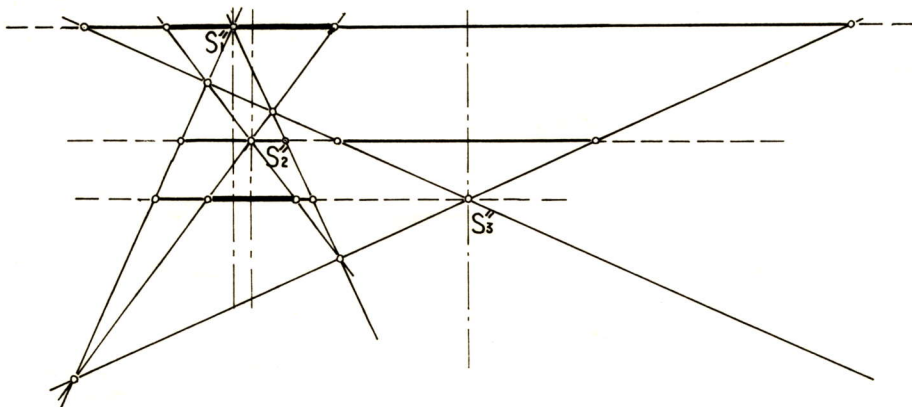


図 18



さて、図19において、四点A, B, C, Dおよびその中点の平面図を考える。図中  $O_{12}$ ,  $O_{21}$  は、それぞれAB, CDの中点であるが、図16におけるように  $m, n, k, c$  をとったとき、 $S_1 O_{12} : O_{12} S_2 = \frac{n}{m} : \frac{m}{n}$ ,  $S_1 O_{21} : O_{21} S_2 = \frac{m}{n} : \frac{n}{m}$  となることが簡単な計算からわかる。このことから、 $O_{12}$ ,  $O_{21}$  は、焦点  $S_1$ ,  $S_2$  を内、外分する点であり、補助円の中心であることがわかる。また、 $O_{12} B'$  および  $O_{21} D'$  がそれぞれの半径である。

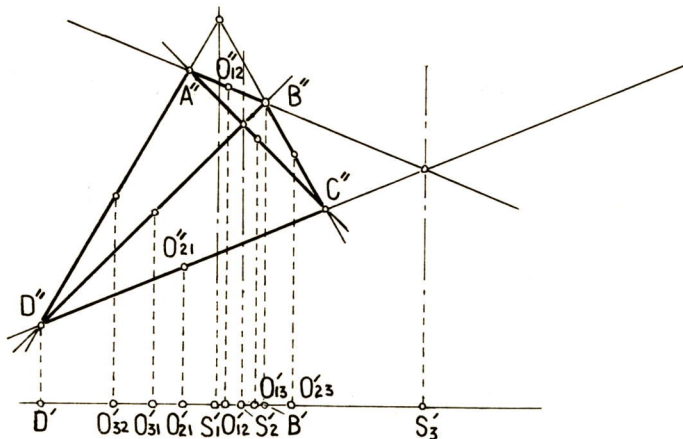


図 19

以上のことから、 $mr_1 \pm nr_2 = kc$  で与えられるデカルトの卵形線に付随する準円、補助円、準線の位置関係が、図17さえ書けば、ほぼ明らかになる。また、1組のデカルトの卵形線は、円に内接する四角形ABCD（特別な場合三角形となる）によって決定されると言える。

### 6. デカルトの卵形線の接線

今、一つの卵形線の定義式がわかっているものとする。つまり、作図1~4までのいずれかの条件が与えられているとする。図20において、作図1の条件が与えられており、卵形線上の点  $P_1$  における接線を考える。今、 $A_1 S_2$  の垂直二等分線は、 $P_1$  における楕円の接線であることが知られている。ここで、 $A_1 P_1$  の垂直二等分線と楕円上の点  $P_1$  の接線との交点を  $V_1$  とする。すると、 $P_1 V_1$  が  $P_1$  におけるこの卵形線に対する接線  $t_1$  である。つまり、 $\triangle A_1 P_1 S_2$  の外心  $V_1$  と  $P_1$  を結ぶ直線が  $P_1$  における卵形線に対する接線である。 $Q_1$  についても同様。

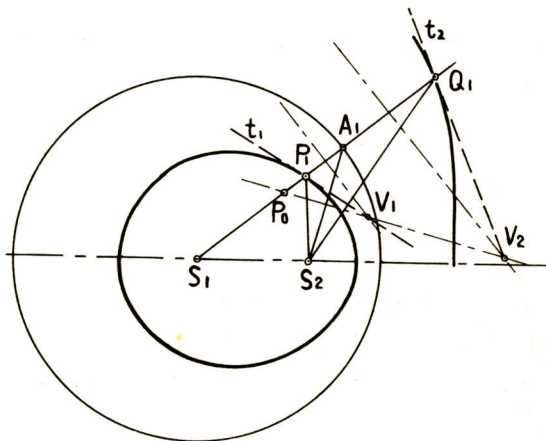


図 20

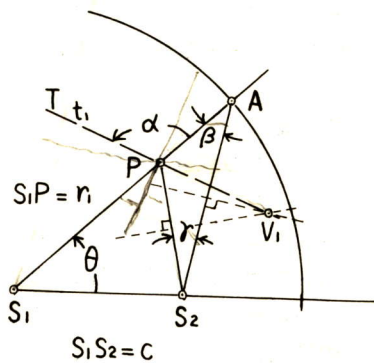


図 21

なお、ここで、 $P_1$  が  $P_0$  に一致した場合、 $P_1 V_1$  と楕円の接線が一致し、また、 $P_1$  が  $A_1$  に一致したとき ( $\frac{n}{m} = 0$ )  $V_1 P_1$  が  $A_1$  における円  $S_1$  の接線であることは、明らかである。

次に、解析的に  $t_1$  が点  $P_1$  における卵形線に対する接線であることを示す。

図21におけるように極座標表示における曲線  $r = f(\theta)$  上の点  $P$  での接線  $PT$  と、動径  $S_1 P$  から  $PT$  のほうへまわる角を  $\alpha$  とすると次式が成立する<sup>4)</sup>

$$\cot \alpha = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \dots\dots\dots (27)$$

今、卵形線が、 $mr_1 \pm nr_2 = kc$  のとき、 $S_1$  を極  $S_1 S_2$  方向を始線とすれば、 $r_1$  は次式を満たす。

$$r_1 = \frac{c \{ (km - n^2 \cos \theta) \mp n \sqrt{n^2 \cos^2 \theta - 2km \cos \theta + k^2 + m^2 - n^2} \}}{m^2 - n^2} \dots\dots\dots (28)$$

ここで、複号の-は内分枝、+は外分枝を表わす。ただし、 $k > m > n > 0$  これより、

$$\frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{d\theta} = \frac{\mp n \sin \theta}{\sqrt{n^2 \cos^2 \theta - 2km \cos \theta + k^2 + m^2 - n^2}} \dots\dots\dots (29)$$

ここで、図21から

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos (\frac{\pi}{2} + \gamma)}{\sin (\frac{\pi}{2} + \gamma)} = \frac{-\sin \gamma}{\cos \gamma} \dots\dots\dots (30)$$

$$\text{ところで、} S_2 P : PA = m : n \text{ より、} m \sin \gamma = n \sin \beta \dots\dots\dots (31)$$

また、 $\triangle AS_1 S_2$  において

$$\frac{c}{\sin \beta} = \frac{c \sqrt{(k^2/m^2) + 1 - 2(k/m) \cos \theta}}{\sin \theta} \dots\dots\dots (32)$$

(31)、(32) 式を (30) 式に代入して、 $\beta$ 、 $\gamma$  を消去すると

$$\cot \alpha = \frac{-n \sin \theta}{\sqrt{n^2 \cos^2 \theta - 2km \cos \theta + k^2 + m^2 - n^2}} \dots\dots\dots (33)$$

これは、(29) の-の符号をもつ式に一致し、(27) 式が成立することがわかる。ゆえに、 $t_1$  が  $P_1$  における卵形線の接線であることがわかる。 $t_2$  についても同様。

## 7. 総括

デカルトの卵形線を楕円の一般化と考え、考察した結果、以下のような二・三の幾何学的性質がわかった。

○円錐曲線には、準円、補助円、準線が付随しているが、これは、卵形線にも同じような準円、補助円、準線が付随していた。しかし、卵形線には、焦点が3つあり、したがって、準円が6個あった。また、卵形線の準線は円であり、円の中心が無限遠点にある場合が、円錐曲線の準線となった。このことから、デカルトの卵形線の特別な場合が円錐曲線であることが明らかになった。

○デカルトの卵形線の接線の作図法も得られた。また、デカルトの卵形線の特別な場合が、



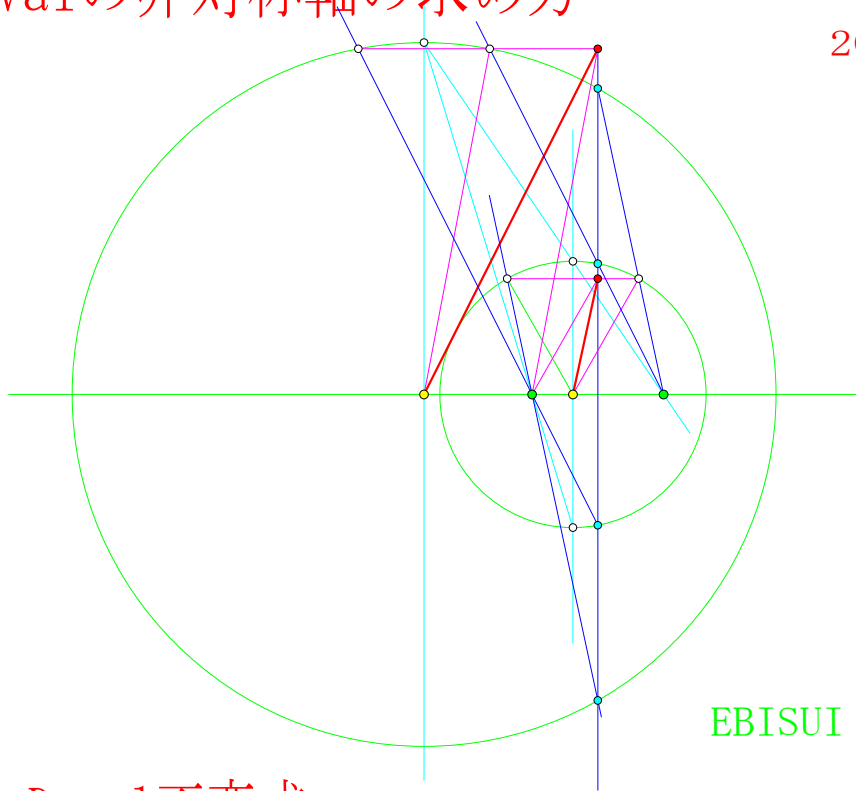
リマソンであることが知られているが、卵形線の接線の作図法は、この場合にも使える。  
○卵形線の空間曲線をつくる三つの円錐について考えることにより、準円、補助円、準線および三つの焦点の位置が簡単にわかるようになった。

参 考 文 献

- 1) ERNST SCHÖRNER, "RAUMBILD-LEHRBUCH DER DARSTELLENDE GEOMETRIE" R. OLDENBOURG VERLAG MÜNCHEN, 1960  
P. 126~P. 127
- 2) F. ホーエンベルク著 増田祥三訳 "技術における構成幾何学" 日本評論社 1969  
P. 55~P. 66
- 3) ロックウッド著 松井政太郎訳 "カーブ" みすず書房 1964  
P. 1~P. 38 P. 200~P. 204
- 4) 栗田稔著 "いろいろな曲線" 共立出版 1969 P. 91

# Dovalの非対称軸の求め方

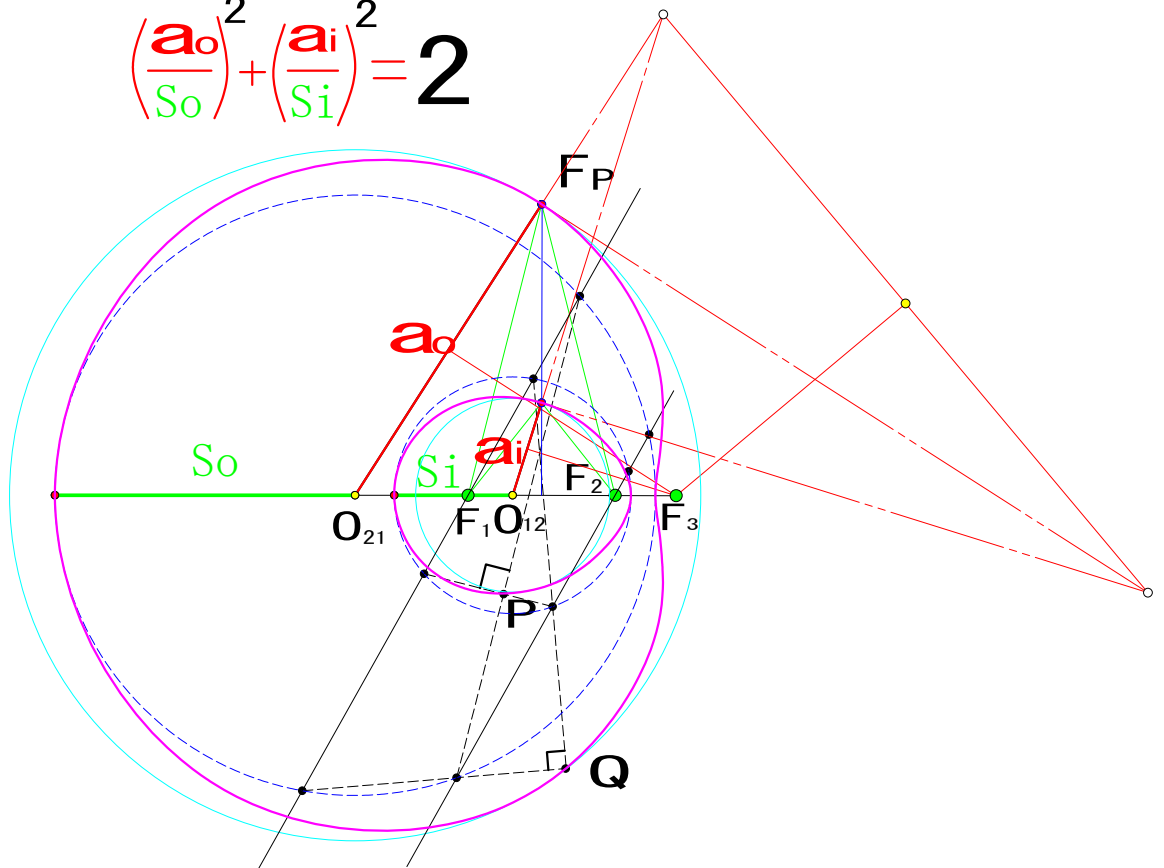
2008-7-20



EBISUI Hiroataka

Doval不変式

$$\left(\frac{a_o}{S_o}\right)^2 + \left(\frac{a_i}{S_i}\right)^2 = 2$$



# デカルトの卵形線の短軸および卵形面\*

蛭子井 博 孝\*\*

## 1. 序論

### 1. 1 はじめに

卵形は、かなり以前から、様々な人が考察の対象にしていたのであろう。にわたりの卵は、確かに興味ある形をしている。そのような卵形の定式化<sup>1),2)</sup>や図形のユークリッド幾何的性質や微分幾何的性質<sup>3)</sup>(凸閉曲線の頂点の数など)は、その図式化や定式化の過程をたどれば、おもしろい考察材料となろう。

特に、デカルトの卵形線の定義は、図式的に様々な定義される。ここでは、それに卵形線の性質として、短軸という概念を付加できたので報告する。さらに、卵形線の平面から空間への拡張として、卵形面を卵形線の一般化として、定義し得たので報告する。これは、対称断面としての卵形線の考察から導出できる。

なお、この小論は、1994年6th ICECGDGの原稿を多少手直したものである。特に、序論の部分を手直しし、卵形線の定義と短軸の定義との間の必然性を明らかにした。

### 1. 2 卵形線の定義

デカルトの卵形線は、「定円とその内側にある定点と、からの距離が等しいときの楕円の接線作図法(図

1)」を、図2のように発展させた楕円の拡張である。この定義の方法とその他の合せて3つの定義の方法を以下に述べる。その定義1と定義3は、小論<sup>4)</sup>に詳細が述べてある。

#### 1. 2. 1 [定義1]

デカルトの卵形線は図3のように「一定円とその円内の定点からの距離の比が一定( $n/m$ )である曲線」と定義される。さて、この定義では、図3のように、定円の内外に条件を満たす曲線ができるが、それらをそれぞれ、卵形線の内分枝、外分枝と呼ぶ。本論では内分枝のみについて考える。ここで、一定点、定円を固定して、比だけを $0 < \frac{n}{m} < 1$ の条件で変化させると卵形線の大きさは変化し、図4のように $\frac{n}{m} = 0$ となる円と $\frac{n}{m} = 1$ となる楕円の間を埋めつくす曲線群となる<sup>5)</sup>。

しかし、これでは、定義にそった卵形線の長軸の長さが変化し、その曲線群全体に短軸を明確には、定義しにくい。なお、この定義は、ユークリッド幾何の範囲で、先達の人ですでに知っている可能性もある。

#### 1. 2. 2 [定義2]

次に、デカルトの卵形線は、双極座標<sup>2)</sup>を用いて

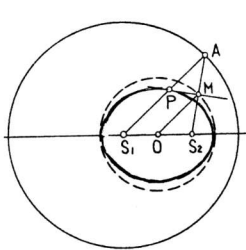


図1 楕円の接線

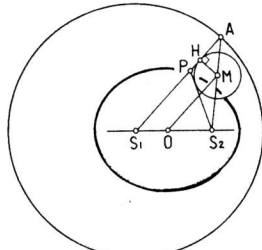


図2 図1の卵形線への拡張

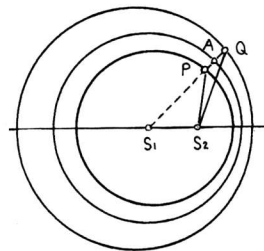


図3 卵形線 定義1

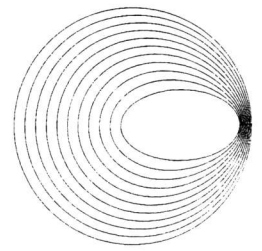


図4 円, 楕円間の卵形線群

\*平成7年1月9日受付  
\*\* 福山暁の星女子高校

$$mr_1 + mr_2 = kc \quad (1)$$

と定義される。図5のように、双極間の距離  $S_1S_2=c$  および2つの動径  $S_1P=r_1$ ,  $S_2P=r_2$  が(1)式を満たして変化するとき、Pは卵形線を描く。ここで  $m, n, k$  は  $k > m > n > 0$  を満たす任意定数とする。なお、外分枝については  $mr_1 - mr_2 = kc$  で表される。

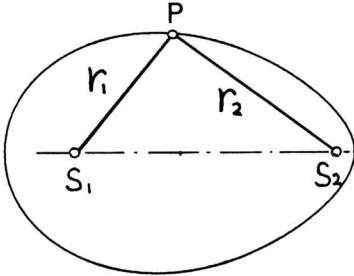


図5 卵形線 定義2

### 1. 2. 3 [定義3]

卵形線は、図6のように、一定円とその直径(2a)上に二定点(2極 or 2焦点と呼ぶ)を定めると、定まる。その作図方法を述べる。『円O(中心;半径=O;a)とその直径上の二定点  $S_1, S_2$  が与えられるとき、その二定点を通る平行線  $l_1, l_2$  を任意にひく。その2直線と定円の交点を  $N, N', M, M'$  とする。次に、 $S_1$  を通り直線  $OM$  と平行な直線を  $s$  とする。この  $s$  と直線  $MN$  の交点を  $P$  とする。(ここで、パップスの定理より  $ON/S_2P$ )、動直線  $l_1$  が、この関係を保ちつつ、1回転するとき、点Pは、デカルトの卵形線を描く。』ここで、定円Oの半径  $a$  は、 $l_1$  が長軸と重なったとき、 $r_1, r_2$  は、連立方程式

$$\begin{cases} mr_1 + nr_2 = kc \\ r_1 - r_2 = c \end{cases}$$

を満たし、解は  $r_1 = \frac{k+n}{m+n}c$  となり、故に  $S_1S_2=c$ ,

$OS_1 : OS_2 = n : m$  より

$$\text{半径 } a = r_1 - OS_1 = \left(\frac{k+n}{m+n}\right)c - \left(\frac{n}{m+n}\right)c = \frac{k}{m+n}c$$

となる。ここで

$$e_L = \frac{OS_1}{a} = \left(\frac{nc}{m+n}\right) / \left(\frac{kc}{m+n}\right) = \frac{n}{k} \quad (\text{左離心率})$$

$$e_R = \frac{OS_2}{a} = \left(\frac{mc}{m+n}\right) / \left(\frac{kc}{m+n}\right) = \frac{m}{k} \quad (\text{右離心率})$$

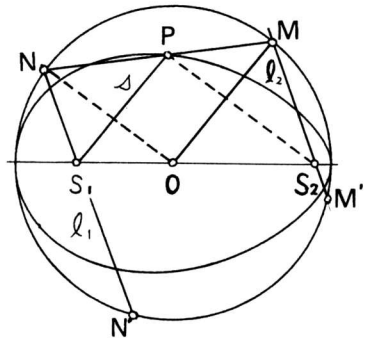


図6 卵形線 定義3

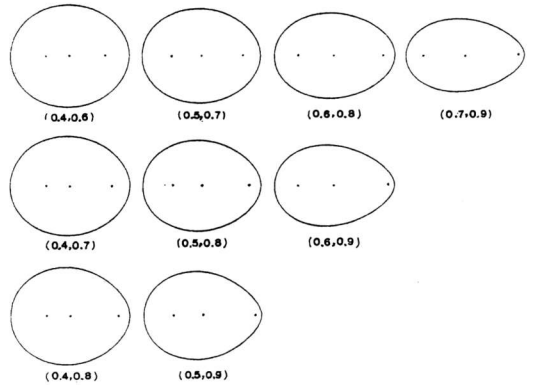


図7 卵形線の離心率による変化

が定義<sup>5)</sup>できる。

この  $e_L, e_R$  を条件  $0 \leq e_L \leq e_R \leq 1$  の範囲で、変化させると、図7のように様々な形の卵形が表される<sup>5)</sup>。

### 1. 2. 4 3つの定義の関係

さて、3つの定義を双極座標で考えてみると

[定義1]

$$R_0 \rightarrow S_1S_2 = c \rightarrow (n/m) \quad \Leftrightarrow \quad mr_1 + nr_2 = mR_0$$

$$\text{変換} \downarrow R_0 = \frac{k}{m}c \quad \uparrow c = \frac{m}{k}R_0$$

[定義2]

$$m \rightarrow n \rightarrow kc = K \quad \Leftrightarrow \quad mr_1 + nr_2 = kc$$

$$\text{変換} \uparrow a = \frac{kc}{m+n} \quad \downarrow k = \frac{a(m+n)}{c}$$

[定義3]

$$a \rightarrow e_L : e_R = n : m \quad \Leftrightarrow \quad mr_1 + nr_2 = a(m+n)$$

卵形線上の点Pが満たす、パラメータを用いた双極座標式を導くには、図8を参照すれば明かになる。このとき、次の関係式を用いて式を導出した。



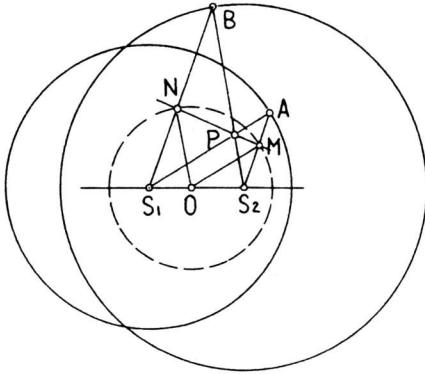


図8 定義1と3の関係

$$S_1P + \frac{n}{m}S_2P = S_1A \rightarrow mS_1P + nS_2P = mS_1A$$

また、各式の間の変換が、図式の↑、↓のようになることも、明らかである。

## 2. 卵形線の短軸

### 2.1 短軸の定義とその位置

前節1.2.3.で考察したように、長軸が $a$ で規格化されると、次の短軸概念が付加され意味をもつ。

#### 2.1.1 [定義]

卵形線の短軸と言えは、長軸に垂直で、最も長い卵形線上の2点を結ぶ部分図9で定義することも考えられるが、それは、巾であって、楕円の一般化としては、図10のように、「短軸は、長軸の中点と卵形線上の点Pを結ぶ線分のうち、最も短いもの」と定義する。

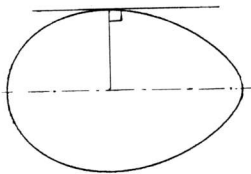


図9 卵形線の巾

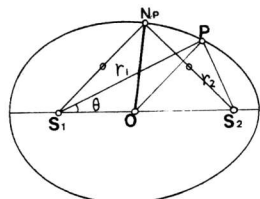


図10 短軸の定義

#### 2.1.2 短軸の位置とその導出

$mr_1 + nr_2 = kc$  で定義されているとき、長軸（対称軸）の中点を原点 $O$ とし、長軸方向を $x$ 軸、垂直方向を $y$ 軸とする。このとき、極間を $c$ とすると、極の座標は、 $S_1O:OS_2 = n:m$ より、焦点 $S_1 = \left(\frac{-nc}{m+n}, 0\right)$ ,

焦点 $S_2 = \left(\frac{mc}{m+n}, 0\right)$ である。卵形線上の1点 $P$ を $(X, Y)$ 、 $\angle PS_1O = \theta$ 、 $S_1P = r_1$ とすると、線分の長さの2乗 $(OP^2)$ は

$$OP^2 = X^2 + Y^2 = \left(r_1 \cos \theta - \frac{nc}{m+n}\right)^2 + (r_1 \sin \theta)^2$$

$$\text{ここで } \begin{cases} r_2^2 = r_1^2 + c^2 - 2r_1c \cos \theta \\ mr_1 + nr_2 = kc \end{cases}$$

まず $r_2$ を消去して、次に $\theta$ を消去すると

$$\begin{aligned} OP^2 &= r_1^2 - \frac{2nc}{m+n}r_1 \cos \theta + \left(\frac{nc}{m+n}\right)^2 \\ &= \frac{m}{n} \left(r_1 - \frac{kc}{m+n}\right)^2 + \frac{(k^2 - mn)}{(m+n)^2}c^2 \end{aligned}$$

となる。

上式は、 $r_1$ の2次式より、線分 $OP$ は、 $r_1 = \frac{kc}{m+n}$ のとき、最小値 $\sqrt{(k^2 - mn)c^2 / (m+n)^2}$ となり、これは、1.2.3の $a = \frac{kc}{m+n}$ 、 $e_L = \frac{n}{k}$ 、 $e_R = \frac{m}{k}$ を用いて変形すれば、 $a\sqrt{1 - e_L e_R}$ となる。ところで

$\frac{kc}{m+n}$ は、卵形線の定義式 $mr_1 + nr_2 = kc$ における $r_1 = r_2$ のときの $r_1 = \frac{kc}{m+n}$ と一致する。ゆえに、短軸

の位置として、「卵形線の短軸は、焦点 $S_1, S_2$ から等距離にある卵形線上の点（近点と呼ぶ）と、中心を結ぶ線分である。」と定義できる。長さは、 $a\sqrt{1 - e_L e_R}$ である。

### 2.2 卵形線の短軸の性質

#### 2.2.1 卵形線の短軸が近点( $N_p$ )における卵形線の法線上にあること

図11におけるように、図6に更に、補助線 $S_1M, S_2N$ を引き、 $S_1M$ と $S_2N$ の交点 $T$ を求めると、直線 $PT$ は、 $P$ における卵形線の法線である<sup>4),6),8)</sup>

ところで、点 $P$ が $N_p$ 点、つまり $r_1 = r_2$ であるとき図11は、図12のようになる。つまり、 $S_1S_2/MN$ となり、四角形 $S_1S_2MN$ が平行四辺形より、 $P, T, O$ が一直線上にある。つまり、 $N_pO$ は、点 $N_p$ における卵形線の法線上にある。

#### 2.2.2 短軸上の端点（近点）が微分幾何学的頂点でないこと

[理由] 卵形線の頂点<sup>7)</sup>は、図13のような作図で求める。つまり、図13のように、図6の $e_L$ が $l_1 \perp$

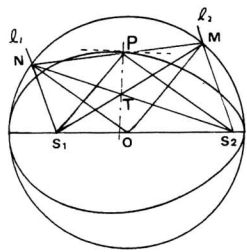


図11 卵形線の法線

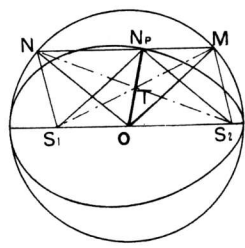


図12 短軸と法線

$S_1S_2$  のときであり、このとき、 $P$  は、頂点  $V$  となる。ここで  $e_L \neq e_R$  のとき、 $MN$  は、 $S_1S_2$  と平行でない。ゆえに、 $V \neq N_p$  となる。故に、 $N_p$  は、卵形線の頂点ではない。

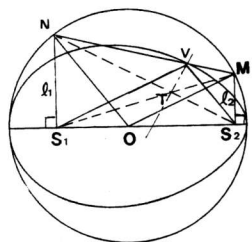


図13 卵形線の頂点

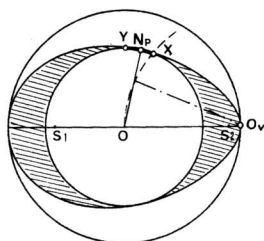


図14 同心円間の卵形線

### 2. 2. 3 短軸と長軸による卵形線のもともめ方

$O$  を中心とし、短軸の長さ  $a\sqrt{1-e_L e_R}$  を半径とする円（短軸補助円）は、2.1 節の定義および 2.2.1 節の性質より、卵形線に内接する円であり、長軸補助円は、卵形線に外接する円である。ゆえに、図 14 のように、二つの同心円の間に、卵形線は存在する。

逆に、『二つの同心円と内側の円周上の接点（近点）を与えると卵形線が定まる』この近点は、図 14 のように、短軸補助円上の太線円弧  $XY$  上にとることができる。ここで  $X$  は、短軸補助円と、円  $(O_v; O_vO)$  との交点である。

### 3. 卵形面について

#### 3. 1 定義

卵形面は、卵形線の対称軸を回転軸として描けば、簡単に得られる。しかし、それでは卵形面の性質としては、対称軸および断面の卵形線の性質としてのものしか得られない。それで、次のように、卵形面を定義し、卵形線を拡張した。

#### [卵形面の定義]

1. 空間に任意の異なる 4 点  $(A, B, C, V)$  をとる。（同一平面上にない）
2. そのうちの 3 点  $(A, B, C)$  を含む平面  $(a)$  とするを定める。
3. 三角形  $ABC$  の外接円の中心を  $O_1$  とする。またこの外接円を  $C_1$  とする。
4. 4 点  $(A, B, C, V)$  の外接球の直径が  $VU$  となるように点  $U$  をとる。
5. 点  $V, U$  における外接球の接平面と、平面  $a$  との交線をそれぞれ、 $l_v, l_u$  とする。
6.  $\triangle ABC$  の外接円の中心  $O_1$  を通り、平面  $a$  に垂直な直線上に任意の動点  $M$  をとる。
7. 動点  $M$  を中心とし、円  $C_1$  を含む動球面  $(\beta_m)$  が一つ定まる。
8. ここで、直線  $l_u$  を含み、動球面  $\beta_m$  に接する平面  $(\pi_u)$  を一つ定める。この接平面  $\pi_u$  に平行でしかも、直線  $l_v$  を含む平面  $(\pi_v)$  が一つ定まる。
9. この平面  $\pi_v$  と動球面  $\beta_m$  との交円  $(C_m)$  が一つ定まる。
10. 9 の交円  $C_m$  は、点  $M$  を動かすとき、6 から 9 を繰り返すと、空間内を動く。その軌跡は、卵形面を描く。

これを 4 点  $(A, B, C, V)$  が定める卵形面という。

ここで、図 15 のように、直線  $l_v$  に垂直で、外接円の中心  $O_1$  を通る平面  $\gamma$  を定める。この平面  $\gamma$  と、直線  $l_u$ 、外接円  $C_1$ 、直線  $l_v$  との交線を順に  $O_0, S_1, S_2, S_3$  とすると、卵形面と平面  $\gamma$  の交線は、その 4 点を等距離円  $\gamma$  の中心、3 焦点として定まる卵形線である。

また、卵形面と平面  $a$  との交線は円である。

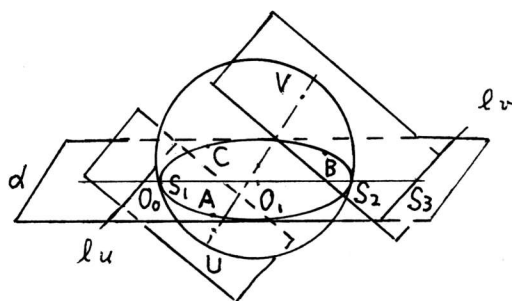


図15 卵形面定義の補助図

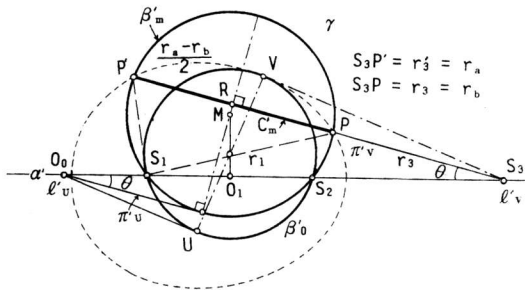


図16 卵形面補助立面図

### 3. 2 卵形面を表す式

定義の立面図, 図16において座標を次のようにとる。点 $S_1$ を原点, 平面 $\alpha$ を $xy$ 平面, 平面 $\gamma$ を $xz$ 平面とすると, また,  $S_1P=r_1, \angle PS_3S_2=\theta$  とし  $S_3P=r_3$  とすると, 焦点 $S_1, S_3$ を用いる双極座標を用いる定義式<sup>4)</sup>より

$$nr_3+kr_1=\frac{m(k^2-n^2)}{m^2-n^2}c \quad (2)$$

$$r_1^2=r_3^2+S_1S_3^2-2r_3S_1S_3\cos\theta \quad (3)$$

(2),(3)に $S_1S_3=\frac{k^2-n^2}{m^2-n^2}c$ を代入して,  $r_3$ について解く

$$r_3^2+\frac{2(mn-k^2\cos\theta)c}{m^2-n^2}r_3+\frac{(k^2-m^2)(k^2-n^2)}{(m^2-n^2)^2}c^2=0$$

$r_3$ の2次方程式の解を $r_a, r_b$ とすると

$$\left(\frac{r_a-r_b}{2}\right)^2=\left(\frac{mn-k^2\cos\theta}{m^2-n^2}\right)^2c^2-\frac{(k^2-m^2)(k^2-n^2)}{(m^2-n^2)^2}c^2$$

ゆえに, 点 $R$ を中心, 半径 $(r_a-r_b)/2$ の交円 $C_m$ 上の点 $Q(x, y, z)$ は

$$\begin{cases} x = \frac{c}{m^2-n^2} \left\{ k^2-n^2 - (k^2\cos\theta - mn)\cos\theta \right. \\ \quad \left. + \sqrt{(k^2\cos\theta - mn)^2 - (k^2-m^2)(k^2-n^2)} \cdot \cos\varphi\cos\theta \right\} \\ y = \frac{c}{m^2-n^2} \sqrt{(k^2\cos\theta - mn)^2 - (k^2-m^2)(k^2-n^2)} \sin\varphi \\ z = \frac{c}{m^2-n^2} \{ k^2\cos\theta - mn \\ \quad - \sqrt{(k^2\cos\theta - mn)^2 - (k^2-m^2)(k^2-n^2)} \cos\varphi \} \sin\theta \end{cases}$$

ここで $\varphi=0\sim 2\pi$   $\theta$ は

$$-\cos^{-1}\left(\frac{mn + \sqrt{(k^2-m^2)(k^2-n^2)}}{k^2}\right) \leq \theta \leq$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{mn + \sqrt{(k^2-m^2)(k^2-n^2)}}{k^2}\right)$$

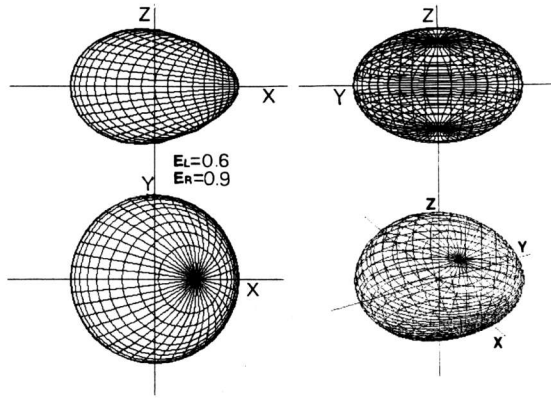


図17 卵形面のワイヤフレーム図

この点 $Q(x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta))$ が, 前節に定義した卵形面の媒介変数表示である。

### 3. 3 卵形面のワイヤフレーム図形

上式を用いて, 卵形面のワイヤフレーム図形の立面図(卵形線), 平面図(円), 側面図および見取図を図17に表す。

### 4. 結び

以上, 卵形線の短軸および卵形線の以下の性質がわかった。

1. 卵形線の中心と近点を結ぶ線分が短軸である。
1. 短軸は, 近点における卵形線の法線上にある。
1. 近点は, 焦点から等距離にある点である。
1. 近点は, 卵形線の頂点ではない。
1. 短軸の長さは,  $a\sqrt{1-e_{LE}R}$  (楕円 $a\sqrt{1-e^2}$ ) である。
1. 短軸の傾き $\alpha$ は  $\cos\alpha = (e_R - e_L)/(2\sqrt{1-e_{LE}R})$  である。
1. 卵形線は, 2つの同心円(長軸補助円と短軸補助円)の間に存在する。

また, 卵形面の定義を構成幾何学的に述べ, さらに式と図で表現できた。その性質として, 2つの対称面(円と卵形線)もつことが解った。さらに, 卵形面は, 空間4次凸曲面であることがいえる。

以上, デカルトの卵形線を構成幾何学的に考察し, その短軸を発見し, また, 空間への拡張を定義し得た。

これらの卵形線の追求が, 楕円がそうであるように, 数理物理学や天文学等に应用できることを期待した。

## 参考文献

- 1) デカルト著, 河野伊三郎訳; “デカルトの幾何学” 白林社, 1949年
- 2) ロックウッド著, 松井政太郎訳; “カーブ”; みすず書房, 1964年
- 3) 窪田忠彦著, “微分幾何学”; 岩波全書, P.201~P.234, 1967年
- 4) 蛭子井博孝; “デカルトの卵形線の二・三の性質”; 図学研究, 12, P.35~P.49, 1973年
- 5) 蛭子井博孝; “デカルトの卵形線に関する考察(計算機援用作図による比較検討)”; “図学研究”, 37, P.9~14, 1985年
- 6) 蛭子井博孝; “デカルトの卵形線に関する考察(その幾何学的構図)”; 図学研究, 49, P.9~14, 1990年
- 7) 蛭子井博孝; “デカルトの卵形線の曲率円”; 図学研究, 19, P.7~11, 1976年
- 8) 栗田 稔, “いろいろな曲線”; 共立出版, P.91, 1969年

## 付 記

小論4) に述べているように, 本文中(2)式について, 卵形線が,  $mr_1 + nr_2 = kc$  で与えられるとき

$$S_1 S_2 = c, S_1 S_3 = \frac{k^2 - n^2}{m^2 - n^2} c, S_2 S_3 = \frac{k^2 - m^2}{m^2 - n^2} c$$

とする。その一直線上の3点  $S_1, S_2, S_3$  を3焦点(極)として, その2つの点

$S_1, S_3$  を極とする双極座標の定義式は,

$$nr_3 + kr_1 = m \frac{k^2 - n^2}{m^2 - n^2} c$$

$S_2, S_3$  を極とする双極座標の定義式は,

$$-kr_2 + mr_3 = n \frac{k^2 - m^2}{m^2 - n^2} c \quad \text{と表される。}$$

つまり,  $r_1, r_2$  あるいは,  $r_2, r_3$  あるいは  $r_3, r_1$  のどれでも同じ卵形線を表す。

## Minor Axis of the Oval of Descartes and Ovaloid Ebisui, HIROTAKA

Descartes' oval is defined as  $mr_1 + nr_2 = kc$  by using bipolar coordinates. Where, if  $m=n$ , it is ellipse. According to this definition and a number of the properties, it can be said that the Descartes' oval is essential extension of ellipse.

This time, the minor axis of oval that has the similar properties to those of the minor axis of ellipse is found. This minor axis is the segment connecting the middle point  $O$  of the major axis (the axis of symmetry) of oval and the point  $N_p$  on the oval, which is at the shortest distance from the point  $O$ . The length of this minor axis is expressed by  $a\sqrt{1 - e_L e_R}$ , where  $a$  is a half of the length of the major axis, and  $e_L$  and  $e_R$  are left and right eccentricities, respectively. As for this minor axis, its proof and a number of the properties are discussed.

Next, the method of defining ovaloid which is convex, closed curved surface in space by extending the oval on plane is found, therefore, it is reported. This ovaloid has, as the contours of the orthographic projection from three directions, circle, Descartes' oval and a fourth order curve like ellipse. Further, the parametric expression of this ovaloid is derived. In this way, the new properties of oval are able to be added, therefore, it is reported.

## n次元立体等分割問題とその一般化の解

(n-Dim rectangle divided equally, its extension and the solution)

蛭子井博孝 (Hiroataka Ebisui)

卵形線研究センター (Oval Research Center)

740-0012 岩国市元町4丁目12-10

We know the rectangle that shape has golden section, or has  $1:\sqrt{2}$  ratio.

10 years ago, we extended the 2-dimensional rectangle which edges have golden section ( $1:(1+\sqrt{5})/2$ ) to n-dimensional rectangle which has n-dim golden section<sup>[1]</sup>.

Those n edges satisfied the equation  $1:x_1:x_2:\dots:x_{n-1} = x_1-1:x_2-1:\dots:x_{n-1}-1:1$

For example, n=4, then 4 edges have ratio 1:1.519:1.788:1.928 approximately.

Next problem is to solve the question that is to extend the rectangle whose edges are  $1:\sqrt{2}$  to n-dimensional rectangle which has the same context.

This n-dim rectangle satisfy right equation

$$1:x_1:x_2:\dots:x_{n-1} = \frac{x_1}{2}:\frac{x_2}{2}:\dots:\frac{x_{n-1}}{2}:1$$

This equation means that we fix one length = 1, and other edges are divided by 2 respectively.

Then two shape of n-dim rectangles are similar. And the solution is here.

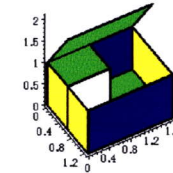
The length of the k th of n edges ( $x_k$ ) is  $2^{\binom{k}{n}}$  ( $k=0\dots n-1$ ).

The similarity ratio is  $1/2^{(n-1)/n}$ .

We can generalize above equation. The expression is following.

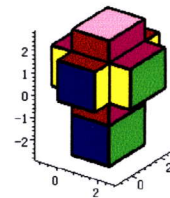
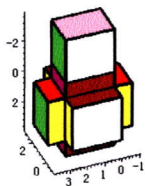
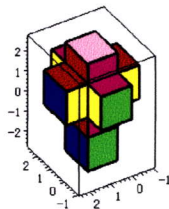
$$1:x_1:x_2:\dots:x_{n-1} = \frac{x_1}{a_1}:\frac{x_2}{a_2}:\dots:\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}:1$$

And, the solution is  $x_k = \prod_{j=1}^k \left[ \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} a_i^{\frac{-1}{n}} \right\} \times a_j \right]$  ( $k=1\dots n-1$ )



( $a_1 = 2, a_2 = 2$ )

We show the figure of 4-dim rectangle ( $a_1=2, a_2=2, a_3=2$ ), ( $a_1=4, a_2=4, a_3=4$ ), ( $a_1=4, a_2=3, a_3=2$ ) using expanded expression of 4-dim rectangle.



(2, 2, 2)

(4, 4, 4)

(4, 3, 2)

Reference [1] Hirotak Ebisui; "A Property of the n-dimensional Rectangle and the Hyper-rectangle with n-dimensional Golden Section"; Hyper Space, J I of HSS, vol2, no3,1993

```

> # TWIN TWIN TWIN TKG-5-6 BY H.Ebisui:
> restart :
> for n from 1 to 10000 do TT||n := 0 :od:
> for n from 1 to 10000 do WT||n := 0 : TRT||n := 0 :od:for n from 1 to 200 do QT||n
:= 0 : Ft||n := 0 :od:
> c := 0 :for m from 1 to 100000 do if ithprime(m) + 2 = ithprime(m + 1) and c ≤ 9999
then c := c + 1 : CI := c : TT||c := m :fi:od:
> print(CI); d := 0 :for h from 1 to CI do if (TT||h) + 2 = TT||(h + 1) then d := d + 1 :
WT||d := TT||h : DI := d :fi:od:
10000 (1)
> print(DI); e := 0 :for h from 1 to DI do if (WT||h) + 2 = WT||(h + 1) then e := e + 1 :
TRT||e := (WT||h) : EI := e :fi:od:
1075 (2)
> print(EI); f := 0 :for h from 1 to EI do if (TRT||h) + 2 = TRT||(h + 1) then f := f + 1 :
QT||f := (TRT||h) : FI := f :fi:od:
124 (3)
> print(FI); g := 0 :for h from 1 to FI do if (QT||h) + 2 = QT||(h + 1) then g := g + 1 :
Ft||g := (QT||h) : GI := g :fi:od:
12 (4)
> print(GI);
1 (5)
> c := 1 : for n from 1 to 100 do if n ≠ TT||c then print(Pno = n, P = ithprime(n)) :fi: if n
= TT||c then print(Tno = c, Pno = n, Twin, [ithprime(n), ithprime(n + 1)]) : c := c
+ 1 : fi:od:
Pno = 1, P = 2
Tno = 1, Pno = 2, Twin, [3, 5]
Tno = 2, Pno = 3, Twin, [5, 7]
Pno = 4, P = 7
Tno = 3, Pno = 5, Twin, [11, 13]
Pno = 6, P = 13
Tno = 4, Pno = 7, Twin, [17, 19]
Pno = 8, P = 19
Pno = 9, P = 23
Tno = 5, Pno = 10, Twin, [29, 31]
Pno = 11, P = 31
Pno = 12, P = 37
Tno = 6, Pno = 13, Twin, [41, 43]
Pno = 14, P = 43
Pno = 15, P = 47
Pno = 16, P = 53
Tno = 7, Pno = 17, Twin, [59, 61]
Pno = 18, P = 61
Pno = 19, P = 67
Tno = 8, Pno = 20, Twin, [71, 73]
Pno = 21, P = 73
Pno = 22, P = 79
Pno = 23, P = 83
Pno = 24, P = 89

```

$Pno = 25, P = 97$   
 $Tno = 9, Pno = 26, Twin, [101, 103]$   
 $Pno = 27, P = 103$   
 $Tno = 10, Pno = 28, Twin, [107, 109]$   
 $Pno = 29, P = 109$   
 $Pno = 30, P = 113$   
 $Pno = 31, P = 127$   
 $Pno = 32, P = 131$   
 $Tno = 11, Pno = 33, Twin, [137, 139]$   
 $Pno = 34, P = 139$   
 $Tno = 12, Pno = 35, Twin, [149, 151]$   
 $Pno = 36, P = 151$   
 $Pno = 37, P = 157$   
 $Pno = 38, P = 163$   
 $Pno = 39, P = 167$   
 $Pno = 40, P = 173$   
 $Tno = 13, Pno = 41, Twin, [179, 181]$   
 $Pno = 42, P = 181$   
 $Tno = 14, Pno = 43, Twin, [191, 193]$   
 $Pno = 44, P = 193$   
 $Tno = 15, Pno = 45, Twin, [197, 199]$   
 $Pno = 46, P = 199$   
 $Pno = 47, P = 211$   
 $Pno = 48, P = 223$   
 $Tno = 16, Pno = 49, Twin, [227, 229]$   
 $Pno = 50, P = 229$   
 $Pno = 51, P = 233$   
 $Tno = 17, Pno = 52, Twin, [239, 241]$   
 $Pno = 53, P = 241$   
 $Pno = 54, P = 251$   
 $Pno = 55, P = 257$   
 $Pno = 56, P = 263$   
 $Tno = 18, Pno = 57, Twin, [269, 271]$   
 $Pno = 58, P = 271$   
 $Pno = 59, P = 277$   
 $Tno = 19, Pno = 60, Twin, [281, 283]$   
 $Pno = 61, P = 283$   
 $Pno = 62, P = 293$   
 $Pno = 63, P = 307$   
 $Tno = 20, Pno = 64, Twin, [311, 313]$   
 $Pno = 65, P = 313$   
 $Pno = 66, P = 317$   
 $Pno = 67, P = 331$   
 $Pno = 68, P = 337$   
 $Tno = 21, Pno = 69, Twin, [347, 349]$   
 $Pno = 70, P = 349$

*Pno* = 71, *P* = 353  
*Pno* = 72, *P* = 359  
*Pno* = 73, *P* = 367  
*Pno* = 74, *P* = 373  
*Pno* = 75, *P* = 379  
*Pno* = 76, *P* = 383  
*Pno* = 77, *P* = 389  
*Pno* = 78, *P* = 397  
*Pno* = 79, *P* = 401  
*Pno* = 80, *P* = 409  
*Tno* = 22, *Pno* = 81, *Twin*, [419, 421 ]  
*Pno* = 82, *P* = 421  
*Tno* = 23, *Pno* = 83, *Twin*, [431, 433 ]  
*Pno* = 84, *P* = 433  
*Pno* = 85, *P* = 439  
*Pno* = 86, *P* = 443  
*Pno* = 87, *P* = 449  
*Pno* = 88, *P* = 457  
*Tno* = 24, *Pno* = 89, *Twin*, [461, 463 ]  
*Pno* = 90, *P* = 463  
*Pno* = 91, *P* = 467  
*Pno* = 92, *P* = 479  
*Pno* = 93, *P* = 487  
*Pno* = 94, *P* = 491  
*Pno* = 95, *P* = 499  
*Pno* = 96, *P* = 503  
*Pno* = 97, *P* = 509  
*Tno* = 25, *Pno* = 98, *Twin*, [521, 523 ]  
*Pno* = 99, *P* = 523  
*Pno* = 100, *P* = 541

(6)

> for *n* from 1 to 100 do *tn* := *TT* || *n* : *print*(*Tno* = *n*, [*ithprime*(*tn*), *ithprime*(*tn* + 1) ]) :od:

*Tno* = 1, [3, 5]  
*Tno* = 2, [5, 7]  
*Tno* = 3, [11, 13]  
*Tno* = 4, [17, 19]  
*Tno* = 5, [29, 31]  
*Tno* = 6, [41, 43]  
*Tno* = 7, [59, 61]  
*Tno* = 8, [71, 73]  
*Tno* = 9, [101, 103]  
*Tno* = 10, [107, 109]  
*Tno* = 11, [137, 139]  
*Tno* = 12, [149, 151]  
*Tno* = 13, [179, 181]  
*Tno* = 14, [191, 193]  
*Tno* = 15, [197, 199]



$Tno = 16, [227, 229]$   
 $Tno = 17, [239, 241]$   
 $Tno = 18, [269, 271]$   
 $Tno = 19, [281, 283]$   
 $Tno = 20, [311, 313]$   
 $Tno = 21, [347, 349]$   
 $Tno = 22, [419, 421]$   
 $Tno = 23, [431, 433]$   
 $Tno = 24, [461, 463]$   
 $Tno = 25, [521, 523]$   
 $Tno = 26, [569, 571]$   
 $Tno = 27, [599, 601]$   
 $Tno = 28, [617, 619]$   
 $Tno = 29, [641, 643]$   
 $Tno = 30, [659, 661]$   
 $Tno = 31, [809, 811]$   
 $Tno = 32, [821, 823]$   
 $Tno = 33, [827, 829]$   
 $Tno = 34, [857, 859]$   
 $Tno = 35, [881, 883]$   
 $Tno = 36, [1019, 1021]$   
 $Tno = 37, [1031, 1033]$   
 $Tno = 38, [1049, 1051]$   
 $Tno = 39, [1061, 1063]$   
 $Tno = 40, [1091, 1093]$   
 $Tno = 41, [1151, 1153]$   
 $Tno = 42, [1229, 1231]$   
 $Tno = 43, [1277, 1279]$   
 $Tno = 44, [1289, 1291]$   
 $Tno = 45, [1301, 1303]$   
 $Tno = 46, [1319, 1321]$   
 $Tno = 47, [1427, 1429]$   
 $Tno = 48, [1451, 1453]$   
 $Tno = 49, [1481, 1483]$   
 $Tno = 50, [1487, 1489]$   
 $Tno = 51, [1607, 1609]$   
 $Tno = 52, [1619, 1621]$   
 $Tno = 53, [1667, 1669]$   
 $Tno = 54, [1697, 1699]$   
 $Tno = 55, [1721, 1723]$   
 $Tno = 56, [1787, 1789]$   
 $Tno = 57, [1871, 1873]$   
 $Tno = 58, [1877, 1879]$   
 $Tno = 59, [1931, 1933]$   
 $Tno = 60, [1949, 1951]$   
 $Tno = 61, [1997, 1999]$

*Tno* = 62, [2027, 2029]  
*Tno* = 63, [2081, 2083]  
*Tno* = 64, [2087, 2089]  
*Tno* = 65, [2111, 2113]  
*Tno* = 66, [2129, 2131]  
*Tno* = 67, [2141, 2143]  
*Tno* = 68, [2237, 2239]  
*Tno* = 69, [2267, 2269]  
*Tno* = 70, [2309, 2311]  
*Tno* = 71, [2339, 2341]  
*Tno* = 72, [2381, 2383]  
*Tno* = 73, [2549, 2551]  
*Tno* = 74, [2591, 2593]  
*Tno* = 75, [2657, 2659]  
*Tno* = 76, [2687, 2689]  
*Tno* = 77, [2711, 2713]  
*Tno* = 78, [2729, 2731]  
*Tno* = 79, [2789, 2791]  
*Tno* = 80, [2801, 2803]  
*Tno* = 81, [2969, 2971]  
*Tno* = 82, [2999, 3001]  
*Tno* = 83, [3119, 3121]  
*Tno* = 84, [3167, 3169]  
*Tno* = 85, [3251, 3253]  
*Tno* = 86, [3257, 3259]  
*Tno* = 87, [3299, 3301]  
*Tno* = 88, [3329, 3331]  
*Tno* = 89, [3359, 3361]  
*Tno* = 90, [3371, 3373]  
*Tno* = 91, [3389, 3391]  
*Tno* = 92, [3461, 3463]  
*Tno* = 93, [3467, 3469]  
*Tno* = 94, [3527, 3529]  
*Tno* = 95, [3539, 3541]  
*Tno* = 96, [3557, 3559]  
*Tno* = 97, [3581, 3583]  
*Tno* = 98, [3671, 3673]  
*Tno* = 99, [3767, 3769]  
*Tno* = 100, [3821, 3823]

(7)

> **for** *e* **from** 1 **to** 100 **do** *wn* := *WT*||*e* : *print*(*Wno* = *e*, [[*ithprime*(*wn*), *ithprime*(*wn* + 1)],  
 [*ithprime*(*wn* + 2), *ithprime*(*wn* + 3)]]):**od**:

*Wno* = 1, [[5, 7], [11, 13]]

*Wno* = 2, [[11, 13], [17, 19]]

*Wno* = 3, [[101, 103], [107, 109]]

*Wno* = 4, [[137, 139], [149, 151]]

*Wno* = 5, [[179, 181], [191, 193]]

$Wno = 6, [[191, 193], [197, 199]]$   
 $Wno = 7, [[419, 421], [431, 433]]$   
 $Wno = 8, [[809, 811], [821, 823]]$   
 $Wno = 9, [[821, 823], [827, 829]]$   
 $Wno = 10, [[1019, 1021], [1031, 1033]]$   
 $Wno = 11, [[1049, 1051], [1061, 1063]]$   
 $Wno = 12, [[1481, 1483], [1487, 1489]]$   
 $Wno = 13, [[1871, 1873], [1877, 1879]]$   
 $Wno = 14, [[1931, 1933], [1949, 1951]]$   
 $Wno = 15, [[2081, 2083], [2087, 2089]]$   
 $Wno = 16, [[2111, 2113], [2129, 2131]]$   
 $Wno = 17, [[2969, 2971], [2999, 3001]]$   
 $Wno = 18, [[3251, 3253], [3257, 3259]]$   
 $Wno = 19, [[3359, 3361], [3371, 3373]]$   
 $Wno = 20, [[3371, 3373], [3389, 3391]]$   
 $Wno = 21, [[3461, 3463], [3467, 3469]]$   
 $Wno = 22, [[4217, 4219], [4229, 4231]]$   
 $Wno = 23, [[4229, 4231], [4241, 4243]]$   
 $Wno = 24, [[4259, 4261], [4271, 4273]]$   
 $Wno = 25, [[5009, 5011], [5021, 5023]]$   
 $Wno = 26, [[5651, 5653], [5657, 5659]]$   
 $Wno = 27, [[5867, 5869], [5879, 5881]]$   
 $Wno = 28, [[6689, 6691], [6701, 6703]]$   
 $Wno = 29, [[6761, 6763], [6779, 6781]]$   
 $Wno = 30, [[6779, 6781], [6791, 6793]]$   
 $Wno = 31, [[6947, 6949], [6959, 6961]]$   
 $Wno = 32, [[7331, 7333], [7349, 7351]]$   
 $Wno = 33, [[7547, 7549], [7559, 7561]]$   
 $Wno = 34, [[8219, 8221], [8231, 8233]]$   
 $Wno = 35, [[8969, 8971], [8999, 9001]]$   
 $Wno = 36, [[9419, 9421], [9431, 9433]]$   
 $Wno = 37, [[9431, 9433], [9437, 9439]]$   
 $Wno = 38, [[9437, 9439], [9461, 9463]]$   
 $Wno = 39, [[10007, 10009], [10037, 10039]]$   
 $Wno = 40, [[11057, 11059], [11069, 11071]]$   
 $Wno = 41, [[11159, 11161], [11171, 11173]]$   
 $Wno = 42, [[11699, 11701], [11717, 11719]]$   
 $Wno = 43, [[12239, 12241], [12251, 12253]]$   
 $Wno = 44, [[13001, 13003], [13007, 13009]]$   
 $Wno = 45, [[13709, 13711], [13721, 13723]]$   
 $Wno = 46, [[13997, 13999], [14009, 14011]]$   
 $Wno = 47, [[14561, 14563], [14591, 14593]]$   
 $Wno = 48, [[15641, 15643], [15647, 15649]]$   
 $Wno = 49, [[15731, 15733], [15737, 15739]]$   
 $Wno = 50, [[16061, 16063], [16067, 16069]]$   
 $Wno = 51, [[16631, 16633], [16649, 16651]]$

$W_{no} = 52$ , [[17579, 17581], [17597, 17599]]  
 $W_{no} = 53$ , [[17909, 17911], [17921, 17923]]  
 $W_{no} = 54$ , [[18041, 18043], [18047, 18049]]  
 $W_{no} = 55$ , [[18047, 18049], [18059, 18061]]  
 $W_{no} = 56$ , [[18521, 18523], [18539, 18541]]  
 $W_{no} = 57$ , [[18911, 18913], [18917, 18919]]  
 $W_{no} = 58$ , [[19421, 19423], [19427, 19429]]  
 $W_{no} = 59$ , [[20441, 20443], [20477, 20479]]  
 $W_{no} = 60$ , [[21011, 21013], [21017, 21019]]  
 $W_{no} = 61$ , [[21587, 21589], [21599, 21601]]  
 $W_{no} = 62$ , [[21599, 21601], [21611, 21613]]  
 $W_{no} = 63$ , [[22091, 22093], [22109, 22111]]  
 $W_{no} = 64$ , [[22271, 22273], [22277, 22279]]  
 $W_{no} = 65$ , [[22619, 22621], [22637, 22639]]  
 $W_{no} = 66$ , [[23027, 23029], [23039, 23041]]  
 $W_{no} = 67$ , [[25301, 25303], [25307, 25309]]  
 $W_{no} = 68$ , [[26249, 26251], [26261, 26263]]  
 $W_{no} = 69$ , [[26699, 26701], [26711, 26713]]  
 $W_{no} = 70$ , [[26861, 26863], [26879, 26881]]  
 $W_{no} = 71$ , [[26879, 26881], [26891, 26893]]  
 $W_{no} = 72$ , [[27527, 27529], [27539, 27541]]  
 $W_{no} = 73$ , [[27917, 27919], [27941, 27943]]  
 $W_{no} = 74$ , [[28097, 28099], [28109, 28111]]  
 $W_{no} = 75$ , [[29387, 29389], [29399, 29401]]  
 $W_{no} = 76$ , [[30467, 30469], [30491, 30493]]  
 $W_{no} = 77$ , [[30839, 30841], [30851, 30853]]  
 $W_{no} = 78$ , [[31721, 31723], [31727, 31729]]  
 $W_{no} = 79$ , [[32117, 32119], [32141, 32143]]  
 $W_{no} = 80$ , [[32801, 32803], [32831, 32833]]  
 $W_{no} = 81$ , [[33587, 33589], [33599, 33601]]  
 $W_{no} = 82$ , [[33809, 33811], [33827, 33829]]  
 $W_{no} = 83$ , [[34499, 34501], [34511, 34513]]  
 $W_{no} = 84$ , [[34841, 34843], [34847, 34849]]  
 $W_{no} = 85$ , [[38651, 38653], [38669, 38671]]  
 $W_{no} = 86$ , [[39827, 39829], [39839, 39841]]  
 $W_{no} = 87$ , [[40127, 40129], [40151, 40153]]  
 $W_{no} = 88$ , [[43781, 43783], [43787, 43789]]  
 $W_{no} = 89$ , [[46817, 46819], [46829, 46831]]  
 $W_{no} = 90$ , [[47699, 47701], [47711, 47713]]  
 $W_{no} = 91$ , [[47741, 47743], [47777, 47779]]  
 $W_{no} = 92$ , [[48677, 48679], [48731, 48733]]  
 $W_{no} = 93$ , [[48857, 48859], [48869, 48871]]  
 $W_{no} = 94$ , [[49367, 49369], [49391, 49393]]  
 $W_{no} = 95$ , [[49391, 49393], [49409, 49411]]  
 $W_{no} = 96$ , [[51341, 51343], [51347, 51349]]  
 $W_{no} = 97$ , [[53267, 53269], [53279, 53281]]



*Wno* = 98, [[55331, 55333], [55337, 55339]]  
*Wno* = 99, [[55619, 55621], [55631, 55633]]  
*Wno* = 100, [[56207, 56209], [56237, 56239]]

(8)

> **for** *e* **from** 1 **to** 100 **do** *ttn* := *TRT*||*e* : *print*(*TRno* = *e*, [[*ithprime*(*ttn*), *ithprime*(*ttn* + 1)],  
[*ithprime*(*ttn* + 2), *ithprime*(*ttn* + 3)], [ *ithprime*(*ttn* + 4), *ithprime*(*ttn* + 5) ]]) :**od**:  
*TRno* = 1, [[5, 7], [11, 13], [17, 19]]  
*TRno* = 2, [[179, 181], [191, 193], [197, 199]]  
*TRno* = 3, [[809, 811], [821, 823], [827, 829]]  
*TRno* = 4, [[3359, 3361], [3371, 3373], [3389, 3391]]  
*TRno* = 5, [[4217, 4219], [4229, 4231], [4241, 4243]]  
*TRno* = 6, [[6761, 6763], [6779, 6781], [6791, 6793]]  
*TRno* = 7, [[9419, 9421], [9431, 9433], [9437, 9439]]  
*TRno* = 8, [[9431, 9433], [9437, 9439], [9461, 9463]]  
*TRno* = 9, [[18041, 18043], [18047, 18049], [18059, 18061]]  
*TRno* = 10, [[21587, 21589], [21599, 21601], [21611, 21613]]  
*TRno* = 11, [[26861, 26863], [26879, 26881], [26891, 26893]]  
*TRno* = 12, [[49367, 49369], [49391, 49393], [49409, 49411]]  
*TRno* = 13, [[62969, 62971], [62981, 62983], [62987, 62989]]  
*TRno* = 14, [[62981, 62983], [62987, 62989], [63029, 63031]]  
*TRno* = 15, [[67187, 67189], [67211, 67213], [67217, 67219]]  
*TRno* = 16, [[72221, 72223], [72227, 72229], [72251, 72253]]  
*TRno* = 17, [[72227, 72229], [72251, 72253], [72269, 72271]]  
*TRno* = 18, [[80447, 80449], [80471, 80473], [80489, 80491]]  
*TRno* = 19, [[82721, 82723], [82727, 82729], [82757, 82759]]  
*TRno* = 20, [[91127, 91129], [91139, 91141], [91151, 91153]]  
*TRno* = 21, [[97841, 97843], [97847, 97849], [97859, 97861]]  
*TRno* = 22, [[98897, 98899], [98909, 98911], [98927, 98929]]  
*TRno* = 23, [[103967, 103969], [103979, 103981], [103991, 103993]]  
*TRno* = 24, [[109829, 109831], [109841, 109843], [109847, 109849]]  
*TRno* = 25, [[122597, 122599], [122609, 122611], [122651, 122653]]  
*TRno* = 26, [[154157, 154159], [154181, 154183], [154211, 154213]]  
*TRno* = 27, [[178037, 178039], [178067, 178069], [178091, 178093]]  
*TRno* = 28, [[203321, 203323], [203339, 203341], [203351, 203353]]  
*TRno* = 29, [[208931, 208933], [208961, 208963], [208991, 208993]]  
*TRno* = 30, [[225749, 225751], [225767, 225769], [225779, 225781]]  
*TRno* = 31, [[227609, 227611], [227627, 227629], [227651, 227653]]  
*TRno* = 32, [[236867, 236869], [236879, 236881], [236891, 236893]]  
*TRno* = 33, [[243671, 243673], [243701, 243703], [243707, 243709]]  
*TRno* = 34, [[251201, 251203], [251219, 251221], [251231, 251233]]  
*TRno* = 35, [[266447, 266449], [266477, 266479], [266489, 266491]]  
*TRno* = 36, [[285611, 285613], [285629, 285631], [285641, 285643]]  
*TRno* = 37, [[289109, 289111], [289127, 289129], [289139, 289141]]  
*TRno* = 38, [[295871, 295873], [295877, 295879], [295901, 295903]]  
*TRno* = 39, [[317729, 317731], [317741, 317743], [317771, 317773]]  
*TRno* = 40, [[330287, 330289], [330311, 330313], [330329, 330331]]  
*TRno* = 41, [[342047, 342049], [342059, 342061], [342071, 342073]]

*TRno* = 42, [[358877, 358879], [358901, 358903], [358907, 358909]]  
*TRno* = 43, [[375251, 375253], [375257, 375259], [375281, 375283]]  
*TRno* = 44, [[392261, 392263], [392267, 392269], [392279, 392281]]  
*TRno* = 45, [[392267, 392269], [392279, 392281], [392297, 392299]]  
*TRno* = 46, [[397517, 397519], [397541, 397543], [397547, 397549]]  
*TRno* = 47, [[402329, 402331], [402341, 402343], [402359, 402361]]  
*TRno* = 48, [[405047, 405049], [405071, 405073], [405089, 405091]]  
*TRno* = 49, [[420809, 420811], [420851, 420853], [420857, 420859]]  
*TRno* = 50, [[422087, 422089], [422099, 422101], [422111, 422113]]  
*TRno* = 51, [[440549, 440551], [440567, 440569], [440579, 440581]]  
*TRno* = 52, [[444341, 444343], [444347, 444349], [444401, 444403]]  
*TRno* = 53, [[452519, 452521], [452531, 452533], [452537, 452539]]  
*TRno* = 54, [[489911, 489913], [489941, 489943], [489959, 489961]]  
*TRno* = 55, [[495569, 495571], [495587, 495589], [495611, 495613]]  
*TRno* = 56, [[495587, 495589], [495611, 495613], [495617, 495619]]  
*TRno* = 57, [[524507, 524509], [524519, 524521], [524591, 524593]]  
*TRno* = 58, [[524969, 524971], [524981, 524983], [524999, 525001]]  
*TRno* = 59, [[560477, 560479], [560489, 560491], [560501, 560503]]  
*TRno* = 60, [[563411, 563413], [563417, 563419], [563447, 563449]]  
*TRno* = 61, [[565889, 565891], [565907, 565909], [565919, 565921]]  
*TRno* = 62, [[570497, 570499], [570509, 570511], [570527, 570529]]  
*TRno* = 63, [[595139, 595141], [595157, 595159], [595181, 595183]]  
*TRno* = 64, [[622187, 622189], [622241, 622243], [622247, 622249]]  
*TRno* = 65, [[629567, 629569], [629591, 629593], [629609, 629611]]  
*TRno* = 66, [[632297, 632299], [632321, 632323], [632327, 632329]]  
*TRno* = 67, [[636059, 636061], [636071, 636073], [636107, 636109]]  
*TRno* = 68, [[640229, 640231], [640247, 640249], [640259, 640261]]  
*TRno* = 69, [[641519, 641521], [641549, 641551], [641579, 641581]]  
*TRno* = 70, [[651179, 651181], [651191, 651193], [651221, 651223]]  
*TRno* = 71, [[663569, 663571], [663581, 663583], [663587, 663589]]  
*TRno* = 72, [[663581, 663583], [663587, 663589], [663599, 663601]]  
*TRno* = 73, [[670037, 670039], [670049, 670051], [670097, 670099]]  
*TRno* = 74, [[677459, 677461], [677471, 677473], [677531, 677533]]  
*TRno* = 75, [[686009, 686011], [686027, 686029], [686039, 686041]]  
*TRno* = 76, [[690839, 690841], [690869, 690871], [690887, 690889]]  
*TRno* = 77, [[704549, 704551], [704567, 704569], [704579, 704581]]  
*TRno* = 78, [[746507, 746509], [746531, 746533], [746561, 746563]]  
*TRno* = 79, [[753437, 753439], [753461, 753463], [753497, 753499]]  
*TRno* = 80, [[758711, 758713], [758729, 758731], [758741, 758743]]  
*TRno* = 81, [[768167, 768169], [768191, 768193], [768197, 768199]]  
*TRno* = 82, [[773609, 773611], [773657, 773659], [773681, 773683]]  
*TRno* = 83, [[773951, 773953], [773987, 773989], [773999, 774001]]  
*TRno* = 84, [[777389, 777391], [777419, 777421], [777431, 777433]]  
*TRno* = 85, [[795761, 795763], [795791, 795793], [795797, 795799]]  
*TRno* = 86, [[797567, 797569], [797579, 797581], [797591, 797593]]  
*TRno* = 87, [[830309, 830311], [830327, 830329], [830339, 830341]]

$TRno = 88, [[831371, 831373], [831407, 831409], [831431, 831433]]$   
 $TRno = 89, [[842321, 842323], [842339, 842341], [842351, 842353]]$   
 $TRno = 90, [[854897, 854899], [854921, 854923], [854927, 854929]]$   
 $TRno = 91, [[873569, 873571], [873617, 873619], [873641, 873643]]$   
 $TRno = 92, [[875261, 875263], [875267, 875269], [875297, 875299]]$   
 $TRno = 93, [[875981, 875983], [876011, 876013], [876017, 876019]]$   
 $TRno = 94, [[907367, 907369], [907391, 907393], [907397, 907399]]$   
 $TRno = 95, [[909287, 909289], [909299, 909301], [909317, 909319]]$   
 $TRno = 96, [[909299, 909301], [909317, 909319], [909329, 909331]]$   
 $TRno = 97, [[909317, 909319], [909329, 909331], [909341, 909343]]$   
 $TRno = 98, [[946079, 946081], [946091, 946093], [946109, 946111]]$   
 $TRno = 99, [[983429, 983431], [983441, 983443], [983447, 983449]]$   
 $TRno = 100, [[994307, 994309], [994319, 994321], [994337, 994339]]$

(9)

**> for e from 1 to 12 do**  $qn := QT || e : print(QUno = e, [[ithprime(qn), ithprime(qn + 1)],$   
 $[ithprime(qn + 2), ithprime(qn + 3)], [ithprime(qn + 4), ithprime(qn + 5)],$   
 $[ithprime(qn + 6), ithprime(qn + 7) ]])$  :**od**:

$QUno = 1, [[9419, 9421], [9431, 9433], [9437, 9439], [9461, 9463]]$

$QUno = 2, [[62969, 62971], [62981, 62983], [62987, 62989], [63029, 63031]]$

$QUno = 3, [[72221, 72223], [72227, 72229], [72251, 72253], [72269, 72271]]$

$QUno = 4, [[392261, 392263], [392267, 392269], [392279, 392281], [392297, 392299]]$

$QUno = 5, [[495569, 495571], [495587, 495589], [495611, 495613], [495617, 495619]]$

$QUno = 6, [[663569, 663571], [663581, 663583], [663587, 663589], [663599, 663601]]$

$QUno = 7, [[909287, 909289], [909299, 909301], [909317, 909319], [909329, 909331]]$

$QUno = 8, [[909299, 909301], [909317, 909319], [909329, 909331], [909341, 909343]]$

$QUno = 9, [[1006301, 1006303], [1006307, 1006309], [1006331, 1006333], [1006337,$   
 $1006339]]$

$QUno = 10, [[1138367, 1138369], [1138391, 1138393], [1138409, 1138411], [1138427,$   
 $1138429]]$

$QUno = 11, [[1159187, 1159189], [1159199, 1159201], [1159229, 1159231], [1159241,$   
 $1159243]]$

$QUno = 12, [[1173539, 1173541], [1173551, 1173553], [1173581, 1173583], [1173587,$   
 $1173589]]$

(10)

**> for e from 1 to 1 do**  $fn := Ft || e : print(Ftno = e, [seq([ithprime(fn + 2 \cdot (j - 1)),$   
 $ithprime(fn + 2 \cdot (j - 1) + 1)], j = 1 .. 5 )])$  :**od**:

$Ftno = 1, [[909287, 909289], [909299, 909301], [909317, 909319], [909329, 909331],$   
 $[909341, 909343]]$

(11)

>

## 3円の定理とその応用定理

3-CIRCLES THEOREM and It's APPRICATION THEOREM

蛭子井 博孝 Hirota EBISUI

このノートは、射影幾何学的性質とアフィン幾何学的性質を含んだ共点定理についてである。

### 【3円の定理】

平面上に任意の半径の円を3つとる。簡単のため、互いに他の外部にあるとする。

次に、図のように3円の外部に2円の接線を3本（実線）引き、三角形を作る。

同様に3点の内部に接線を3本（破線）引き、三角形を作る。

対応する頂点を結ぶ三直線は、1点で交わる。共点である。

### 【証明】

3円の相似中心は、同一直線①上にある。なぜなら、それは、3円を球にした3次元空間での3球に接する2枚の接面の交線と一致するからである。

さて、この直線を基線に証明図のように、デザルグの双対定理を当てはめる。

証明図におけるように、双対定理は、1点鎖線上に3点を取り、その点を通る2本の実線と破線を引き、実線でできる3交点と破線でできる3交点の対応する点（三角形の頂点）を結ぶと3直線は共点となる。この一般の位置の図形が、直線①と3円の接線に当てはまる。故に証明終わり。

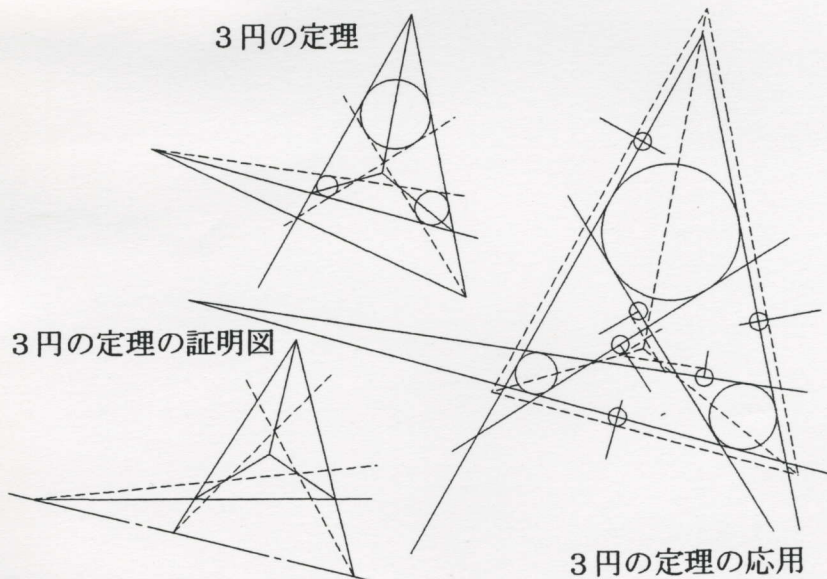
### 【3円の応用定理】

今、3円の外側の接線3角形があり、その外側に、辺に等間隔で平行線を図のように引く。

同様に、3円の内側の接線3角形の内部に、各辺に平行に外側と同様の間隔で平行線を引く。図において破線の部分。ここで2つの破線の3角形の対応する頂点を結ぶと、3直線は1点で交わる。つまり、共点である。

### 【証明】

3円の定理において、すべての円の半径が同じ大きさだけ増えていると考えて、同様の証明で成立する。



なお、空間において4球の定理が同様に成立する。



発見者蛭子井博孝解説

ヘキサゴンの定理

幾何数学妙理

① はじめに6点在りき

② 次に対点を結ぶと小3角形ができています

③ 元の点と小三角形の頂点を結び延長し2対交点3組作る

④ 3,5元の点、小大三角形の辺の同じ側の点を使う

④ 2対交点を結び延長し大三角形を作る

⑤ 元の6点と大三角頂点を結び延長交点を作る

⑥ 3,5元の点、小大三角形の辺の同じ側の点を使う

大結論 中央赤線3本共点でない

高級CAD図面のみ確認できる

付属定理6点が円周上にあるとき、中央赤線は共点

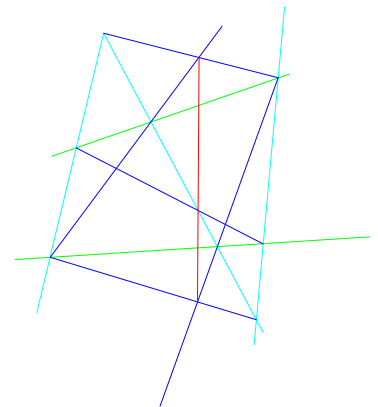
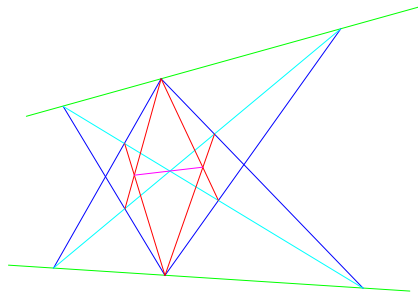
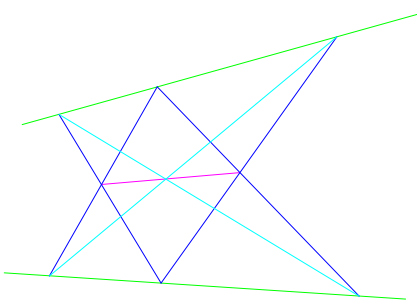
4点共線が3つ現れる。これヘキサゴンの定理なり

はじめに

古典射影幾何 パップスの定理と系

日本数学会2011 信州大

11本線の定理

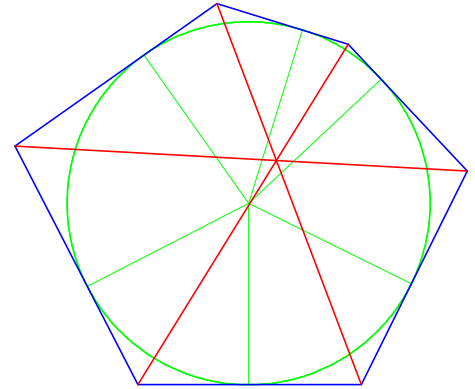
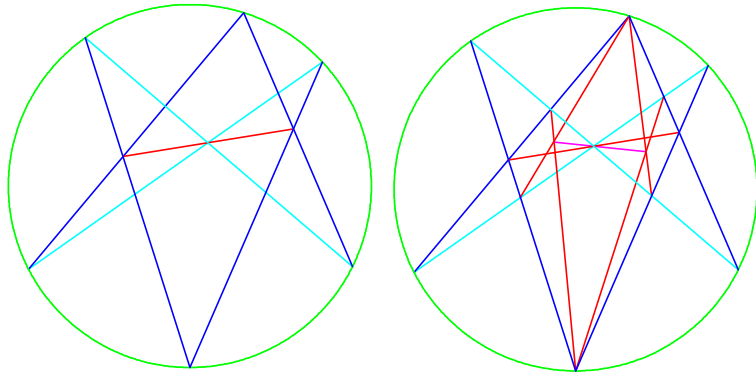


条件：二直線上に各3点

蛭子井博孝

## 2. 古典射影幾何 パスカルの定理と系

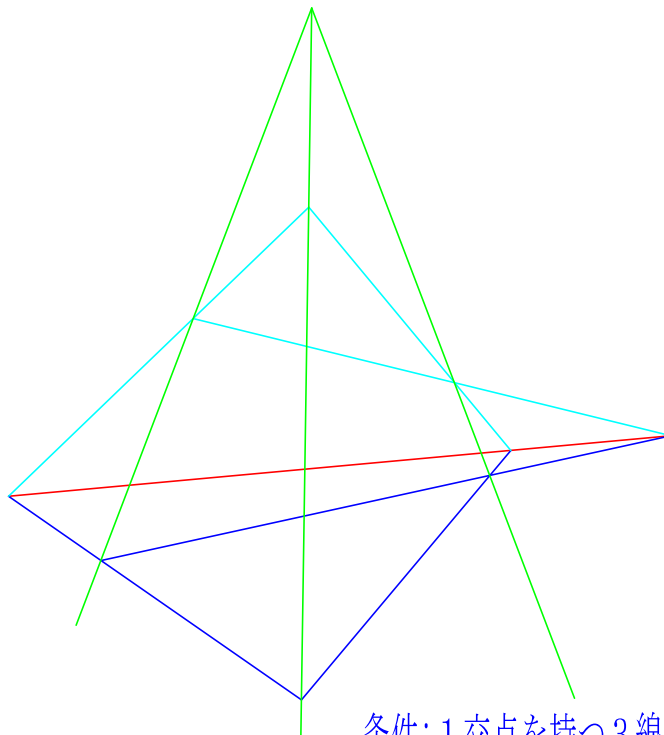
## ブリアンションの定理



条件：円上に6点

蛭子井博孝

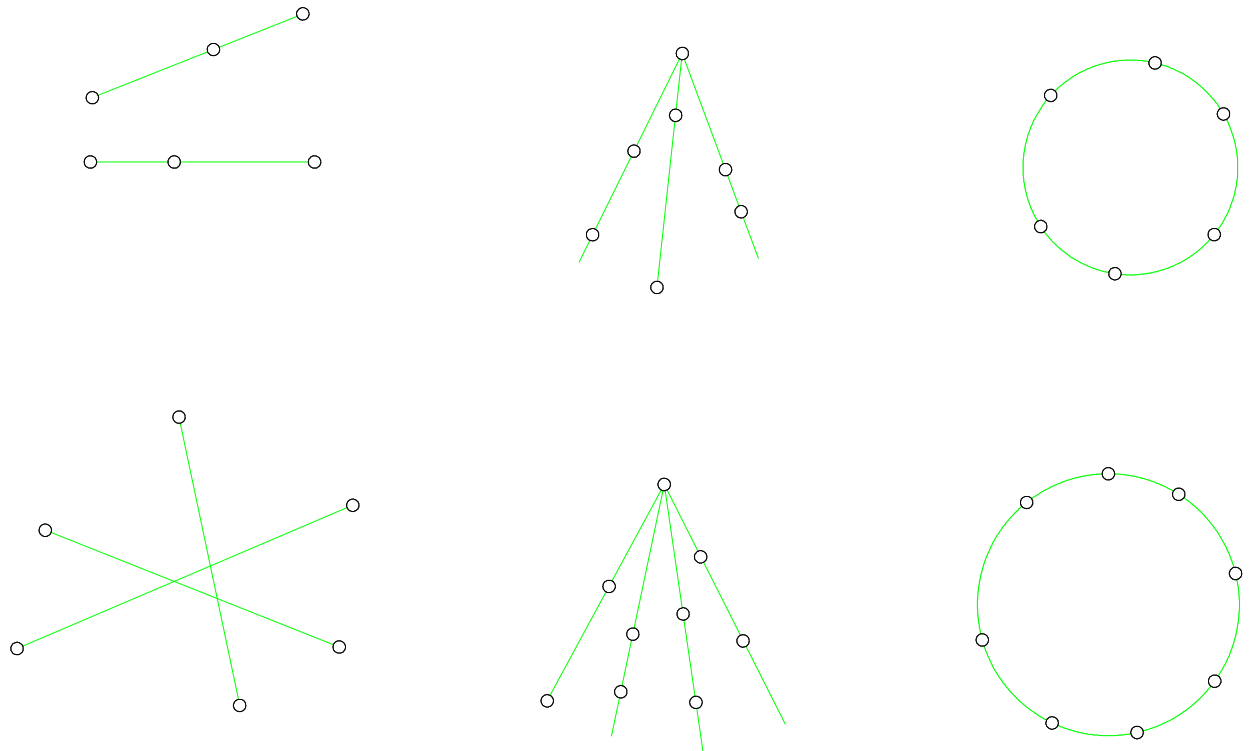
## 3 デザルグの定理i



条件：1交点を持つ3線上各2点

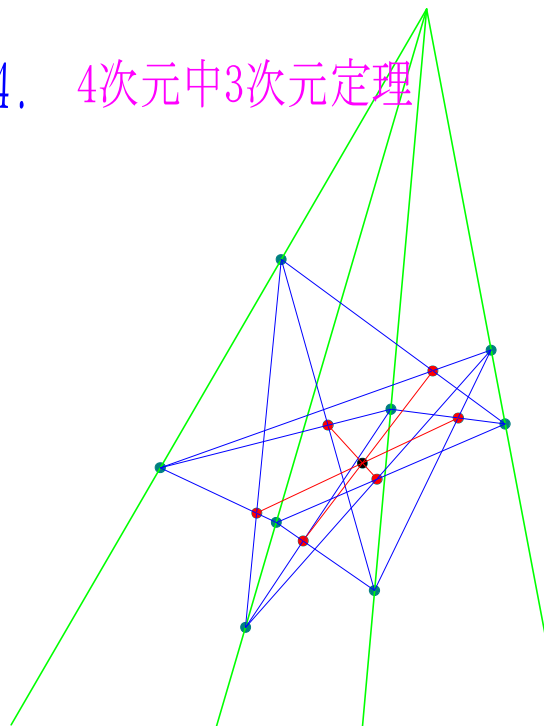
蛭子井博孝

# 点線円6大配置 幾何学基本定理



## 4. 4次元中3次元定理

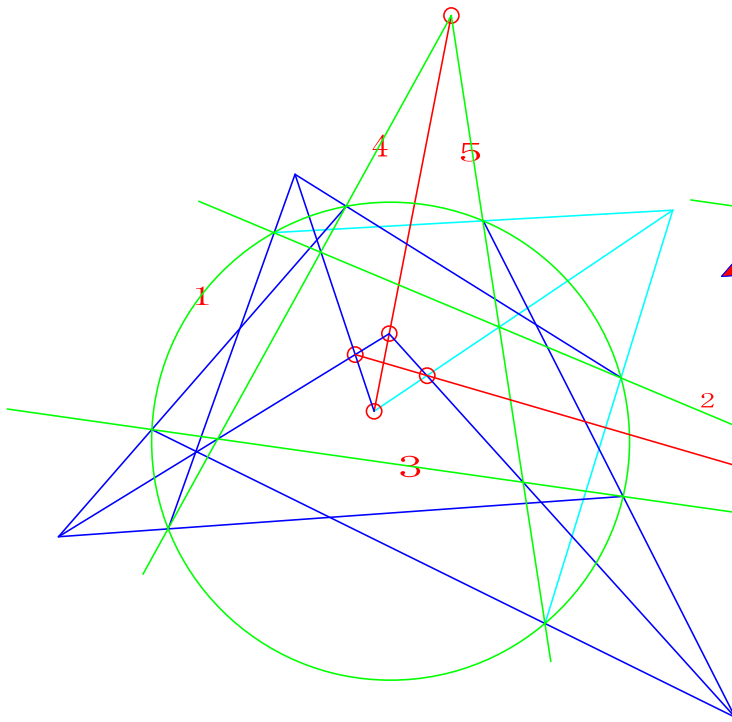
日本数学会2011 信州大



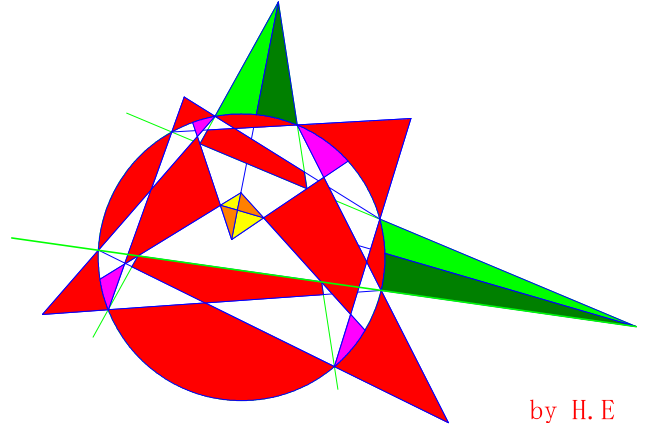
条件：4直線上に各2点

蛭子井博孝

# 5. バラの定理



条件：4直線と円



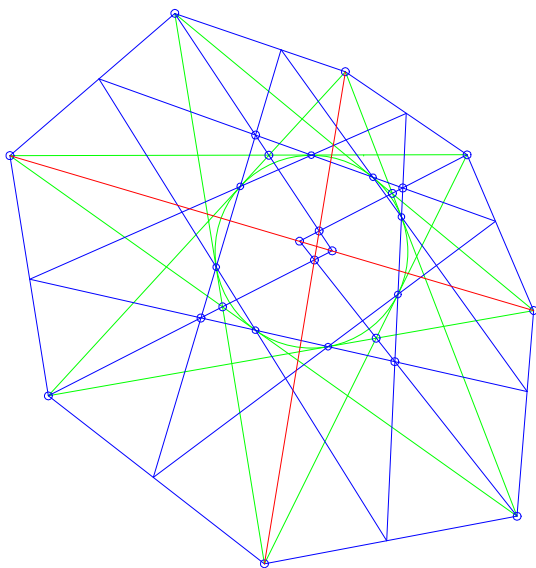
by H. E

条件:円周上の8点

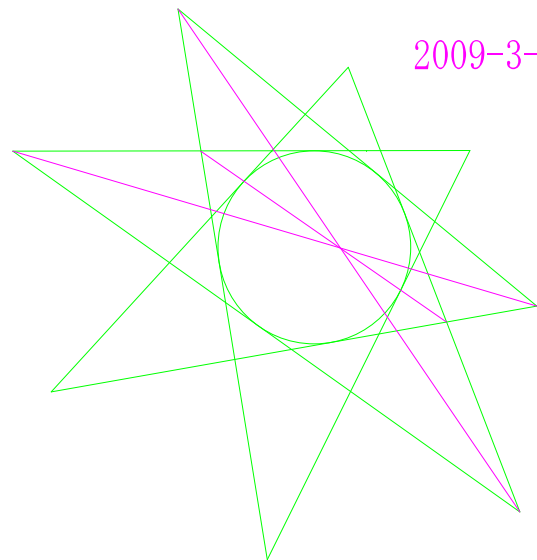
by H. EBISUI

蛭子井博孝

# 5-2 ひまわりの定理



条件:円周上の8接線



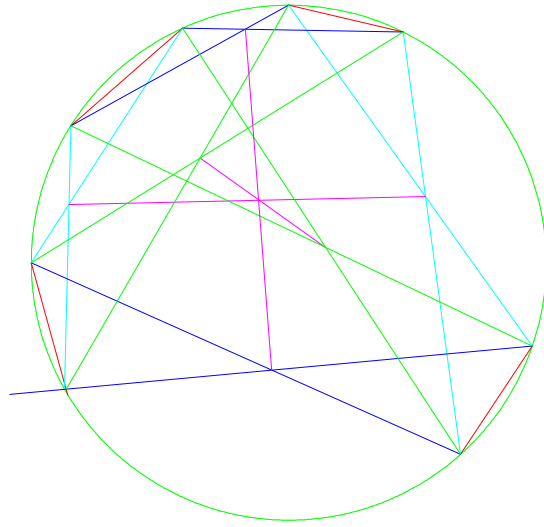
2009-3-15

蛭子井博孝



# 5' 円8点 3線共点 定理(ABCDの定理)

数学会2011 信州大



蛭子井博孝

条件:円周上の8点

# 6. ヘキサゴンの定理

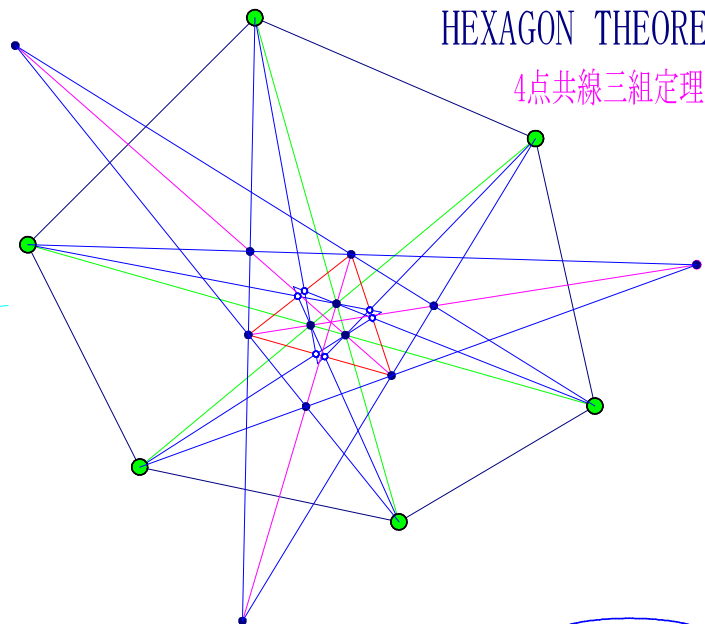
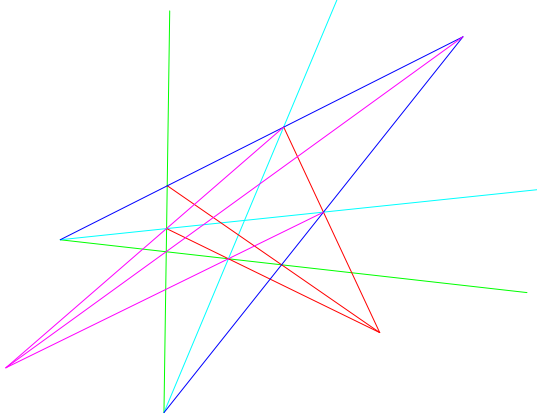
日本数学会2011 信州大

## 任意の6角形定理

HEXAGON THEOREM

4点共線三組定理

2組の3直線の定理



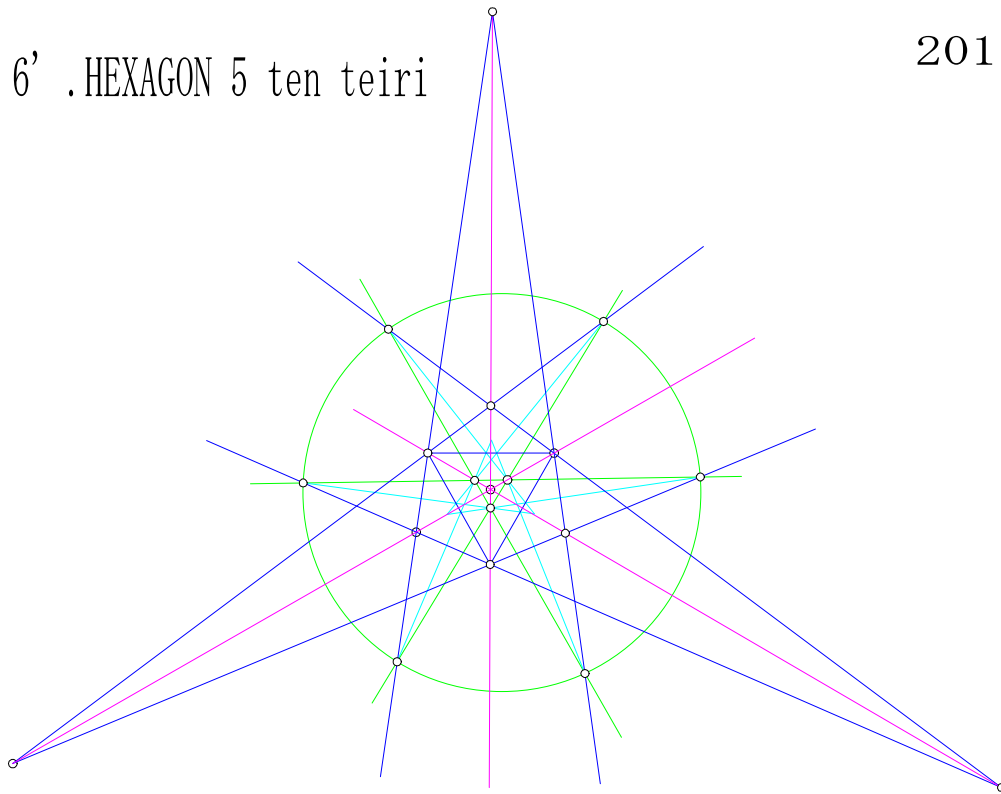
GGJ- (FGJ-001)-01

蛭子井博孝

条件:任意の6点

6' .HEXAGON 5 ten teiri

2011-9-6

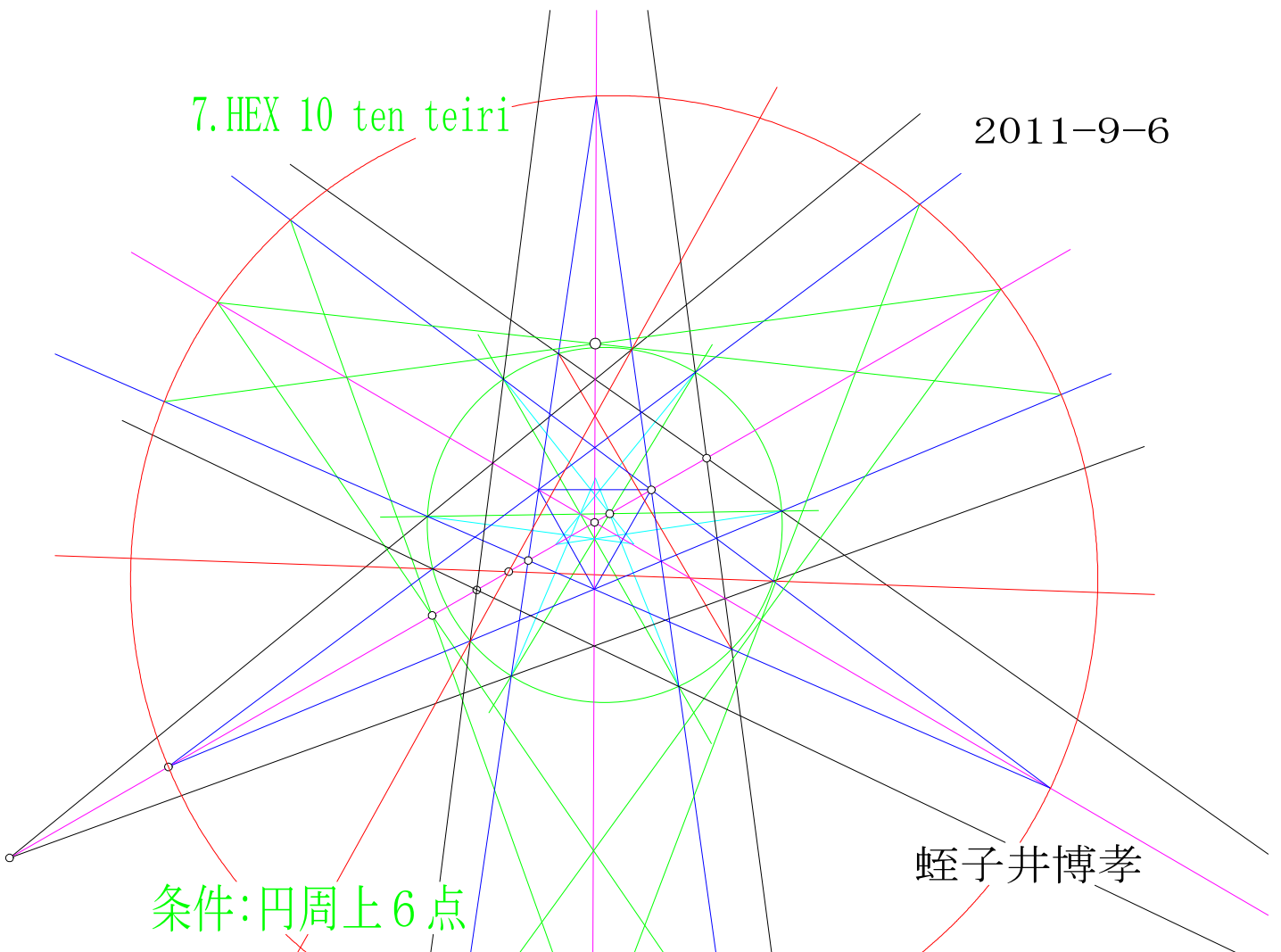


条件:円周上6点

蛭子井博孝

7.HEX 10 ten teiri

2011-9-6



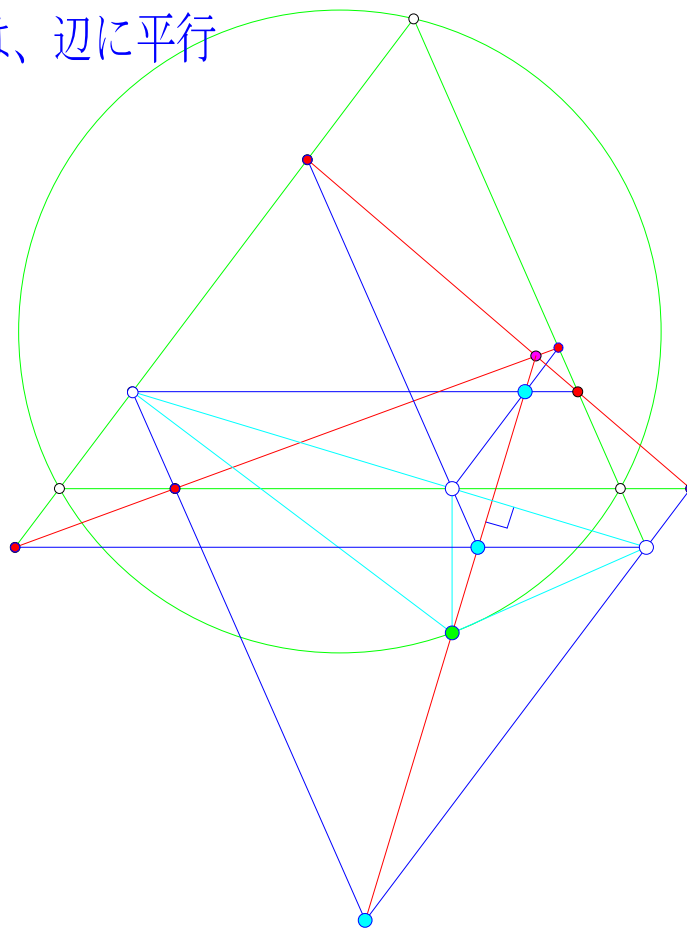
条件:円周上6点

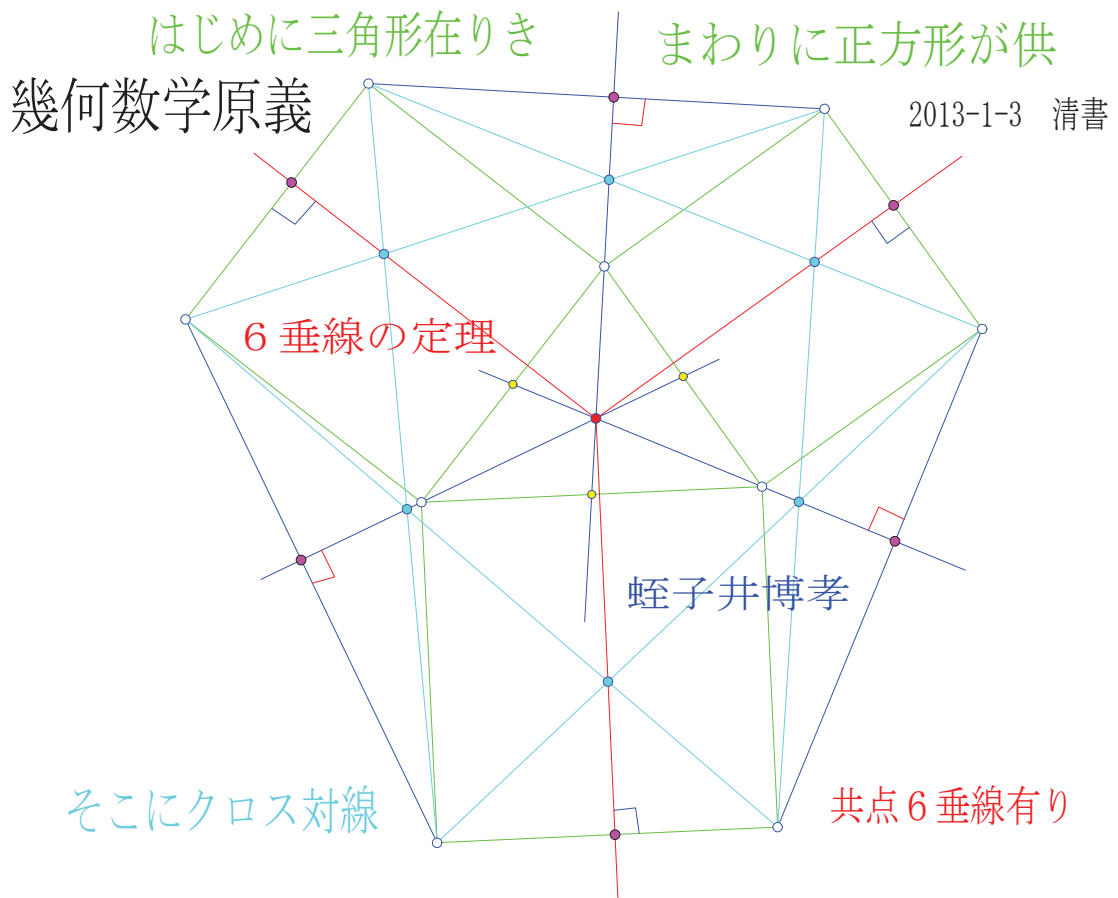
蛭子井博孝

# エビスイシムソンの定理

青線は、辺に平行

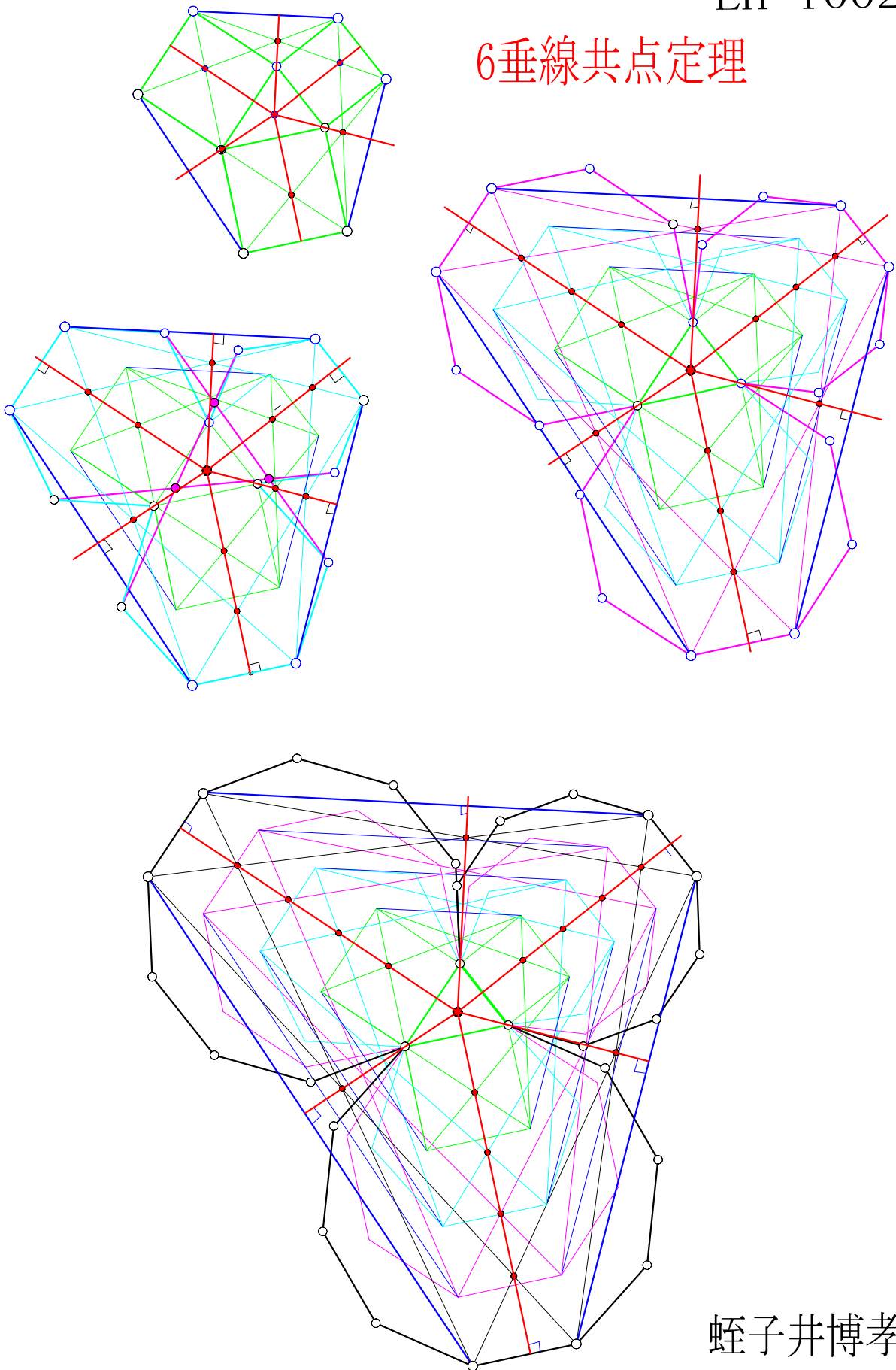
2014-1-4 清書





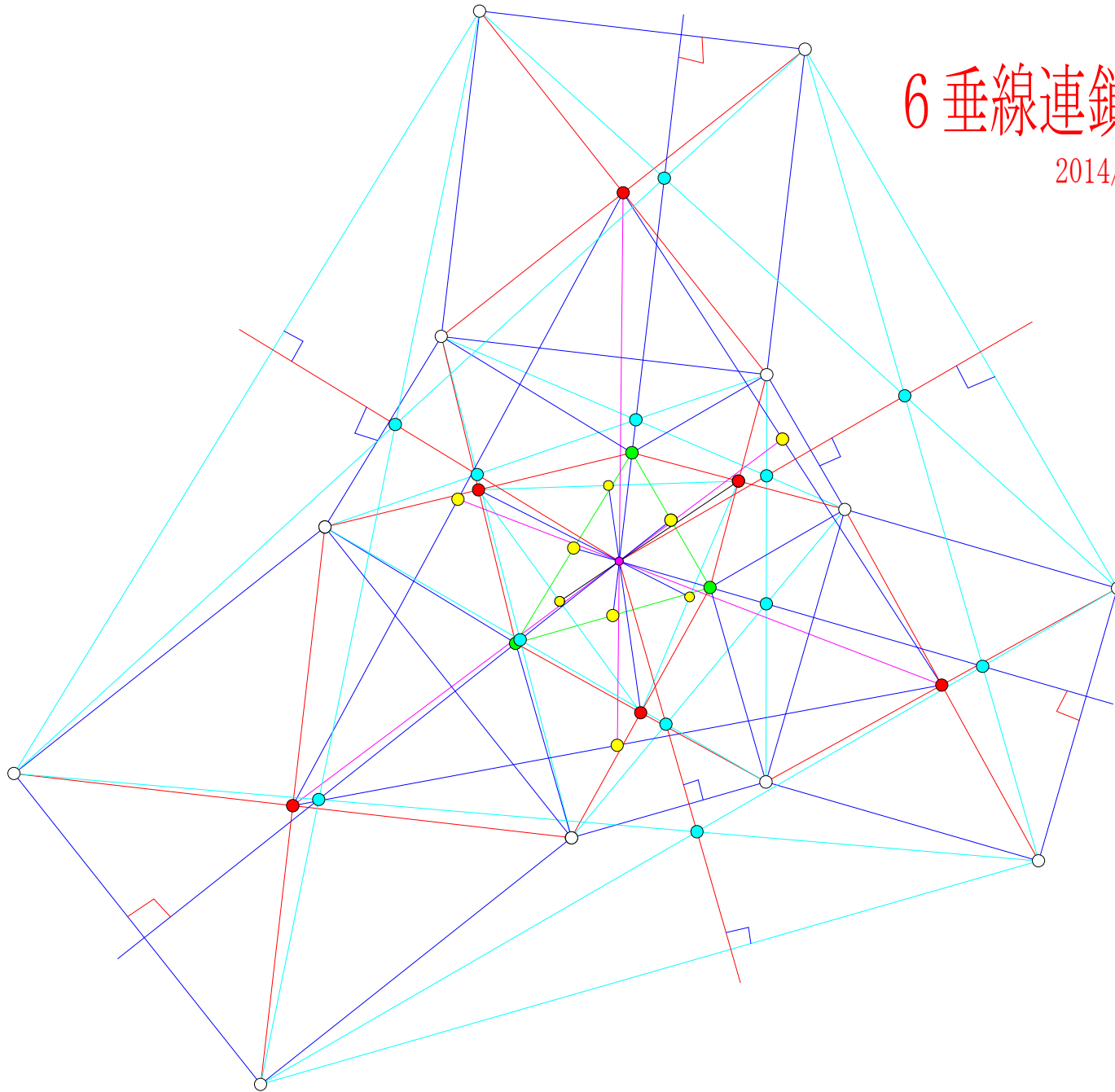


6垂線共点定理



# 6 垂線連鎖定理

2014/01/11 18:48



蛭子井博孝