デカルトの卵形線の離心率による形状（凹凸）について

On the 凹凸 of the outter part of Descartes' Oval defined by both eccentricities

蛭子井　博孝　(Hirotaka Ebisui)

要約：本研究では、デカルトの卵形線の定義方法とその形状把握における関係について、報告する。

今、デカルトの卵形線族は、$mr_1 \pm nr_2 = kc$と双極座標により定義される。ここで、任意定数k，m，n，cの条件（$k>m>n>0$）の意味は、空間における２つの円錐面の相貫曲線[1)]を考察すると明らかになる。これにより、卵形線の作図における原点の取り方や、主要点の位置関係が明らかになる。さらに、卵形線の内外分枝の形は、左右の離心率e_R，e_Lにより決まる。そして、その外分枝の凹凸は、e_R+e_L-1の符号により定まる。以上の事柄を以前報告した内容を振り返りつつ明らかにする。

キィワード：凹凸/卵形線/左右離心率/円錐面相貫曲線/任意定数/主要点

Abstract: In this paper, we mention about the arbitrariness of some definitions of Descartes' Oval. And we calculate the distances among some main points of the oval using literal constants. These distances are important to draw the oval using functional graphic soft. Next we consider on the 凹凸 using the radiuses of curvature on the Vertexes, and we obtain the outter part of the oval is 凹 if $e_R+e_L>1$, and 凸 if $e_R+e_L \leqq 1$ where e_R, e_L are right eccentricity and left eccentricity respectively.

Keywords：凹凸/ oval/ right or left eccentricity / intersection of circular cones/ arbitrary constant / main points

１．はじめに

デカルトの卵形線の定義を数多く見つけてきた。しかし、その同値性の証明は、今までは、数学的厳密性に欠けていたかもしれない。それは、これまでの研究が、証明がメインテーマでなく、様々な定義より解る卵形線の性質について、述べたいからであった。また、作図法により、一つの定義の図から他の定義の図が、描けることで、同値性をある程度言えるからである。厳密な証明は、一つの定義の任意性と他の定義の持つ任意性を見極める仕事である。ところが、定義の拡張性を考えたとき、その定義の持つ意味が同じなら、皆同じ拡張性を持ち、１つの事柄が、全然広がらないことになる。たとえば、卵形線の定義、”点と円からの距離の比が一定な曲線”の円を任意な曲線に拡張するのと、双極座標の式を２次式などに拡張するのとでは、同じではない。だから、卵形線の定義が、違うと違う曲線を表しているといっているのではない。一つの定義の持つ任意性を見極めることが大事であるといいたいのである。

デカルトの卵形線に関しては、３焦点の関係の理解が、どうしても必要になるが、その説明は、拙論１）の５－２節を繰り返すことになり、ここでは、図２、図３、より、第３焦点の考えるところまでにする。しかし、それでも、デカルトの卵形線の内外分枝の凹凸形状までは、把握できる。

２．卵形線の定義と任意性

デカルトの卵形線は、図形幾何学的定義は、

[1]：”点と円からの距離の比が一定な曲線”

[2]：”回転対称軸が平行で頂角の異なった円錐面の相貫曲線を、回転軸に垂直な平面へ正投象したもの”

さらに、双極座標では、次のように定義される。

[3]：$mr_1 \pm nr_2 = kc$　　　　... (1)

ここで、＋nは、内分枝、－nは、外分枝で　、c　は、

双極（焦点[S_1，S_2 or F_1，F_2]）間距離である。
k，m，nは、（k＞m＞n＞0）を満たす任意定数。
－－－－－－

さらに、同じ位置の卵形線は、別な式である第二焦点、第三焦点[1]（S_3 or F_3）を用いた関係式、

$$-kr_2+mr_3=\pm nR_{23} \qquad ...(2)$$
$$\pm nr_3+kr_1=mR_{13} \qquad ...(3)$$

で定義される。ここで、

$R_{23}=c(k^2-m^2)/(m^2-n^2)$
$R_{13}=c(k^2-n^2)/(m^2-n^2)$　は

それぞれ、第二第三焦点間、第一第三焦点間の距離である。また、これは、拙論1)のp．43の式から、±nを強調して書き換えた式である。《また、そこでは、$-mR_{31}$となっていたのを、$\pm mR_{31}$と訂正して考えた式である。誤りであったので、お詫び訂正したい。》

さて、（2）、（3）においてr_2，r_3は、第二焦点（極）、第三焦点からの同じ卵形線上の点までの距離で、同じく、＋nが内分枝、－nが外分枝を描く。
この式の導出は拙論1）4節を参照されたい。

－－－－－－

[4]：’一方を内包する2つの補助円’による定義[1] 2)もある。証明文献4)参照

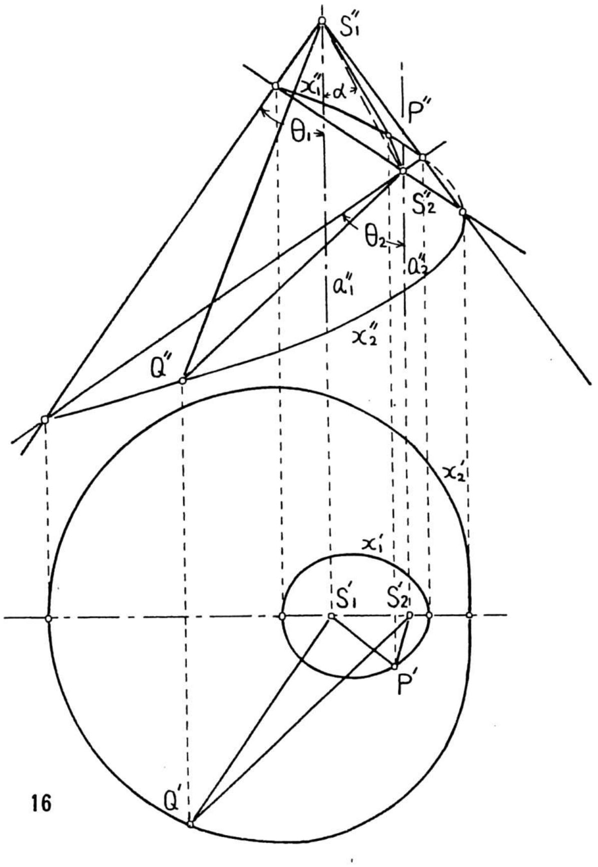
さらにまた、数種の定義方法を見つけてきた。

さて、これらの定義、それぞれが、卵形線の内外分枝ただ一組を定義しているのでなく、デカルトの卵形線族を定義しているため、その形状を統括的に捕らえることが難しい。つまり、それぞれの定義が、任意性を含んだ定義になっているのである。例えば、定義[1]では、点と円の位置関係やその比を、自由に取りうる任意性がある。さらに[2]では、軸間距離、頂角の大きさの自由に取る任意性がある。[3]では、いわゆる式の文字係数である任意定数k、m、n，cの決定により、卵形線族の中の様々な形を描くことができる。さらにまた、[4]では、二つの円の半径と中心間距離を決めることにより卵形線の形ばかりでなく、外の円に外接する外分枝と中の円に内接する内分枝の位置関係が明らかになる。

いずれにしても、その定義の任意性は、それを個々に決定し、数多くの卵形線を描いてみることにより、認知心理学的には、一歩一歩把握されるのである。しかし、これで、全体像が把握できたといえるものはないかと思いたくなる。それに、いくらかでも答える方法として、左右の離心率による凹凸の形状把握とその内外分枝の作画法を考えた。また、存在位置の把握として、2つの補助円による作画法を考えた。これらの作画法により、任意に離心率を与え、デカルトの卵形線の内外分枝を描くことにより、概形把握が、可能になるし、内外分枝の位置関係も明らかになろう。5節参照。

3．円錐面による卵形線の定義

”回転対称軸が平行で頂角の異なった円錐面の相貫曲線を、回転軸に垂直な平面へ正投象したもの”として定義されるデカルトの卵形線が、双極座標で定義する：$mr_1\pm nr_2=kc$　の式の任意定数k、m、n，cとどのような関係があるかを、ここでは、明らかにする。



16

図1　2つの円錐面による卵形線の定義

今、2つの円錐面の平行な回転軸によって決まる平面をπ_2（立面図），回転軸に垂直な平面をπ_1（平面図）とする。さて、図1のように、頂点S_1，S_2を持つ円錐面の頂角をそれぞれ、θ_1、θ_2とする。ここで、$\cot\theta_1=m$、$\cot\theta_2=n$ とおく。すなわち、m，n は、π_1面に対する円錐面の傾きを表す。また、軸間距離、$S_1'S_2'$ を c とする。さらに、回転軸をa_1，a_2とし、a_1とS_1S_2の成す角をαとおき、$\cot\alpha=k$とおく。相貫曲線（デカルトの卵形線の空間曲線の上側）をx_1とする。x_1上の任意の点PとS_1を結ぶ線分（円錐

面S_1のP点を通る母線上の線分S_1P)の π_1(平面図)面への正射影をr_1とする。 同様に、線分S_2Pの正射影をr_2とする。すると、線分S_1P、S_2Pのa_1軸への正射影は、それぞれ、$m\cdot r_1$, $n\cdot r_2$に等しく、これらの和は、S_1S_2のa_1軸 への正射影 すなわち $k\cdot c$に等しい。ゆえに $mr_1+nr_2=kc$ となり、 k, m, n, c が 空間で意味を持った、双極座標による定義となる。 ここで、$0<\alpha<\theta_1<\theta_2<\pi/2$より、 $k>m>n>0$ (この条件式を得る2つの円錐面の取り方は、妥当である。さらに、厳密に考えるとき、拙論1) 5.2節のように、3つの円錐面の相貫曲線を考える必要がある。) また、空間曲線 x_2 上の点Qについても、同様に考えて、$mr_1-nr_2=kc$ となる。

4. 卵形線の主要点の相対位置

卵形線の内分枝の外接円と外分枝の内接円と3つの焦点間の文字定数による相対位置は、図2のようになる。

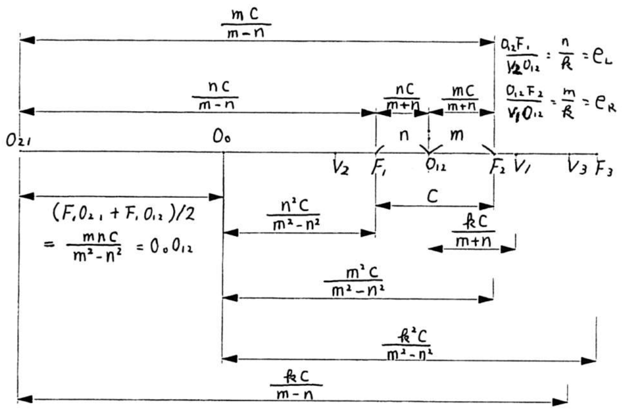


図2 文字定数による主要点間距離

この図では、F_1 F_2の$n:m$の内分点と外分点がそれぞれO_{12}, O_{21}であることが、重要である。このことと内分枝の外接円の半径($O_{12}V_1$)については次のように、定義式から導出される。

(1)の双極座標$mr_1+nr_2=kc$ で表される点Pについて

① PがV_1(右側対称軸端点)にあるとき、

$r_2=r_1-c$ だから (1)に代入して

$mr_1+n(r_1-c)=kc$

$\therefore\ r_1=(k+n)c/(m+n)$ ...(4)

② PがV_2(左側対称軸端点)にあるとき、

$r_2=r_1'+c$ だから (1)に代入して

$mr_1'+n(r_1'+c)=kc$

$\therefore\ r_1'=(k-n)c/(m+n)$ ...(5)

(4)+(5)より、**外接円の半径**は

$$V_1V_2/2=(r_1+r_1')/2$$
$$=((k+n)c/(m+n)+(k-n)c/(m+n))/2$$
$$=kc/(m+n) \quad ...(A)$$

これは、(1)式の$r_1=r_2$の時のr_1の値でもある

また、 $F_1O_{12}=(4)-(A)=nc/(m+n)$

$F_2O_{12}=c-F_1O_{12}=mc/(m+n)$

$\therefore\ F_1O_{12}:F_2O_{12}=n:m$

左離心率 $e_L=O_{12}F_1/O_{12}V_2=n/k$

右離心率 $e_R=O_{12}F_2/O_{12}V_1=m/k$

この離心率と大きさの尺度 c を定めると、卵形線は、一意的に決まる。

さて、同様に、外分枝 $mr_1-nr_2=kc$ について $V_3V_4/2$ つまり、**外分枝の内接円の半径**は、

$O_{21}V_3=kc/(m-n)$である。

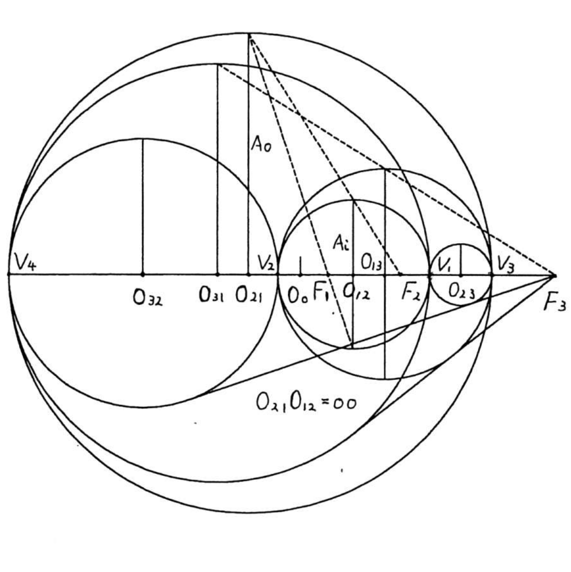


図3 3つの焦点と6つの補助円

また、F_3に関しては、図3におけるように円O_{31}と円O_{13}の相似中心の位置にあり、これから、根気強い計算により

$O_0F_3=k^2c/(m^2-n^2)$ が導出される。

さらに、等距離円[2](卵形線の内分枝と外分枝から等距離にある点の集まりである円(3つある))の中心O_0($O_{12}O_{21}$の中点)からF_1, F_2, F_3までの距離

について

$n^2c/(m^2-n^2)$: $m^2c/(m^2-n^2)$: $k^2c/(m^2-n^2)$ $=n^2:m^2:k^2$ は、記憶しやすい。

5．卵形線の原点と作画法

関数グラフィックソフトで卵形線の図を書くときに、原点として、双極の一点（焦点、S_1 or F_1）を取ることが多い。

例えば、原点をF_1としたときの極座標による卵形線の定義は、(1) の双極を極座標に直すことにより、

$$r_1=c\,(km-n^2\cos(s)-n(n^2\cos^2(s)-2km\cos(s)+k^2+m^2-n^2)^{1/2})/(m^2-n^2) \quad \cdots (6)$$

この時、c、k、m、nを定めると、図4が作画できる。

また（2）式では、原点をF_2として考えるとよい。

次に、二つの補助円の半径(Ao, Ai)と中心（内分枝O_{12}，外分枝O_{21}）間距離(oo)から、図5のように作画できる。

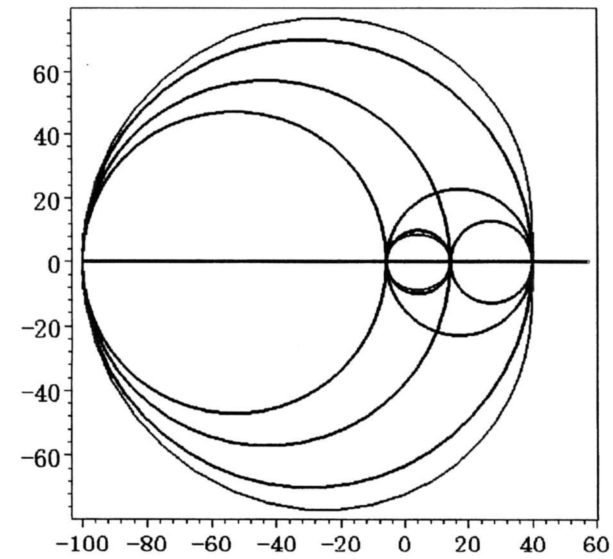
さらに、右離心率と左離心率と双極間距離 c より、卵形線を図6のように作画した。これには、(6) 式の分母分子をk^2で割ってできる離心率の式を用いた。

なお、Ao,Ai,oo とe_R, e_L, c とは、相互変換できる。

以上の卵形線の作画法を表1のような Maple Vのプログラムで作成した。

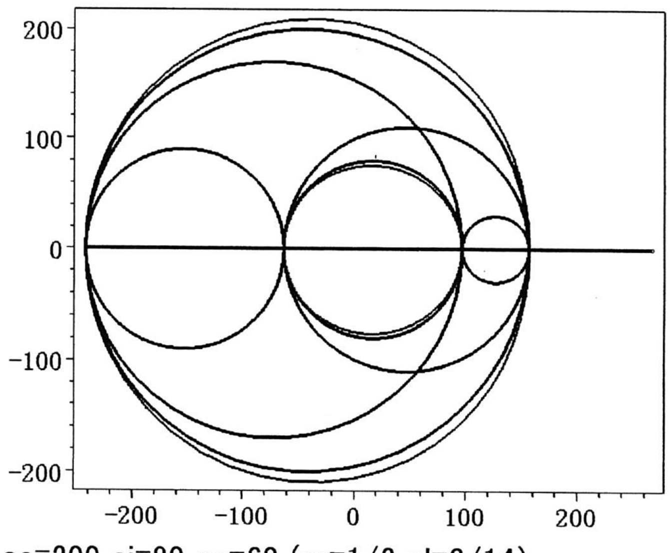
```
[ > #Rishinritu ER EL yori Oval wo egaku
[ > with(plottools):
[ > #input[1]  and henkan
[ > k:=7:m:=4:n:=3:c:=10:
[ > ao:=k*c/(m-n);
[ > ai:=k*c/(m+n);
[ > oo:=2*m*n*c/(m^2-n^2);
[ > er:=m/k; el:=n/k;
[ > #input[2] and henkan
[ > #ao:=200 :ai:=80 :oo:=60:
[ > #c:=2*oo*ao*ai/(ao*ao-ai*ai);
[ > #er:=oo/(ao-ai);
[ > #el:=oo/(ao+ai);
[ > # input[3] and henkan
[ > #er:=9/10: el:=6/10: c:=10:
[ > #oo:=2*er*el*c/(er*er-el*el);
[ > #ao:=c/(er-el);
[ > #ai:=c/(er+el);
[ > # mr1±nr2=kc  -- Origin First Forcus Point
[ > r1in:=c*(er-(el^2)*cos(s)-el*((el^2)*(cos(s)^2)
    -2*er*cos(s)+1+er^2-el^2)^(1/2))/(er^2-el^2):
[ > r1out:=c*(er-(el^2)*cos(s)+el*((el^2)*(cos(s)^2)
    -2*er*cos(s)+1+er^2-el^2)^(1/2))/(er^2-el^2):
[ > # -kr2+mr3=±nR23   [R23=c(k^2-m^2)/(m^2-n^2)]
[ > # ±nr3+kr1=mR13    [R13=c(k^2-n^2)/(m^2-n^2)]
[ > R23:=c*(1-er^2)/(er^2-el^2):
[ > R13:=c*(1-el^2)/(er^2-el^2):
[ > #circle([center],radius):
[ > hojoen12:=circle([el*c/(er+el),0],c/(er+el)):
[ > hojoen21:=circle([-el*c/(er-el),0],c/(er-el)):
[ > hojoen23:=circle([er*R23/(1+er)+c,0],el*R23/(1+er)):
[ > hojoen32:=circle([-er*R23/(1-er)+c,0],el*R23/(1-er)):
[ > hojoen13:=circle([el*R13/(1+el),0],er*R13/(1+el)):
[ > hojoen31:=circle([-el*R13/(1-el),0],er*R13/(1-el)):
[ > hl:=line([-el*c/(er-el)-c/(er-el),0],[R13,0]):
[ > F1:=point([0,0],color=blue):
[ > F2:=point([c,0],color=blue):
[ > F3:=point([R13,0],color=blue):
[ > ovalin:=plot([r1in*cos(s),r1in*sin(s),s=0..2*Pi]):
[ > ovalout:=plot([r1out*cos(s),r1out*sin(s),s=0..2*Pi]):
[ > plots[display]([F1,F2,F3,hl,hojoen12,hojoen21,hojoen23,
    hojoen32,hojoen13,hojoen31,ovalin,ovalout]);
[ >
```

表1 Maple V プログラム リスト



k=7 m=4 n=3 c=10 (er=4/7 el=3/7)

図4 $e_R+e_L=1$の卵形線(k,m,n,c)より作画



ao=200 ai=80 oo=60 (er=1/2 el=3/14)

図5 2つの補助円より作画

補助円を点線にすること

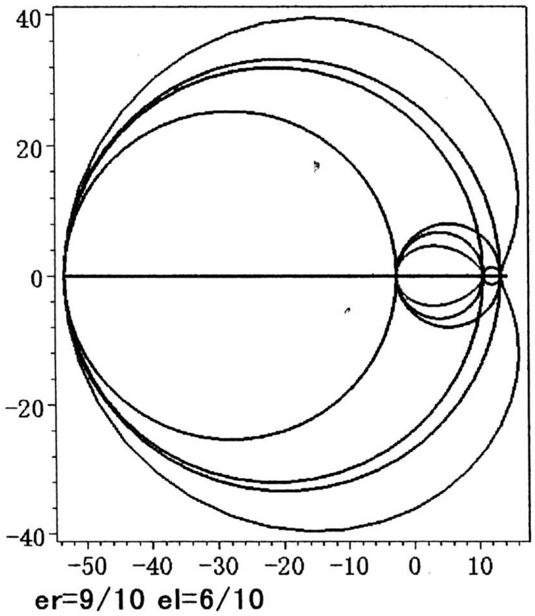


図６　左右離心率より作画

６．頂点の曲率半径と卵形線の外分枝の凹凸

頂点の曲率半径は、拙論２）にあるように、内分枝においては、軸上頂点をV_1，V_2，片方の軸上にない頂点をV_5とし、それぞれの曲率中心をC_1，C_2，C_5とすると、

$C_1V_1=(k-m)(k+n)c/((m+n)(k-m+n))$

の極小値（最小値）から増加し

$C_5V_5=(m(k^2-n^2)^{1/2}-n(k^2-m^2)^{1/2})c/(m^2-n^2)$

の極大値を取り

$C_2V_2=(k+m)(k-n)c/((m+n)(k+m-n))$

の極小値を取る

ここで,$k>m>n>0$　より　すべて正

故に、内分枝は、凸である。

また、$C_2V_2-C_1V_1=2mn(m-n)/((m+n)(k-m+n)(k+m-n))>0$である。

ここで、曲率半径の式を分母子k^2で割れば、離心率による表現になる。

外分枝においては、軸上頂点をV_3，V_4，対称性より片方の軸上にない頂点をV_6とし、それぞれの曲率中心をC_3，C_4，C_6とすると、曲率半径は

$C_3V_3=(k-m)(k-n)c/((m-n)(k-m-n))$が正の時

つまり　「１」　$k-m-n>0$　つまり $1-e_R-e_L>0$　のとき

次第に減少し

$C_6V_6=(m(k^2-n^2)^{1/2}+n(k^2-m^2)^{1/2})c/(m^2-n^2)$

で極小値をとり

$C_4V_4=(k+m)(k+n)c/((m-n)(k+m+n))$

で極大値を取る。つまり、全体が凸

「２」　$k-m-n<0$　のとき、全体は凹になる。すなわち

V_3とV_6の間の外分枝上で曲率＝０　曲率半径＝負の無限大から、正の無限大にかわるところがある。

曲率半径の大まかなグラフは、図７図８のようになる。

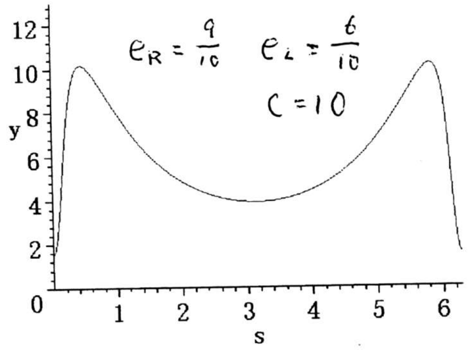
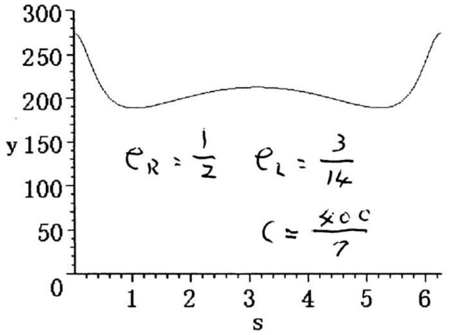
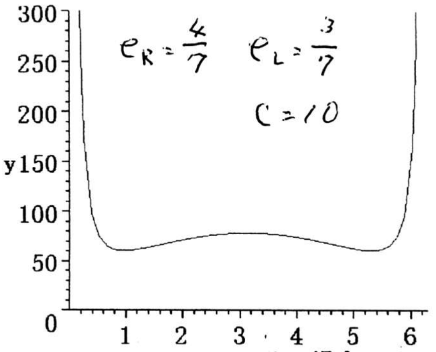


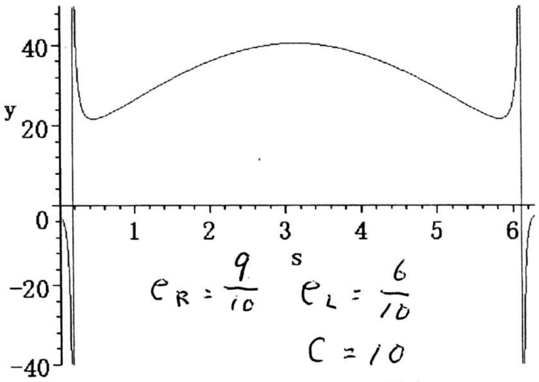
図７　内分枝の曲率半径



１］　$e_R+e_L<1$で　凸の場合



２］　$e_R+e_L=1$　で凸の場合



３］　$e_R+e_L>1$で凹の場合

図８　外分枝の曲率半径

以上　頂点の曲率半径半径の文字式からその正負の符号を考え、卵形線族の凹凸を考えた。また、図８の３つの場合の卵形線を６つの補助円とともに描いたものが図４，５，６である。

７．結び

以上、卵形線の円錐面による定義と任意定数ｋ，ｍ，ｎ，ｃの意味および、主要点間距離、６つの補助円と３焦点の関係を大さっぱに見た。さらに、離心率による卵形線の作画プログラムにより、外分枝の凹凸の場合の図を描いた。さらに、その凹凸の条件の理由も述べた。ただ、ここで述べた事柄が、以前の発表文献の引用によるところが多かったことをお許し願いたい。

参考文献

１）蛭子井博孝；”デカルトの卵形線の二・三の性質”；図学会誌、図学研究、１２号、1973 年

２）蛭子井博孝；”デカルトの卵形線の曲率円”；図学研究、19 号、1976 年 9 月

3) 蛭子井博孝；" 3つの反転をもつ卵形線を拡張した空間4次曲面（反転曲面）；Proceeding of 8th ICGG (new name), 1998.

えびすい　ひろたか

1950 年生 阪大応物修了、高校数学教師、ＳＥ、

論文賞（デカルトの卵形線に関する一連の研究）

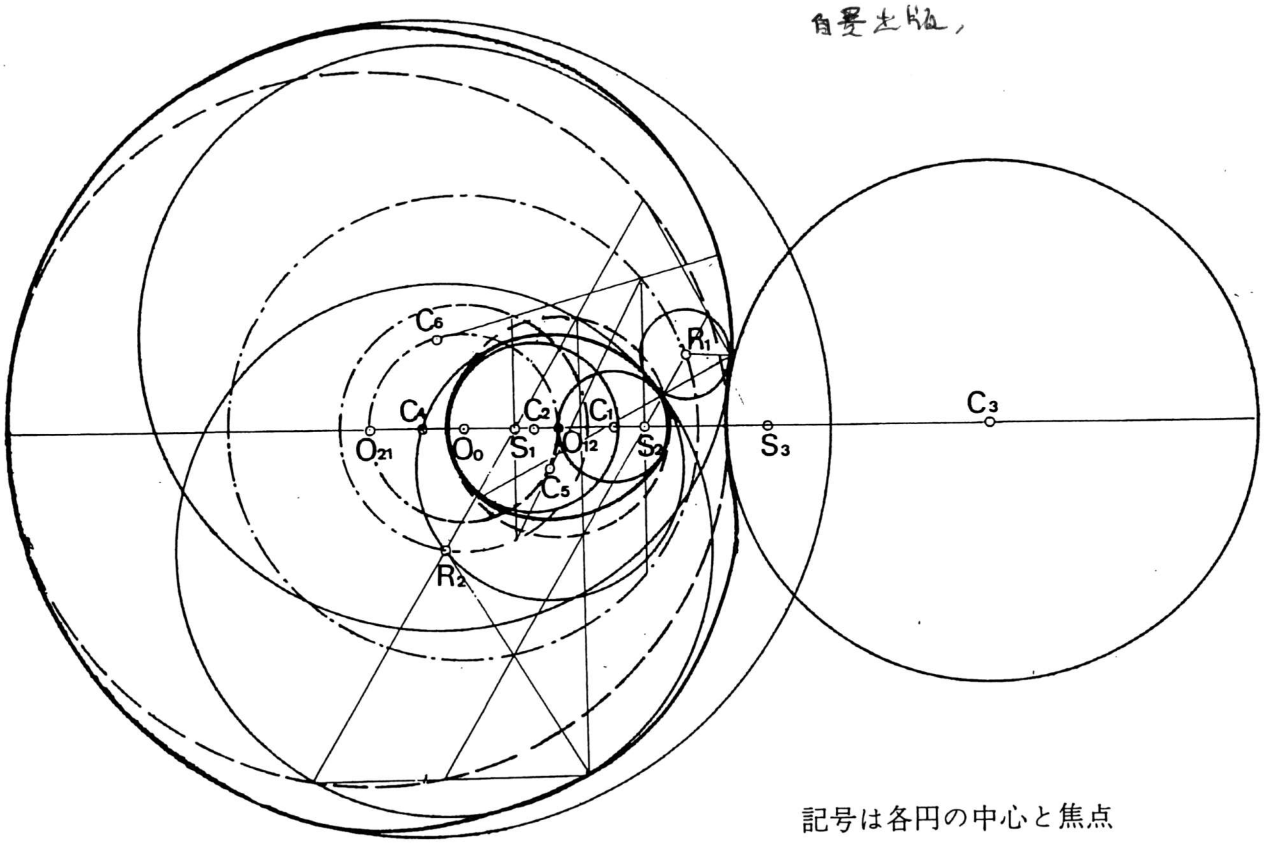
主に、卵形線、卵形面、高次元黄金比などを研究

現在　Free　Email　~~ahib.ebisui@nifty.ne.jp~~

~~hi-ebi@nifty.com~~

2007年7月現在 doraloid@movie.ocn.ne.jp

4) 蛭子井博孝；"学位請求論文"，自費出版，



記号は各円の中心と焦点

補　図