1

卵形線を包絡する円群

79-4-22 清書
76-11-26

"デカルトの卵形線の曲率円"の図1において
円（中心 O_0, 半径 $O_0R_1 = \frac{kC}{m^2-n^2}$）上に中心をもち、
半径 R_1M_1 をもつ円群は次式で表される
ただし O_0 を原点、$\angle R_1 O_0 S_2 = \theta$ とする。O_0S_2 を x 軸とする

$$\left(x - \frac{kmC}{m^2-n^2}\cos\theta\right)^2 + \left(y - \frac{kmC}{m^2-n^2}\sin\theta\right)^2$$

$$= \frac{k^2n^2}{(m^2-n^2)^2}C^2 + \frac{m^2n^2}{(m^2-n^2)^2}C^2 - \frac{2kmn^2}{(m^2-n^2)^2}C^2\cos\theta \quad \cdots (1)$$

$\frac{kmC}{m^2-n^2} = N$ $\quad \frac{knC}{(m^2-n^2)} = M \quad \frac{mn}{m^2-n^2}C = K$ とおく。

$$(x - N\cos\theta)^2 + (y - N\sin\theta)^2 = M^2 + K^2 - 2KM\cos\theta$$

θ について偏微分する

$$N(x - N\cos\theta)\sin\theta - N(y - N\sin\theta)\cos\theta = KM\sin\theta$$

$$Nx\sin\theta - Ny\cos\theta = KM\sin\theta$$

$$\begin{cases} (Nx - KM)\sin\theta = Ny\cos\theta \\ x^2 - 2Nx\cos\theta + y^2 - 2Ny\sin\theta = K^2 + M^2 - N^2 - 2KM\cos\theta \end{cases}$$

上式から θ を消去

$$\begin{cases} (Nx - KM)\sin\theta - Ny\cos\theta = 0 & \cdots ① \\ -2Ny\sin\theta + (2KM - 2Nx)\cos\theta = K^2 + M^2 - N^2 - x^2 - y^2 & ② \end{cases}$$

① × (2KM − 2Nx) + ② × Ny

$$\{-2(Nx - KM)^2 - 2N^2y^2\}\sin\theta = Ny(K^2 + M^2 - N^2 - x^2 - y^2) \quad \cdots ③$$

① × 2Ny ± ② × (Nx − KM)

$$\{-2(KM - Nx)^2 - 2N^2y^2\}\cos\theta = (Nx - KM)(K^2 + M^2 - N^2 - x^2 - y^2) \quad \cdots ④$$

$$4\{(Nx - KM)^2 + N^2y^2\}^2 = \{N^2y^2 + (Nx - KM)^2\}(K^2 + M^2 - N^2 - x^2 - y^2)$$

$$(Nx - KM)^2 + N^2y^2 = 0$$

$$4\{(Nx-KM)^2+N^2y^2\}=(x^2+y^2-K^2-M^2+N^2)^2$$

x に $x+\frac{KM}{N}$ を代入　　原点をO_0からS_1にうつす

$$4(N^2x^2+N^2y^2)=\left\{\left(x+\frac{KM}{N}\right)^2+y^2-K^2-M^2+N^2\right\}^2$$

$$4N^2(x^2+y^2)=\left\{\left(x+\frac{KM}{N}\right)^2+y^2-K^2-M^2+N^2\right\}^2$$

$$\frac{KM}{N}=\frac{n^2c}{m^2-n^2}$$

$$\therefore 4\frac{k^2m^2c^2}{(m^2-n^2)^2}(x^2+y^2)=\left\{\left(x+\frac{n^2c}{m^2-n^2}\right)^2+y^2+\frac{k^2(m^2-n^2)c^2-m^2n^2c^2}{(m^2-n^2)^2}\right\}^2$$

$$4k^2m^2c^2(x^2+y^2)=\left\{(m^2-n^2)\left(x+\frac{n^2c}{m^2-n^2}\right)^2+(m^2-n^2)y^2+k^2c^2-\frac{m^2n^2}{m^2-n^2}c^2\right\}^2$$

$$4k^2m^2c^2(x^2+y^2)=\left\{(m^2-n^2)x^2+2n^2cx+\frac{n^4c^2}{m^2-n^2}-\frac{m^2n^2}{m^2-n^2}c^2+k^2c^2\right\}^2$$

$$4k^2m^2c^2(x^2+y^2)=\{(m^2-n^2)x^2+2n^2cx-n^2c^2+(m^2-n^2)y^2+k^2c^2\}^2 \quad \cdots \text{A}$$

定義より $mr_1+nr_2=kc$　　S_1を原点とすると

$$m\sqrt{x^2+y^2}+n\sqrt{(x-c)^2+y^2}=kc$$

$$[m^2(x^2+y^2)+n^2\{(x-c)^2+y^2\}-k^2c^2]^2=4m^2n^2(x^2+y^2)\{(x-c)^2+y^2\}$$

$$m^4(x^2+y^2)^2-2m^2n^2\{(x-c)^2+y^2\}(x^2+y^2)+n^4\{(x-c)^2+y^2\}^2+k^4c^4$$
$$-2k^2m^2c^2(x^2+y^2)-2k^2n^2c^2\{(x-c)^2+y^2\}=0$$

$$m^4(x^2+y^2)^2+n^4\{(x-c)^2+y^2\}^2+k^4c^4-2m^2n^2(x^2+y^2)\{(x-c)^2+y^2\}$$
$$-2k^2n^2c^2\{(x-c)^2+y^2\}+2k^2m^2c^2(x^2+y^2)=4k^2m^2c^2(x^2+y^2)$$

$$\{m^2(x^2+y^2)-n^2\{(x-c)^2+y^2\}+k^2c^2\}^2=4k^2m^2c^2(x^2+y^2)$$

$$\{(m^2-n^2)x^2+2n^2cx-n^2c^2+(m^2-n^2)y^2+k^2c^2\}^2=4k^2m^2c^2(x^2+y^2) \cdots \text{B}$$

A, B は一致

ゆえに (1) の包絡線は卵形線である。