Doval の随伴円について

蛭子井博孝
卵形線研究センター

要旨：点と円からとの距離の比が一定な曲線として定義される Doval は、代数曲線であるが、そこに様々な幾何構造が付随している。その主なものは、3 つの焦点、補助円の構図（直交定理）、短軸の構図等々。
今回、随伴円の構図を見つけた。その性質は、運動幾何ソフト Cabri を用いるとよく分かる。ここでは、その構図作成に、平行線を用いているが、非平行な交わる 2 直線でも、随伴円が作図できることが分かった。さらに、随伴円を作る 4 点が定義する随伴曲線も、考えてみた。随伴円の性質とともに、随伴曲線の形は、Doval に付随する、幾何構造として、有限、無限の概念を含むものである。そして、代数曲線そのものでなく、それに随伴して存在すること。言い換えると、代数曲線が、付帯構造を持つことの発見である。さて、随伴円は、CAD や Cabri など、科学技術ソフトなしでは、容易に語れないものである。その意味でも、Doval の随伴円や随伴曲線は、古典的に定義される Doval の現代的性質といってよかろう。

キーワード：平面幾何：Doval，　**随伴円、運動幾何、Cabri、随伴曲線**

1．Doval　について

1．1　Doval の定義

【定義】　点と円とから曲線上の点までの２つの距離の比が一定な曲線をDovalという。

図1において、２つの距離とは、まず、定円（中心、半径；F_1、kc/m）F_1 内に、１点F_2（中心より右側にとる。F_1F_2=c）をとり、円内の曲線上の一点をＰとする。点とＰとの距離は, 線分PF_2である。P と円との距離は、Ｐと円の中心を結ぶ半径が円周と交わった点をＡとしたとき、線分 PA が、距離となる。　　　$PA:PF_2=n:m$（n, m は任意定数）のとき，P が描く、円内と円外にできる曲線を合わせて Doval という。以上のように定数を取ると，点Ｐは、双極座標で

$mr_1 \pm nr_2 = kc$... ①　を満たす。

なぜなら、$F_1P+PA=F_1P+(n/m)PF_2=kc/m$　この式の分母mをはらって①を得る。①を得るために定円の半径を kc/m と複雑にした。ここで、任意定数は，　k>m>n>0を満たす。

また、内分枝は、いわゆる卵形で、凸閉曲線で、外分枝は、k-m-n>０の時　凸、k-m-n<０の時　凹である。

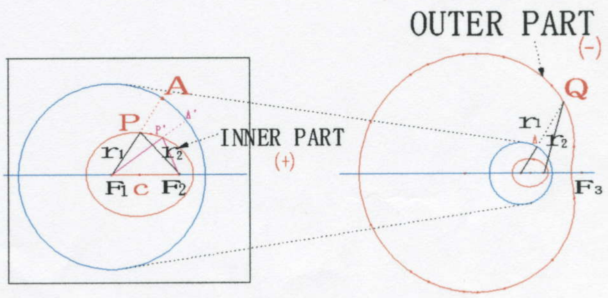

図１　Doval の定義

また①式を，ｘ、ｙ座標にすると

740-0012 山口県岩国市元町 4 丁目 12-10　http://dorell.mo-blog.jp/domy

$$(m^2-n^2)^2\left\{y^2+X^2-\frac{(k^2m^2+k^2n^2+m^2n^2)c^2}{(m^2-n^2)^2}\right\}^2=-\frac{8k^2m^2n^2c^3}{m^2-n^2}X+\frac{4k^2m^2n^2(k^2+m^2+n^2)c^4}{(m^2-n^2)^2}$$

$X = x + n^2c/(m^2-n^2)$

１．２　Dovalの性質　図２，３参照

１．２．１【作図定理】[1] **任意の２つの円０１，円０２が補助円（Dovalに頂点で接する円）として与えられたとき，この卵形線を描くこと。**

円Ｏ１，円Ｏ２（Ｏ１≠Ｏ２）が与えられている。２つの円の相似中心Ｆ１，Ｆ２を求め，Ｆ１，Ｆ２を通り，互いに平行な直線ｌ１，ｌ２を引く。ｌ１と円 Ｏ１，Ｏ２が交わる点をそれぞれＮ１，Ｎ１’，Ｎ２，Ｎ２’とし，同様にＭ１，Ｍ１’，Ｍ２，Ｍ２’をとる。次に直線Ｎ１’Ｍ１’と直線Ｎ２Ｍ２’が垂直に交わる点をＰ、同様に直線Ｎ１Ｍ１’とＮ２’Ｍ２’が垂直に交わる点をＱとする。すると，Ｐ，Ｑは，Ｎ１あるいはＭ１が円 Ｏ１上を動くとき，卵同様の作図で、直交する点は、もう一対Ｐ’，Ｑ’がある。直交することは、1つの定理である。

なお、図2には、2つの準円も作図してある。

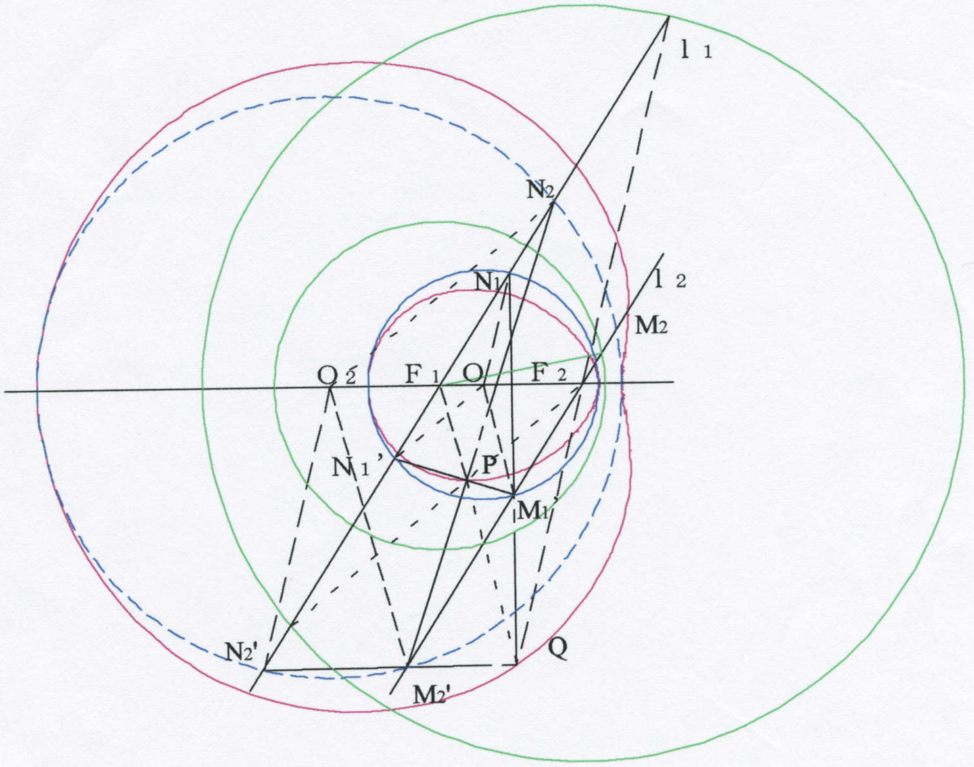

図２　Ｄｏｖａｌ　作図定理

１．２．２　卵形線の微分幾何の頂点[2] の作図位置

卵形線の頂点は、式①を極座標にして、計算すれば、第一焦点を原点としたとき動径の回転角 θ が $\cos\theta = m/k$ のときであることがわかる。

これは、図3におけるように、作図的には、１．２．１節の平行線ｌ１，ｌ２が、焦点間を結ぶ線、または、補助円の中心線、または、卵形線の対称軸に垂直の時である。頂点は、卵形線の短軸端点[3] とは異なる。短軸とは、Doval の内分枝上の点で、内分枝の対称点の中点から一番近い点である。短軸端点の微分幾何学的定義は、未解決である。

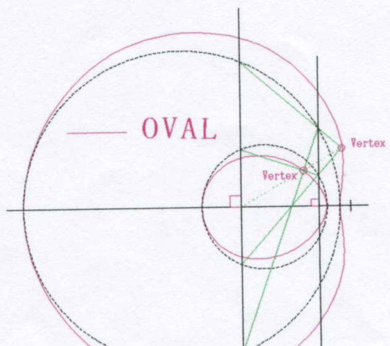

図３　Ｄｏｖａｌの頂点

２．Doval の随伴円

２．１　随伴円の作図定理

図４において、２焦点を通る２直線と補助円の交点を結ぶ線の補助円外の４交点は、同一円周上にあり、その外接円を外**随伴円**という。4交点を、内補助円内に取ると、内随伴円ができる。（図5参照）

2.1.1　４交点が同一円周上にあることの証明

図 4 において、焦点を通る 2 直線と補助円のなす 4 交点が作る四角形は、内対角の和が 180 度より
図の 2 つの α は等しい。β も同様である。
ゆえに、α－β＝γ は等しく、故に 2 つの γ を円周角に持つ 4 点が作る四角形は同一円周上にある。

2.1.2　平行非平行における随伴円

ｈ’が平行になりｈの位置でも、α、β、γ の関係は成り立ち、このことから、随伴円は、焦点を通る 2 直線が、平行非平行線でも定義できる。ただ、非平行の時、Doval との関係は、未定

１つの平行線の位置（焦点の周りを回転さす）が決まると、図 2 のように、Doval の内外分枝上の 4 点 P,P',Q,Q'が定義でき、そのときの Doval 上の 4 点に随伴円が、随伴している

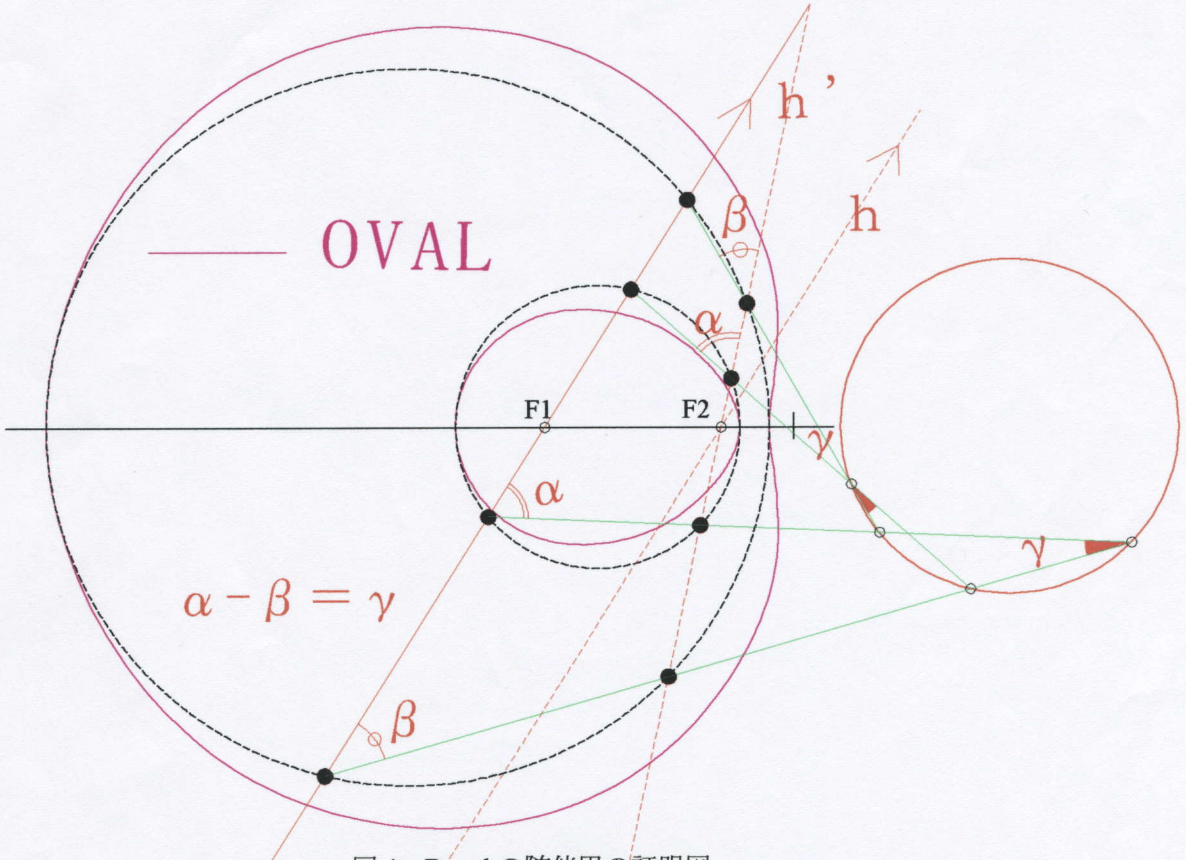

図４　Doval の随伴円の証明図

２．２　随伴円と随伴曲線の性質　図5，6参照

1. 内外随伴円の中心は、２つとも Doval の焦点を結ぶ対称軸上を移動する。未証明。
1. 対称軸外の頂点に対応する内外随伴円の半径は、l_1，l_2 が垂直の時で、半径は、ともに０である。このときの中心の位置の点を**消進淵点**ということにする。
1. 対称軸上の頂点に対応する内随伴円の直径は、第一焦点第二焦点を結ぶ線分である。
1. 対称軸上の頂点に対応する外随伴円の直径は、無限大である。その周は、Doval の第三焦点を通る対称軸に垂直な直線である。これを、Doval の**発散壁直線**（図中一点鎖線）という。
1. 内外２つの随伴円の外相似中心が、第一焦点であり、内相似中心は、第 2 焦点である。
1. 2 つの消進淵点は、発散壁直線に関して、対称である。
2. 随伴曲線は、4 点からでき、4 本あるが、それらは、2 本の曲線が、Doval の対称軸に関して、対称になって、できている。
2. 随伴曲線の 1 つは、第三焦点を通る軸に垂直な直線を、漸近線に持つ。

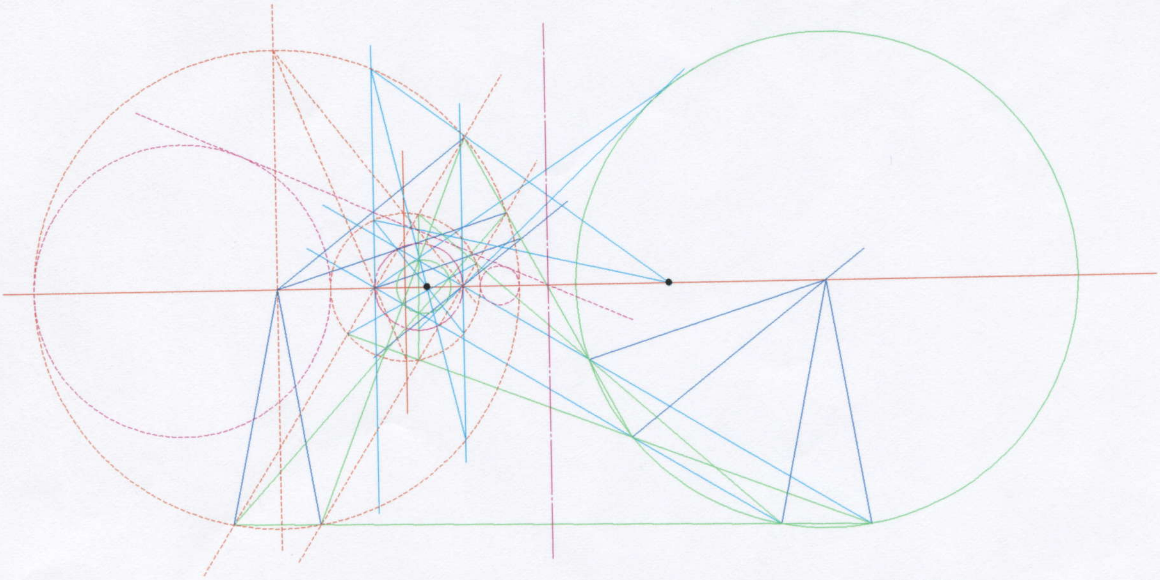

図５　Doval の随伴円の構図　（黒点、消進淵点）

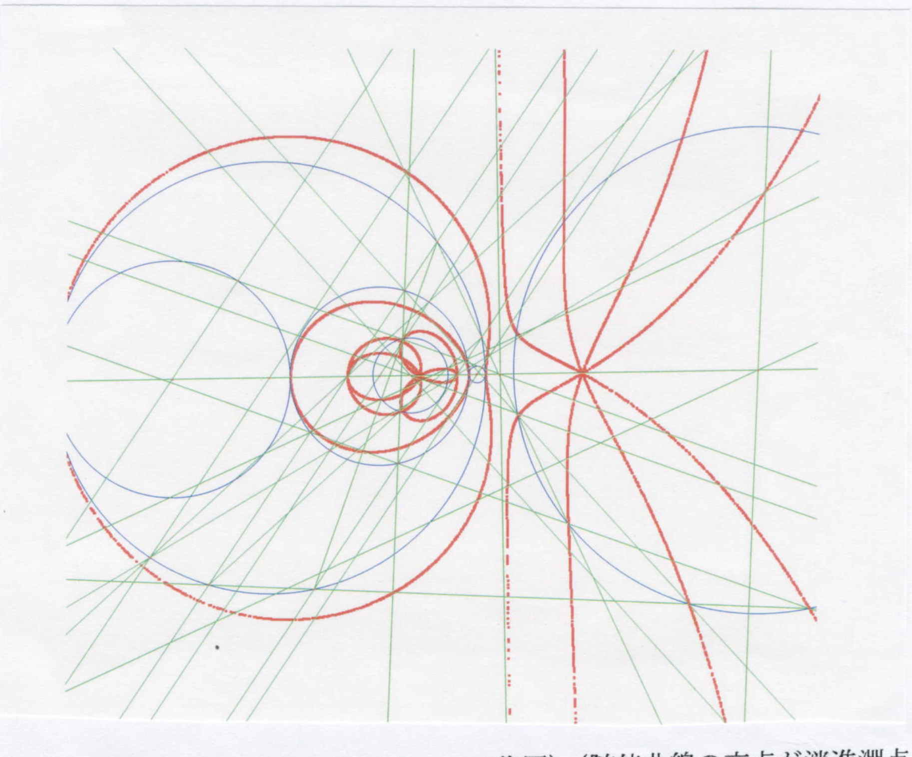

図６　Doval と随伴曲線（Cabri によるトレース作図）（随伴曲線の交点が消進淵点である。）

３．むすび

ここでは、概略的に Doval の随伴円と証明を見てきた。その定義は、２つの補助円による Doval の作図法の中の直線を用いている。言葉での説明は、省略したが、その特徴は、Doval 上の１点を決める作図（４点が同時に決まる）で、２対の随伴円の位置と大きさが決まる。また、Dovalとその随伴円が、曲線論だけでなく、新しい宇宙論に役立つことを期待する。

参考文献

[1] 蛭子井博孝，“デカルトの卵形線の二，三の性質，” 図学研究，１２号,日本図学会、1973, pp.35-49.

[2] 蛭子井博孝、“デカルトの卵形線の曲率円”、図学研究、１９号、日本図学会、1976、pp.7-11.

[3] 蛭子井博孝、“デカルトの卵形線の短軸および卵形面”、図学研究、６８号、日本図学会、1995、pp.3-8.