●研究論文

デカルトの卵形線の内外分枝の非対称軸について

On asymmetry axes of the Oval of Descartes

蛭子井 博孝 *Hirotaka Ebisui*

概要

デカルトの卵形線の外分枝には対称軸（外短軸×2）と非対称軸（外長軸）の2つがあり，後者の定義は，“対称軸の中点と，そこから外分枝上のもっとも遠い点とを結ぶ線分”である．その長さは，対称軸の長さの半分をaoとし，左右離心率をe_L, e_Rとすれば，ao $(1+e_Le_R)^{1/2}$である．ところで，デカルトの卵形線の極限がカルジオイドであり，その外長軸を考えることができる．また，内分枝の対称軸（内長軸×2）と非対称軸（内短軸）と外分枝の外短軸，外長軸の4つの軸の長さについて

(内短軸／内長軸)^2＋(外長軸／外短軸)^2＝2

である計量不変式が成り立つ．

キーワード：卵形線／外分枝／長軸／短軸／計量不変式

Abstract

We define the inner (+) and the outer (−) part of the Cartesian Oval as $mr_1 \pm nr_2 = kc$ on bipolar coordinates.

We can consider on Minor axis (asymmetry axis) of the inner part of the Oval, and can define Major axis (asymmetry axis) of the outer part of the Oval. This major axis is a segment which connects the middle point O of symmetry axis and the point Fp on the oval, which is at the longest distance from the point O. Then, the length of major axis is ao $(1+e_L\ e_R)^{1/2}$ (where ao is a half of the length of the symmetry-axis, e_L, e_R are left and right eccentricity of the Oval, respectively.) And, we can say that Cardioid is the special case of Cartesian Oval. In this case, e_L and e_R are equal to 1 and the length of the major axis is ao $2^{1/2}$.

Moreover, we have found the following Lemma.

[Lemma] Let bi be the length of Minor axis of the inner part of the Oval, let ai and ao be the half length of symmetry-axis of the inner and outer part, respectively. Let bo be the length of the Major axis of the outer part. Then, the following invariant holds. $(bi / ai)^2+(bo / ao)^2=2$

Keywords : Oval / Outer part / Major axis and its length / Invariant

1．はじめに

デカルトの卵形線は，楕円の拡張であり，その性質は，他の凸閉曲線としての卵形線[1]に比べ，はるかに様々な，古典幾何学的性質を持っている。その中で，楕円の短軸に相当する概念を見つけ以前報告[2]してきた。そのとき，デカルトの卵形線がいわゆる凸の卵形線となる内分枝に話を限って考察した。しかし，デカルトの卵形線は，xy座標系では，4次曲線であり，二重の閉曲線であり，その内分枝，外分枝を合わせたものとしての性質もあり，今回は，その外分枝にも短軸に相当する概念を定義し，その性質を考察した。また，外分枝は，特別の場合に，カルジオイドという曲線になる。この特殊例についても，若干の考察を行った。最後に，この卵形線という4次曲線の内分枝と外分枝の両方の軸の長さに関する計量的な不変式を見いだしたのでここに報告する。

2．外分枝の定義

卵形線の外分枝の定義は，拙論2）の内分枝の定義と同様のものであると言えるが，再度，外分枝のみに着目して以下に述べる。

「外分枝の定義1」

図1のように，『定円と定点（定円内）からの距離の比が一定な曲線で，定円外にある閉曲線』をいう。ここで，定円からの距離とは，1点と円周上の点とを結ぶ，定円から最短の距離をいう。このとき，一点から定円までの距離である線分は，定円の法線上（中心線上）にある。

「外分枝の定義2」

双極座標では，次の式で表される。

$$mr_1 - nr_2 = kc \quad (k>m>n>0) \tag{1}$$

ここで，r_1，r_2は，2つの極から曲線上までの距離で，cは，双極間の距離である。

「外分枝の定義3」

図2のように『定円Oの1つの半径上に2定点をと

る．その2定点（F_1，F_2）を通る互いに平行な直線l_1，l_2と円周との交点をM, M', N, N'とする．ここで，直線MNの延長上にON // F_1Qとなる点Qをとる．（このとき，パップスの定理より，OM // F_2Qである．）つぎに，直線l_1，l_2をF_1，F_2を中心に回転させ，同様な作図より，Qの点列を求めると，それは，デカルトの卵形線の外分枝を描く．』

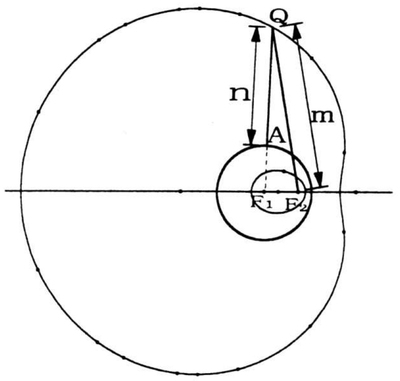

図1　定義1

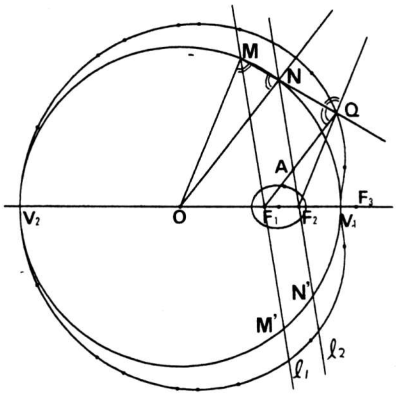

図2　定義3

「定義1が定義2と同値であることの証明」

定義1より，$F_1A+AQ=QF_1$，よって，$R+(n/m)r_2=r_1$

$mr_1-nr_2=mR=kc$となる．$R=(kc)/m$とおけばよい．

「定義3が定義2と同値であることの証明」

図2において，$F_1F_2=c$, $OF_1:OF_2=n:m$とすると，任意定数kを含むので$m\neq n$のとき

$ON=OM=kc/(m-n)$とおける．すると，△OMNは，二等辺三角形でありON // F_1Qと，OM // F_2QよりF_1QとF_2Nの交点をAとすると△AQF_2のQにおける外角の二等分線が，QNである．

よって，$F_2Q:QA=F_2N:NA=OF_2:OF_1=m:n$

$\therefore QA=(n/m)\ F_2Q$　　(2)

また$F_1A=ON(m-n)/m=kc/m$　　(3)

$F_1Q=r_1$，$F_2Q=r_2$．．．(4)とすると

$F_1Q-QA=F_1A$および(2)，(3)，(4)より

$r_1-(n/m)r_2=kc/m$　$\therefore mr_1-nr_2=kc$

さて，円Oの外部に点Qがあり，外分枝は，直線F_1F_2に関して対称であることも明らかである．さらに，外分枝は，円Oと直線F_1F_2の交点V_1，V_2で円Oと接することも，l_1，l_2が直線F_1F_2と重なるように動くことからも明らかである．逆に，円Oは，卵形線の外分枝の内接円である．

さて，円Oの半径$OM=kc/(m-n)$とおけることから，この長さで外分枝を規格化する，デカルトの卵形線の外分枝族は，図3のようになる．ここで，円Oに対して，

$OF_1/OV_1=(cn/(m-n))/(kc/(m-n))=n/k=e_L<1$

同様にして$OF_2/OV_1=m/k=e_R<1$となり，内分枝の場合と同様，e_L，e_Rが外分枝における左離心率，右離心率である．図3のカッコ内数値は，(e_L，e_R)である．

さて，対称軸の線分V_1V_2を卵形線の外分枝の外短軸と呼ぶことにする．これは，内分枝の長軸に相当する．

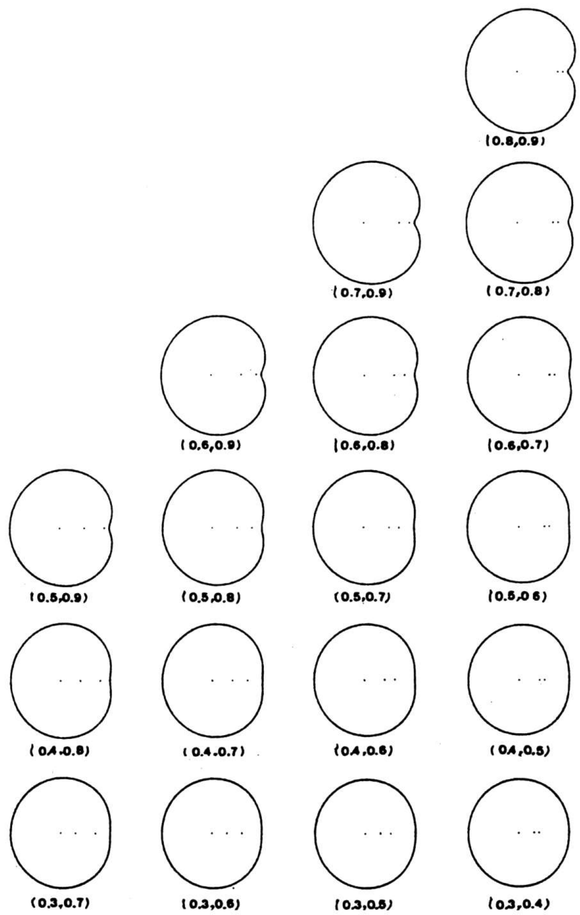

図3　外分枝のいろいろ

3．外分枝の長軸

3－1．外分枝の長軸の定義

2節で外分枝の外短軸が分かった．そこで，外分枝に内分枝の短軸と同様の概念を定義する．図4のように『卵形線の外分枝の長軸は，その対称軸の中点と外分枝上の点Qを結ぶ線分の内最も長いもの』と定義する．

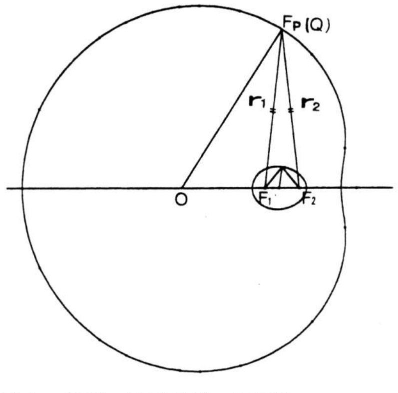

図4　長軸（外長軸）の定義

3－2．外分枝の長軸の位置とその導出

外分枝が，$mr_1 - nr_2 = kc$ で定義されているとき，図4におけるように，対称軸をx軸，その中点を原点O（0, 0），外分枝上の点をQ（X, Y）とする．$\angle QF_1F_2 = \theta$ とすると，$OF_1 = nc/(m-n)$ より，余弦定理を用いて

$$X^2 + Y^2 = r_1^2 + (nc/(m-n))^2 - 2r_1(nc/(m-n))\cos(\pi-\theta) \quad (5)$$

また，$\triangle QF_1F_2$ において，余弦定理より，

$$r_2^2 = r_1^2 + c^2 - 2r_1c\cos\theta \quad (6)$$

(1)，(5)，(6)式より，r_2，θ を消去すると

$$OQ^2 = X^2 + Y^2 = -m/n(r_1 - kc/(m-n))^2 + (k^2+mn)c^2/(m-n)^2$$

OQは，上式が，r_1 の2次式より，$r_1 = kc/(m-n)$ のとき，最大値 $\sqrt{((k^2+mn)\ c^2/(m-n)^2)}$ をとる．これは，前節の円OのOM ＝ ao ＝ $kc/(m-n)$ と e_L，e_R を用いて表せば，bo ＝ $ao\sqrt{(1+e_L e_R)}$ となる．ところで，$ao = kc/(m-n)$ は，外分枝の定義式 $mr_1 - nr_2 = kc$ において $r_1 = r_2$ のときの $r_1 = kc/(m-n)$ と一致する．

ゆえに，『卵形線の外分枝の長軸（外長軸と呼ぶことにする．）は，焦点 F_1，F_2 から等距離にある卵形線上の点（遠点FPと呼ぶ）と，対称軸の中心を結ぶ線分である．その長さは，bo ＝ $ao\sqrt{(1+e_L e_R)}$ である．』

3－3．外分枝の外長軸の性質

ここでは，の卵形線の内分枝の短軸の性質[2]と同様の性質について，その性質と図のみを列記する．なお，前節から明らかに，外長軸は，非対称軸である．

性質［1］卵形線の外分枝の外長軸は，遠点（F_P）における卵形線の法線上にある．図5－1は，一般の位置の法線の作図法[3]，図5－2は，外長軸の位置と法線である．

性質［2］外長軸上の端点（遠点）は，微分幾何学上の頂点ではない．つまり，頂点の定義3による作図法は，図6のようになる．すなわち，直線 l_1 と F_1F_2 が垂直で $\cos\theta = m/k$ の時である．なお，頂点での接線は，第3焦点を通る．証明は，拙論[4]参照．

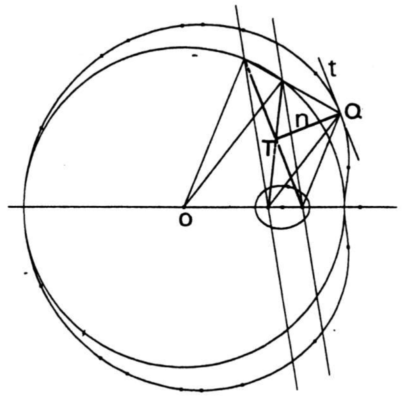

図5－1　外分枝の法線

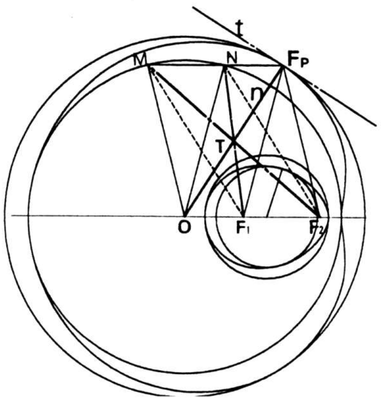

図5－2　外長軸は法線

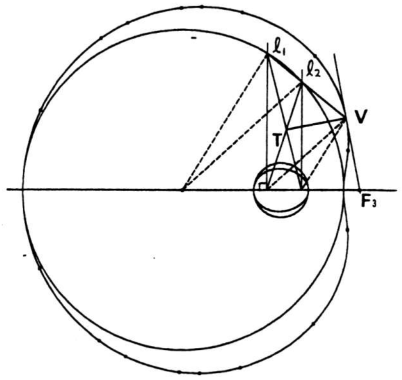

図6　外分枝の頂点

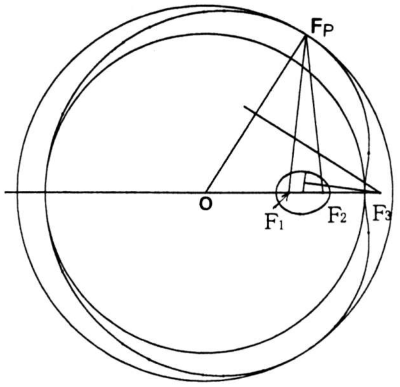

図７　同心円間の外分枝

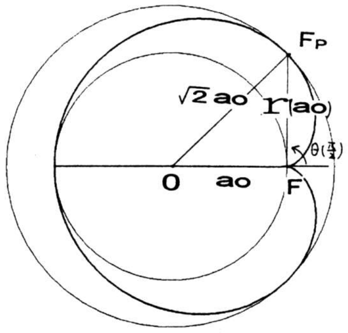

図８　カルジオイドの外長軸

性質［３］図７のように，外分枝は，その内接補助円と外接補助円の２つの同心円の間の空間に存在する．

性質［４］内短軸の場合[5]と同様に，図７のように，外長軸の垂直二等分線は，第３焦点を通る．

３－４．卵形線の外分枝としてのカルジオイドの外長軸

カルジオイド[6]は，古くから心臓形として知られている．その式は，図８のように，極座標の原点，始線をとると，$r = ao(1-\cos\theta)$ (7)

で表される．

ところで，デカルトの卵形線の外分枝の極座標表示は，

$r=c\{km-n^2\cos\theta+n\sqrt{(n^2\cos^2\theta-2\,km\cos\theta+k^2+m^2-n^2)}\}/(m^2-n^2)$. . . (8)

ここで，$ao = kc/(m-n)$ であり，$n/k=e_L$, $m/k=e_R$ を１に近づける操作をすると，

$r=\{1-(n/k)^2\cos\theta+(n/k)\ \sqrt{(((n/k)\ \cos\theta)^2-2(m/k)\ \cos\theta+1+(m/k)^2-(n/k)^2)}\}\cdot kc/(m-n)\cdot 1/((m/k)+(n/k))$

より，この式は，(7)式に一致する．

さて，$ao=kc/(m-n)$，e_L，$e_R\to 1$ のとき，３-２節における外分枝の外長軸の長さは，

$bo=ao\sqrt{(1+e_L e_R)}\to\sqrt{2}\ ao$ となる．

つまり，外分枝の内接補助円の$\sqrt{2}$倍が，外接補助円の半径になるのである．

これは，(7)における$\theta=\pi/2$のとき，$r=ao$ で図８のようにカルジオイドの対称軸の中点からの距離が最も長い長さが$\sqrt{2}\ ao$ になることを意味している．

このように，外分枝の長軸の長さは，$e_L=1$，$e_R=1$ の極限のとき，最大でも対称軸の長さの$\sqrt{2}$倍であることを意味している．

４．卵形線の内分枝の短軸（内短軸）と外分枝の長軸（外長軸）の関係

デカルトの卵形線は，２節の定義１で表されるとき，円内と円外に同じ比をもつ内分枝と外分枝が，描ける．つまり，定義２では，$mr_1\pm nr_2=kc$ となり，±の符号をもつ２つの式で表されることになる．

この内分枝と外分枝の関係は，小論[7]における作図法『任意の２つの円 O_{12}，円 O_{21} が補助円として与えられているとき，この卵形線を描くこと．』における図９－１のような関係をもつ．つまり，内分枝の外接円としての円 O_{12} と外分枝の内接円としての円 O_{21} があるとき，その２つの相似中心が，F_1，F_2 である．ここで，円 O_{12} は，円 O_{21} に含まれる．その時，F_1，F_2 と円 O_{12} に定義３を適用し，F_1，F_2 と円 O_{21} に定義３を適用しても，内，外分枝が得られる．また，図９は，内分枝の内接円（内短軸補助円）と外分枝の外接円（外長軸補助円）を描いている．この４つの円の半径は，内分枝の短軸と長軸の関係，外分枝の短軸（外対称軸）と長軸（外長軸）の関係より，短い順に次の４つである．

$ai\sqrt{(1-e_L e_R)}=bi,\ ai,\ ao,\ ao\sqrt{(1+e_L e_R)}=bo$

となる．

ここで，$(bi/ai)^2=1-e_L e_R$

$(bo/ao)^2=1+e_L e_R$ より

「定理」$(bi/ai)^2+(bo/ao)^2=2$

が成立する．ただし，$0<bi<ai,\ ao<bo<\sqrt{2}\ ao$.

これは，二重閉曲線である卵形線の内接または，外接する４つの円の半径に関する式であり，式は，離心率というパラメータを含んでなく，その離心率よらないデカルトの卵形線族全体に共通の性質である．それ故，この式を，デカルトの卵形線の内外分枝の存在範囲の計量的不変式ということができる．

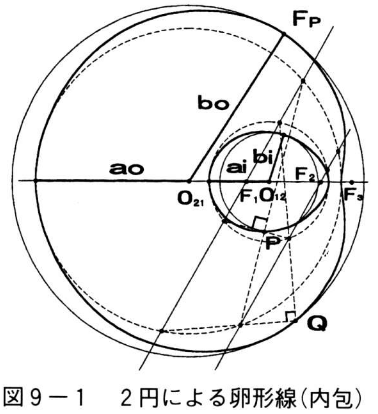

図９－１　２円による卵形線(内包)

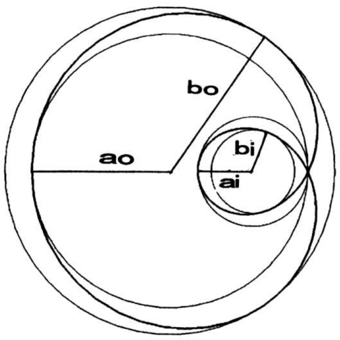

図９－２　(内接)

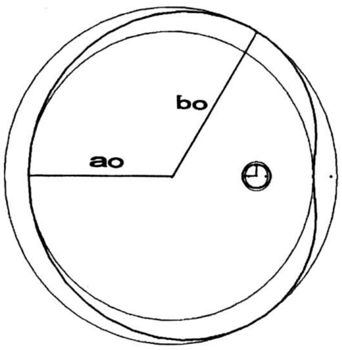

図９－３　(内円が点に近い時)

５．むすび

これまでに見てきたように，デカルトの卵形線には，外分枝があり，その非対称軸である外長軸について，３節のような様々な性質が，分かってきた．さらに，デカルトの卵形線という４次曲線『$mr_1 \pm nr_2 = kc$ をｘｙ座標に直すと $[m^2(x^2+y^2)+n^2\{(x-c)^2+y^2\}-k^2c^2]^2=4m^2n^2\{(x-c)^2+y^2\}(x^2+y^2)$』は，内分枝と外分枝があり，その曲線の存在範囲が，任意定数のパラメータ k, m, n, c（$k > m > n > 0$）の値に関わらず，軸の長さについて，

(内短軸／内対称軸)^2＋(外長軸／外対称軸)^2＝１／２

という，古典幾何の計量的不変な性質をもつことが分かった．

さらに，内短軸と外長軸の性質について，その軸の交点は，何を意味するのか，内分枝の外接円と外分枝の内接円，つまり，２つの補助円から卵形線は，作図（定義）できるが，内分枝の内接円（内短軸を半径とする円）と外分枝の外接円（外長軸を半径とする円）の２つの補助円から卵形線を定義する方法はないのか等，これから内，外分枝の間の性質を調べる必要がある．これは，楕円にはない，４次曲線としての卵形線固有の幾何学的性質だからである．

参考文献

［1］ 蛭子井博孝：Basic と CAD による卵形線の幾何学．1997年度大会（東京）学術講演論文集，(1997)．
［2］ 蛭子井博孝：デカルトの卵形線の短軸および卵形面．図学研究，68，p. 3–p. 8，(1995)．
［3］ 蛭子井博孝：デカルトの卵形線の性質に関する考察—その幾何学的構図—．図学研究，49，p. 13，(1990)．
［4］ 蛭子井博孝：デカルトの卵形線の曲率円．図学研究，19，(1976)．
［5］ 蛭子井博孝：デカルトの卵形線の短軸に関する一定理．図学研究，70，p. 13–p. 15，(1995)．
［6］ ロックウッド：カーブ．みすず書房，(1964)．
［7］ 蛭子井博孝：デカルトの卵形線の二，三の定理．図学研究，12，p. 39–p. 40，(1973)．

●1999年９月16日受付

えびすい　ひろたか
阪大　応用物理修了後　高校数学教師　SE
現在　卵形線，卵形面研究中
論文賞（デカルトの卵形線の一連の研究）
古典幾何，CAD，Maple V に興味
E-mail hirotaka.ebisui@nifty.ne.jp
現在 dovaloid@movie.ocn.ne.jp