# 楕円を拡張した共２焦点、共３焦点な卵形線群

《Ovals（Doval） with Same two or three focus points extended from ellipse》

蛭子井博孝
卵形線研究センター
740-0012　岩国市元町４丁目 12-10
hirotaka.ebisui@crux.ocn.ne.jp

..¥..¥confocal-共焦点¥共焦点動曲線４種-cg-nomi.mws

**Keyword：楕円、卵形線、共焦点、直極点、短軸、三焦点、ドーバル**

## １．はじめに

微分幾何では凸閉曲線を卵形線と呼んでいる。歴史的にはケプラーやカシニなどが、卵形線の初等的定義方法を見つけている。ここでは、我々が再発見した楕円の拡張である**卵形線**（デカルトの卵形線[1)]）について考える。**楕円が焦点を二個持ち**、その２つの焦点を共有する共焦点楕円が存在する。ところで卵形線は、３つの焦点を持つ[1)]。その**３つの焦点を共有する卵形線族**があることが予想され、その作図法を見つけた。それは、直極点による卵形線の定義方法を利用するものである。ここでは、共焦点である卵形線群の描き方、**共焦点**であることの確認を行う。

## ２　楕円を拡張した卵形線（Doval)の定義

### 2.1　双極座標による卵形線の定義

**卵形線は、双極座標** $mr_1 \pm nr_2 = k\cdot c$ **で定義される。**（k>m>n>0,k,m,n は任意定数,c は極（焦点）間距離、$r_1$，$r_2$は、それぞれ第一、第二極から曲線上の点までの距離）、

第二、第三焦点を極とする定義式は、

$$-kr_2 + mr_3 = \pm n\cdot\frac{(k^2-m^2)}{(m^2-n^2)}\cdot c$$

第三、第一焦点を極とする定義式は

$$\pm nr_3 + kr_1 = m\cdot\frac{(k^2-n^2)}{(m^2-n^2)}\cdot c$$

である。それぞれ、どれも同じ一対（複号上：内分枝、複号下：外分枝）の卵形線を描く。一対の内外分枝を併せて**ドーバル（Doval)**と呼ぶことにする。

### 2.2　点と円と比からの新定義

図１のように**１点と円からの距離の比が一定な曲線として卵形線は定義される。**

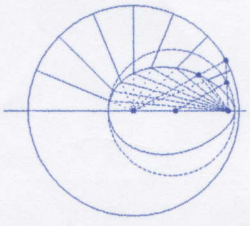


**図１**　点、円、比による卵形線（内分枝）

### 2.3　直極点による新定義[2)]

《【１直線 g 上のことなる４点を取る。左から O, $F_1$, $F_2$, $F_3$ とする。これにより、図２のように**ドーバル**は、一意的に決まる。】

**作図法**【$F_1$, $F_2$, $F_3$ を通り直線 g に垂直な直線 $h_1$, $h_2$, $h_3$ をたてる。次に g 上の $F_3$ の右側に１点 T をとる。線分 OT を直径とする円を描く。この円（動円）と $h_1$, $h_2$, $h_3$ の交点を作る。それを $U_1$,$U_1$’,$U_2$,$U_2$’,$U_3$,$U_3$’とする。ここで△ $U_1U_2U_3$（△ $U_1U_2U_3$’....８個ある）の直線 g に関する直極点を P とする。この P は $F_1$,$F_2$,$F_3$ を焦点、O を等距離円の中心（$F_1$,$F_2$ を n:m に内分する点と外分する点の中点：卵形線の内外分枝から等距離にある点が円になる）とする卵形線上にある。（T が、$F_3$ の右側を動くとき卵形線を描く）】》

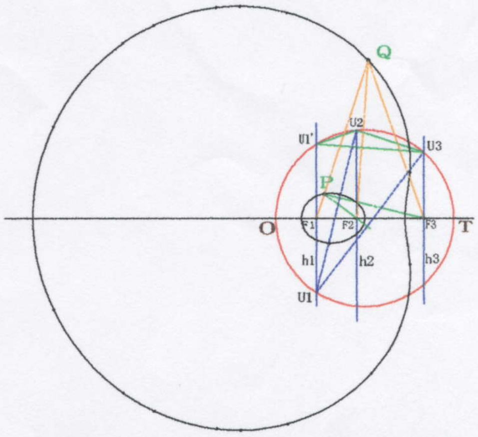



**図2**　直極点による卵形線の定義説明図

## 3　Dovalの性質

### 3.1　第三焦点の文献１による定義

卵形線のおいて、$F_1$ を通る半直線が、卵形線の内分枝、外分枝と交わる点を P,Q とすると、$F_1P \cdot F_1Q$ =一定である

また、g 上に $F_1P \cdot F_1Q = F_1F_2 \cdot F_1F_3$ となる点 $F_3$ を第三焦点という。

### 3.2　短軸と、第三焦点の新定義

卵形線の内分枝の対称軸の中点と、その点から卵形線上の最も近い点を結ぶ線分を短軸をいう。この短軸の垂直二等分線は、第三焦点を通る[3)]。

### 3.3　等距離円の中心から F1、F2, F3 までの距離と任意定数の関係

卵形線が$mr_1 \pm nr_2 = kc$と定義されたとき

$$OF_1 = n^2 \cdot c／(m^2-n^2)$$

$$OF_2 = m^2 \cdot c／(m^2-n^2)$$

$OF_3 = k^2 \cdot c／(m^2-n^2)$である。

### 3.4　離心率と卵形線

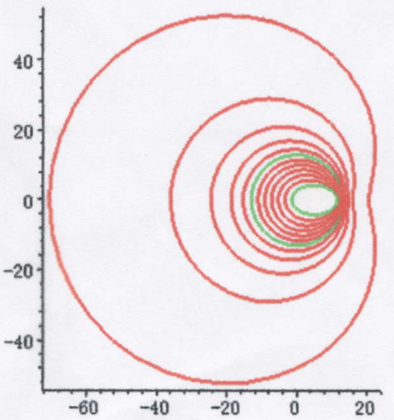
卵形線の対称軸上で接する円を補助円という。この円の半径を１としたとき、円の中心の左右に、距離 n/k, m/k（＜１）の位置に $F_1$, $F_2$ がそれぞれある。この n/k, m/k を左離心率 $e_L$、右離心率 $e_R$ をいう。卵形線は、この左右の離心率により、形が一意的に決まる

## 4　共焦点「4」なDoval群

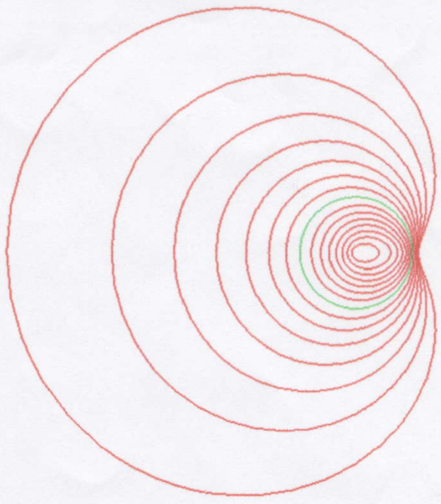
卵形線には、３つの焦点があり、そのうち任意の２つを共有する卵形線群と、３焦点を共有する卵形線群が考えられる。

### 4.1　２つの焦点を共有する Doval 群

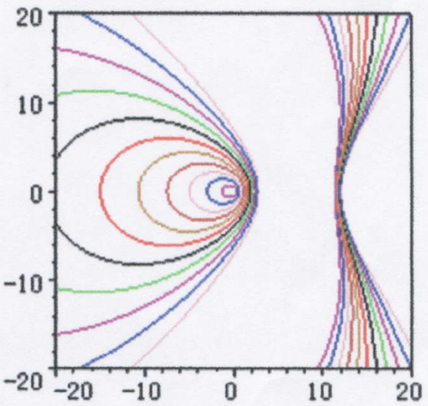
①　２焦点　F1、F2　が共有な卵形線群




②　２焦点　F1、F3　が共有な卵形線群



③２焦点　F2、F3　が共有な卵形線群




### 4.2　３つの焦点を共有する Doval 群

卵形線の直極点の定義（図２）において $F_1,F_2,F_3$ を固定し,O を移動させて、卵形線を求めれば、共焦点であることは明らかである。式では、　$x=OF_1=n^2 \cdot c/(m^2-n^2)$

$F_1F_2 = a = c$、$F_2F_3 = b$　とすると

$$OF_2 = x+a = m^2 \cdot c/(m^2-n^2)$$

$$OF_3 = x+a+b = k^2 \cdot c/(m^2-n^2)$$

すると、上の３式から

$e_L = n/k = \mathrm{sqrt}(x/(x+a+b))$

$e_R = m/k = \mathrm{sqrt}((x+a)/(x+a+b))$

ここで、a, b を固定し

x を変えると、共焦点な卵形線の離心率が求まる。Maple で $e_L$、$e_R$から描いた。

さて、図３では、共焦点な卵形線の**内分枝の短軸の垂直二等分線が第三焦点を通る**ことを示している。図４は、共焦点な卵形線群の内外分枝である。x=0　の時　内外分枝は、一致し円になる。

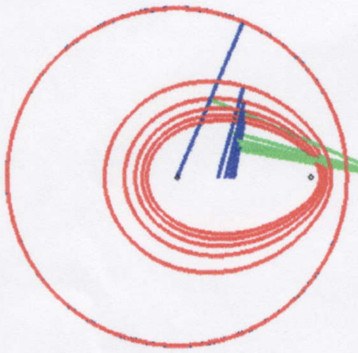


**図３　３焦点共有な卵形線群**（内分枝）
とその短軸および垂直２等分線

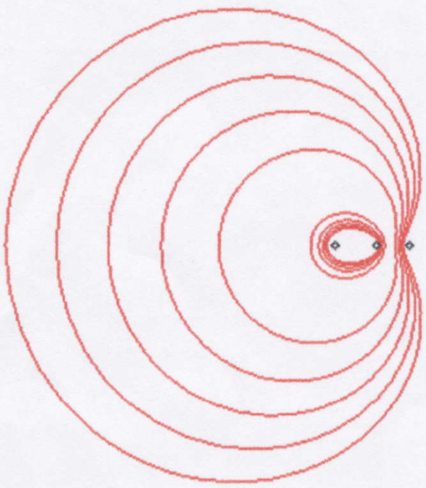


**図４　共３焦点な卵形線の内外分枝**５ペア

## ５　むすび

楕円の焦点の共焦点という性質が、それを一般化した卵形線の焦点にも付随しており、それを図示できた。これによりデカルトの卵形線（４次曲線）が身近なものになった。点、直線、三角形、円など、基本図形を用い、その運動として、卵形線が定義できるが、今回の内容は、卵形線の光学レンズ系への応用や、卵形線の物理的応用をへの糸口になるのではなかろうか。

参考文献


[1]ロックウッド、松井政太郎訳”カーブ”、みすず書房（１９６４）

[2]蛭子井博孝；”デカルトの卵形線の性質に関する考察ーその幾何学的構図ー”、図学研究, 49,（1990）

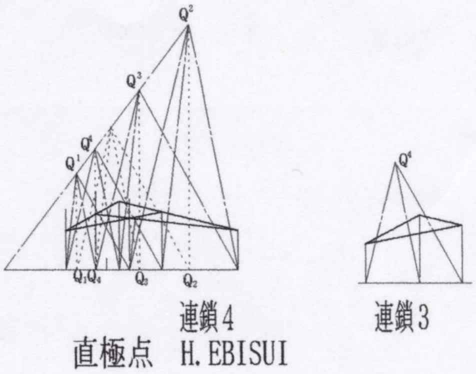
[3]蛭子井博孝；”デカルトの卵形線の短軸に関する一定理”；図学研究、70 号,1995、12 月

[ 4] 蛭子井博孝 ;"TWO KINDS (Chocoid,Tajicoid) OF CURVES EXTENDED FROM THE OVAL" ;10th ICGG Proc, p.94~98,2003

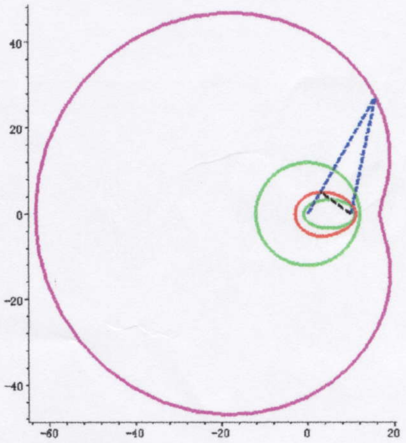

## Appendix

①　直極点とその拡張

直極点（下図右）とは、３角形の３頂点から、ある直線に垂線を下し、その足から、頂点の対辺に、下した垂線３本が交わった点をいう。




②　Doval の内分枝（卵形線）、外分枝



③　等距離円