デカルトの卵形線の2焦点を見込む角について*

蛭子井　博　孝**

デカルトの卵形線には，焦点が3つあり，その第1第2焦点は，いわゆる卵形の内側（卵形線の内分枝の内側）にあり，第3焦点は，卵形線の外分枝の外側にある。それらの2焦点を卵形線上の点から見込む角について，次のような性質を見つけ，証明したので報告する。

［定理1］　第3焦点を通る直線と卵形線との交点が内分枝上に2点あるとき，その各点から，第1，第2焦点を見込む角は，相等しい。

［定理1′］　第3焦点を通る直線と外分枝との交点についても同様である。図1参照

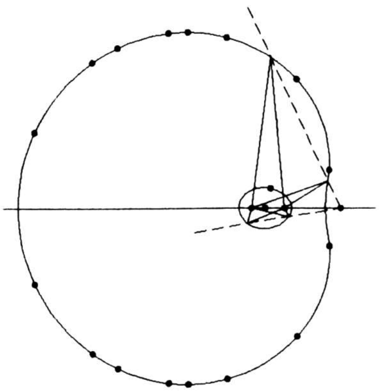

図1　2焦点を見込む角

1．準備

［卵形線の定義］　図2におけるように，定円①（中心＝F_1，半径＝F_1A）と，第2焦点からの距離の比（$PA : PF_2 = n : m$, $QA = QF_2 = n : m$, $m > n > 0$）が一定な点P, Qは動点Aが定円上を動くとき，それぞれ，卵形線の内分枝，外分枝を描く。

この定義より，$F_1P + (n/m)F_2P = F_1A$ で $c = F_1F_2$ として，$F_1A = (k/m)F_1F_2$ となるようにkをとれば，$F_1P = r_1$, $F_2P = r_2$ より

$$mr_1 \pm nr_2 = kc \quad \cdots\cdots (1)$$

と，双極座標の定義式を得る。－は外分枝。

さて，卵形線に関して，次の2題が，文献[1)]に述べてあり，その証明も見られるが，記号の用い方の相異等があるので，ここで，証明も述べることにする。

［補題1］　$F_1P \cdot F_1Q$ は，一定である。

［補題2］　$\triangle F_2PQ$ の外接円と直線 F_1F_2 との交点は，卵形線の第3焦点である。

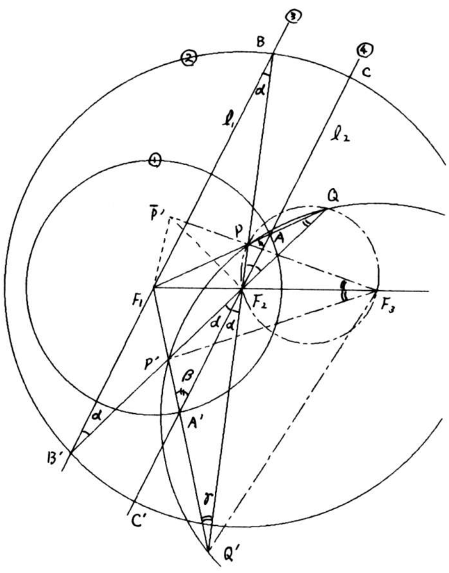

図2　証明補図1

* 平成8年9月20日受付

** 岩国市元町4丁目12−10

［補題1の証明］

図2の$\triangle F_1F_2P$において，余弦定理より

$$r_2^2 = r_1^2 + c^2 - 2r_1c\cdot\cos\theta \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)，(2)式より，r_2を消去すれば

$$(m^2 - n^2)r_1^2 - 2(km - n^2\cos\theta)cr_1 + (k^2 - n^2)c^2 = 0$$

このr_1についての2次方程式の解と係数の関係より，上式の2つの解の積は，一定で，次のようになる。

$$r_1\cdot r_1' = (k^2 - n^2)c^2 / (m^2 - n^2) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ここで，$r_1 = F_1P$，$r_1' = F_1Q$であるから

$F_1P\cdot F_1Q$は一定　　（証明終り）

［補題2の証明］

$\triangle F_1F_2Q$，$\triangle F_1PF_3$は，円周角の定理より，$\angle F_1QF_2 = \angle F_1F_3P$だから，相似である。

$$\therefore \quad F_3P / F_1F_3 = F_2Q / F_1Q$$

(1)より$mF_1Q - nF_2Q = kc$

(3)より$F_1P\cdot\dfrac{m^2 - n^2}{(k^2 - n^2)c^2} = \dfrac{1}{F_1Q}$

$$\therefore \quad \frac{F_3P}{F_1F_3} = \frac{nF_2Q}{nF_1Q} = \frac{mF_1Q - kc}{nF_1Q} = \frac{m}{n} - \frac{kc}{nF_1Q}$$

$$\therefore \quad \frac{F_3P}{F_1F_3} = \frac{m}{n} - \frac{k(m^2 - n^2)}{cn(k^2 - n^2)}\cdot F_1P$$

(3)と方べきの定理および$F_1F_2 = c$より

$$F_1F_2\cdot F_1F_3 = c\cdot\frac{(k^2 - n^2)c}{(m^2 - n^2)}$$

$$\therefore \quad \frac{(m^2 - n^2)F_3P}{(k^2 - n^2)c} + \frac{k(m^2 - n^2)F_1P}{cn(k^2 - n^2)} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore \quad nr_3 + kr_1 = mF_1F_3$$

これは，F_1，F_3からPまでの距離r_1，r_3の一次式が，その極間距離F_1F_3の定数倍に等しいことから，(1)式と同様のものである。ゆえに，F_3を焦点といえ，第3焦点と名付けられる。

外分枝上の点Qについて，$\triangle F_1F_3Q \backsim \triangle F_1PF_2$より同様にして$- nF_3Q + kF_1Q = mF_1F_3$

つまり，$- nr_3 + kr_1 = m(k^2 - n^2)c / (m^2 - n^2)$が言える。

このように，デカルトの卵形線は，第1，第2，第3焦点があり，そのうち，2つの点を双極として，定義できるのである。

2．定理の証明

次に，卵形線の定義の方法として，定円① F_1Aの半径のm/n倍の半径をもち，中心F_2をもつ定円②を考える。すると，点Pは，定円（中心＝F_2，半径＝F_2B）と，定点F_1からの距離の比が一定（m/n）の点である卵形線を考えることができる。

つまり，$F_1P : PB = F_1Q' : Q'B = n : m$である。さて，図2の作図順序を少し変えて考える。

まず円F_1，円F_2(半径比n：m）を描く，次に点F_1を通る直線l_1，点F_2を通る直線l_1に平行な直線l_2を引く。直線l_1と円F_2との交点をB, B′ 直線l_2と円F_1との交点をA, A′ とする。そして，直線F_1AとF_2B, F_1AとF_2B', F_1A'とF_2B', F_1A'とF_2Bの4交点P, Q, P′, Q′ を考える。

直線l_1, l_2が一回転するとき，点P, P′ は，卵形線の内分枝（$mr_1 + nr_2 = kc$），点Q，点Q′ は，卵形線の外分枝（$mr_1 - nr_2 = kc$）上を動く。

［補題3］　点P, P′ から焦点F_1, F_2を見込む角$\angle F_1PF_2$は$\angle F_1P'F_2$に等しい。同様に$\angle F_1QF_2 = \angle F_1Q'F_2$

［補題4］　$\angle PF_3F_1 = \angle P'F_3F_2$

［補題3，4の証明］

図のように，$\angle\alpha$，$\angle\beta$，$\angle\gamma$をとる。

$\angle\alpha - \angle\beta = \angle\gamma = \angle F_1Q'F_2 = \angle F_1QF_2 \cdots (4)$

$\therefore$　$\angle PQP' = \angle PQ'P'$

$\therefore$　四角形QPP′Q′ は同一円周上 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (5)

$\therefore$　$\angle QP'Q' = \angle QPQ'$

$\therefore$　$\angle F_1PF_2 = \angle F_1P'F_2$（補題3）

ところで，F_3は，補題2より四角形PQF_2F_3が同一円周上にあるような点である。

$\therefore$　方べきの定理より$F_1P\cdot F_1Q = F_1F_2\cdot F_1F_3$

また，(5)より，$F_1P\cdot F_1Q = F_1P'\cdot F_1Q'$

$\therefore$　$F_1P'\cdot F_1Q' = F_1F_2\cdot F_1F_3$

$\therefore$　四角形$P'Q'F_3F_2$は，同一円周上にある。

$\therefore$　$\angle P'Q'F_2 = \angle P'F_3F_2$（補題4）$\cdots\cdots\cdots$ (6)

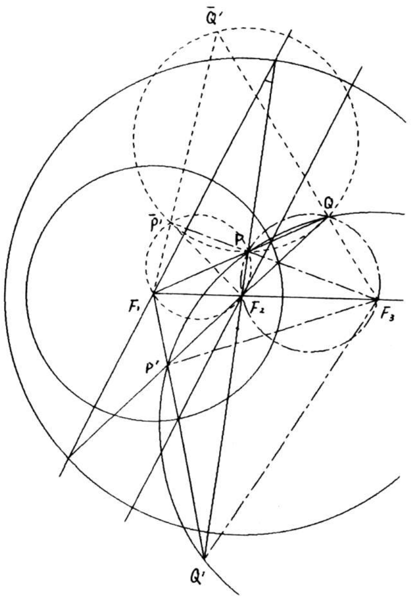

図 3　証明補図 2

四角形 PQF_3F_2 においても同様に

$$\angle PQF_2 = \angle PF_3F_2 \quad \cdots\cdots(7)$$

(4), (6), (7)より $\angle PF_3F_2 = \angle P'F_3F_2$

つまり, $\angle PF_3F_1 = \angle P'F_3F_1 \quad \cdots\cdots(8)$

［系 1］　ここで, P' の直線 F_1F_2 に関する対称点を $\overline{P}'$ とする。すると, (8)より, F_3, P, $\overline{P}'$ は, 同一直線上にある。図 2, 図 3 参照

ゆえに, 逆にたどれば, 定理 1 が成立する。

［系 2］　直線 $F_1\overline{P}'$ と F_3Q の交点を $\overline{Q}'$ とすると四角形 $PQ\overline{Q}'\overline{P}'$ は, 同一円周上にある。

［証明］

四角形 $F_1F_2P\overline{P}'$ は, 定理 1 より同一円周上にある。

$$\therefore \quad \angle \overline{Q}'\overline{P}'P = \angle PF_2F_1$$

四角形 PQF_2F_3 は, 同一円周上にある。

$$\therefore \quad \angle Q'QP = \angle PF_2F_3$$

$$\therefore \quad \angle \overline{Q}'\overline{P}'P + \angle \overline{Q}'QP = \angle PF_2F_1 + \angle PF_2F_3 = 180°$$

$\therefore$　四角形 $PQ\overline{Q}'\overline{P}'$ は, 同一円周上にある。

［系 3］　簡単な考察から, $\angle QF_3F_2 = \angle Q'F_3F_2$ より, $\overline{Q}'$ は, 点 Q' の直線 F_1F_3 に関する対称点である。この系および(4)より

［定理 1′］の F_3 を通る直線 ($F_3Q\overline{Q}'$) が卵形線の外分枝と交わる点 Q, $\overline{Q}'$ より, 第 1, 第 2 焦点 F_1, F_2 を見込む角は, 相等しいことが言える。

［補題 2］の四角形 PF_2F_3Q が円に内接し, F_1, P, Q が同一直線上にあることから, 直接, 次の定理が成立する。

［定理 2］

第 1 焦点 F_1 を通る直線と卵形線の内分枝, 外分枝との交点を P, Q とすると, 点 P, Q から第 2, 第 3 焦点 F_2, F_3 を見込む角は, 相等しい。

同様に, 四角形 $PF_1Q'F_3$ が, 円に内接し, P, F_2, Q' が同一直線上にあることから, 次の定理が成立する。

［定理 3］

第 2 焦点 F_2 を通る直線と, 直線 F_1F_2 の両側にある内分枝, 外分枝との交点を P, Q' とすると, 点 P, Q' から, 第 1, 第 3 焦点を見込む角は, 互いに補角である。

以上, 定理 1, 2, 3 より, 第 3 焦点が, 無限遠点になったとき, $\overline{P}'PF_3$ は, 対称軸に平行な直線となり, 楕円の場合と一致する。すなわち, デカルトの卵形線の第 3 焦点は, 卵形線の特殊な場合の楕円の無限遠点が, 有限の位置になっていると言える。

また, 定理 1 における見込み角が, 最大値をとるのは, 第 3 焦点を通る直線が, それぞれ内分枝, 外分枝に接するときである。

このように, デカルトの卵形線について, 2 焦点を見込む角に関する初等的新たな性質が見つかったことになる。

参考文献

1）ロックウッド；“カーブ”；みすず書房, 1964 年.