デカルトの卵形線の短軸に関する一定理*

蛭子井　博　孝**

このノートは，一定理の証明とその作図に関するものである。図には，作図線の順序を記してある。そして，証明は，その順序を追うことにより解かるようにした。さらに，解析的証明も付け加える。

1．[定理] デカルトの卵形線の短軸の垂直二等分線は，卵形線の第3焦点を通る。

（定義1）　この卵形線の短軸とは，小論[1]におけるように，卵形線の第1，第2焦点から，対称軸の長さの半分に等しい距離にある点と，対称軸の中点 O_{12} を結ぶ線分をいう。

（定義2）　卵形線の第3焦点とは，卵形線を定義する双極座標式の第1極（焦点），第2極（第2焦点）を結ぶ直線上にある点である。そして，その第1極と第3の点（第3焦点）を用いると，それらを双極とする双極座標式により定義する卵形線が同じ位置に描ける。その式[1]は，$mr_1 + nr_2 = kc$

$$nr_3 + kr_1 = m\frac{(k^2 - n^2)\,c}{(m^2-n^2)}$$

ここで，$F_1F_2 = c$

また $F_1F_3 = \dfrac{(k^2 - n^2)\,c}{(m^2 - n^2)}$

2．[証明]

（円，線分，点を番号で示す。）図参照。

①：＝卵形線に外接する補助円 O_{12} を描く。（逆に，補助円 O_{12} に内接する卵形線を考える。）②：＝中心線を引く。③，④：＝第1焦点，第2焦点 F_1，F_2 を定める。④′：＝ $O_{12}F_1 : O_{12}F_2 = n : m = e_L : e_R$ と考える。⑤，⑥：＝短軸端点（近点）を求める。つまり，F_1，F_2 を中心に，補助円 O_{12} の半径に等しい半径の円を描き，その交点を求める。⑦：＝短軸端点 N_P とする。⑧：＝①を通り，⑥に平行に直線を引く。⑨：＝⑧と円①の交点を N とする。すると，$O_{12}F_2N_PN$ は，平行四辺形。$\therefore F_1F_2 /\!/ NN_P$ ⑩：＝①を通り⑤と平行に直線を引く。⑪：＝同様に交点を M とする。すると，$F_1O_{12}MN_P$ は平行四辺形。$\therefore F_1F_2 /\!/ MN_P$ ⑫：＝N，N_P，M は，同一直線上にある。⑬，⑭：＝パップスの定理より $F_1N /\!/ F_2M$，このとき，四角形 F_1NMF_2 は平行四辺形。さて⑮：＝$\triangle F_1F_2N_P$ の外接円を描く。ここで，$\triangle N_PF_1F_2$ は，二等辺三角形より，直線 NN_PM⑫ は，外接円の接線 (t_1) となる。⑯：＝接線 N_PO_{12} と外接円の交点を U_P とする。⑰，⑱：＝ U_P における外接円の接線 (t_2) と直線 F_1F_2 の交点を O_0 とする。なお，余談になるが，⑲，⑳，⑱＝（㉑）は，同一直線上にある。

次に，O_0O_{12} の長さを求める。⑮⑰より弦 N_PU_P に対する接線が t_1，t_2 より $\angle\alpha = \angle\beta$。② // ⑫より $\angle\alpha = \angle\gamma'$ $\therefore \angle\beta = \angle\gamma = \angle\gamma'$ $\therefore \triangle O_{12}U_PO_0$ は二等辺三角形。ここで，㉒，㉓：＝ O_0 から N_PU_P への垂線の足を㉒，N_P から F_1F_2 への垂線の足を㉓とする。すると

$$\frac{\frac{1}{2}U_PO_{12}}{O_0O_{12}} = \frac{\frac{1}{2}c - O_{12}F_1}{O_{12}N_P} \cdots\cdots (1)$$

明らかに，$\triangle F_1O_{12}U_P \backsim \triangle N_PO_{12}F_2$

$$\therefore F_1O_2 \cdot O_{12}F_2 = U_PO_{12} \cdot O_{12}N_P \cdots\cdots (2)$$

(1)(2) より

$$O_0O_{12} = \frac{\frac{1}{2}U_PO_{12} \cdot O_{12}N_P}{\frac{1}{2}c - O_{12}F_1} = \frac{\frac{1}{2}F_1O_{12} \cdot O_{12}F_2}{\frac{1}{2}c - O_{12}F_1}$$

---

* 平成7年9月26日

** 岩国市元町4丁目12－10

$$=\frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{nc}}{\mathrm{m}+\mathrm{n}}\cdot\dfrac{\mathrm{mc}}{\mathrm{m}+\mathrm{n}}}{\dfrac{1}{2}\mathrm{c}-\dfrac{\mathrm{nc}}{\mathrm{m}+\mathrm{n}}}=\frac{\mathrm{mnc}}{\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2}\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

㉔：＝U_Pを通る△$F_1N_PF_2$の外接円の直径ℓを引く。

㉕：＝N_Pよりℓに垂線ℓ_0を下し，その足をPとする。

㉖：＝ℓ_0と直線②との交点をF_3とする。

$O_0U_P \,/\!/\, N_PF_3$より$\angle\delta=\angle\beta=\angle\gamma$

∴$F_3N_PO_{12}$は，二等辺三角形。

（本題の証明）上の作図より

$\triangle O_{12}U_PO_0 \backsim \triangle O_{12}N_PF_3$で，それぞれ，二等辺三角形　∴$O_{12}O_0\cdot O_{12}N_P=O_{12}U_P\cdot O_{12}F_3$

$$\therefore O_{12}F_3=\frac{O_{12}O_0\cdot O_{12}N_P}{O_{12}U_P}=\frac{O_{12}O_0(O_{12}N_P)^2}{O_{12}U_P\cdot O_{12}N_P}$$

$$=\frac{O_{12}O_0(O_{12}N_P)^2}{O_{12}F_1\cdot O_{12}F_2}\qquad(\because(2))$$

$$=\frac{\dfrac{\mathrm{mnc}}{\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2}a^2(1-e_Le_R)}{\dfrac{\mathrm{nc}}{\mathrm{m}+\mathrm{n}}\cdot\dfrac{\mathrm{mc}}{\mathrm{m}+\mathrm{n}}}$$

（∴(A)および小論(1)より

$$O_{12}N_P=a\sqrt{1-e_Le_R}=\frac{\mathrm{kc}}{\mathrm{m}+\mathrm{n}}\sqrt{1-\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}\cdot\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}}$$
）

$$=\frac{\mathrm{k}^2-\mathrm{mn}}{\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2}\cdot\mathrm{c}\qquad F_1F_3=O_{12}F_3+O_{12}F_1$$

$$\therefore F_1F_3=\frac{(\mathrm{k}^2-\mathrm{mn})\mathrm{c}}{\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2}+\frac{\mathrm{nc}}{\mathrm{m}+\mathrm{n}}=\frac{\mathrm{k}^2-\mathrm{n}^2}{\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2}\mathrm{c}$$

ゆえに（定義2）よりF_3は，第3焦点である。

逆に，**短軸の垂直二等分線と対称軸の交点が，第3焦点である。**といえる。

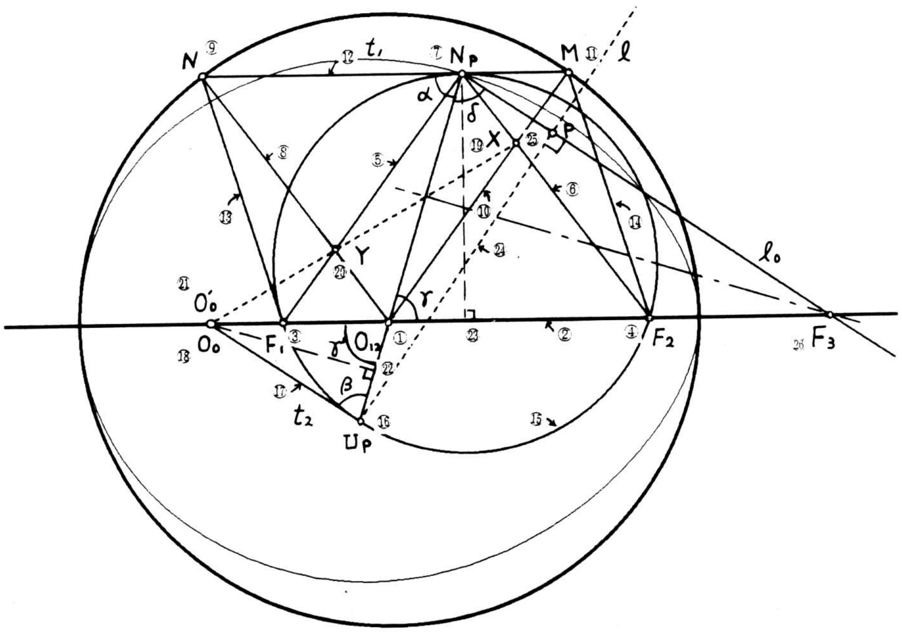

図　短軸と第3焦点

3．解析幾何による証明

O_{12}を原点(0，0)とし，直線F_1F_2をx軸とする。F_1F_2=cとし，$O_{12}F_1:O_{12}F_2=\mathrm{n}:\mathrm{m}$とする。

また，円O_{12}の半径をaとする。

短軸の端点は，

$\left((\mathrm{m}-\mathrm{n})\cdot\mathrm{c}/\{2(\mathrm{m}+\mathrm{n})\},\ \sqrt{a^2-\mathrm{c}^2/4}\right)$

短軸の垂直二等分線の式は

$$\mathrm{Y}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\mathrm{c}^2/4}=\frac{-\mathrm{c}(\mathrm{m}-\mathrm{n})/(\mathrm{m}+\mathrm{n})}{2\sqrt{a^2-\mathrm{c}^2/4}}\left\{\mathrm{X}-\frac{(\mathrm{m}-\mathrm{n})\mathrm{c}}{4(\mathrm{m}+\mathrm{n})}\right\}$$

Y＝0のとき，$a=\mathrm{kc}/(\mathrm{m}+\mathrm{n})$とおくと

$X = (k^2 - mn)c / (m^2 - n^2)$

$\therefore F_1X =$

$O_{12}X + F_1O_{12} = (k^2 - n^2) \cdot c / (m^2 - n^2)$

ここで，F_1X は，定義2の F_1F_3 の長さに等しい。

ゆえに，短軸 $O_{12}N_P$ の垂直二等分線は，第3焦点を通る。

以上，定理の証明を終るが，短軸と，3つの焦点の位置関係が，図のように単純であることがわかり，第3焦点が，身近なものとなった。

参考文献

1）蛭子井博孝；“デカルトの卵形線の短軸および卵形面”；図学研究 **68**， p.2 ～ p.8.