デカルトの卵形線の短軸および卵形面*

蛭子井　博　孝**

1．序論

1．1　はじめに

卵形は，かなり以前から，様々な人が考察の対象にしていたのであろう。にわとりの卵は，確かに興味ある形をしている。そのような卵形の定式化[1),2)]や図形のユークリッド幾何的性質や微分幾何的性質[3)]（凸閉曲線の頂点の数など）は，その図式化や定式化の過程をたどれば，おもしろい考察材料となろう。

特に，デカルトの卵形線の定義は，図式的に様々に定義される。ここでは，それに卵形線の性質として，短軸という概念を付加できたので報告する。さらに，卵形線の平面から空間への拡張として，卵形面を卵形線の一般化として，定義し得たので報告する。これは，対称断面としての卵形線の考察から導出できる。

なお，この小論は，1994年6th ICECGDGの原稿を多少手直ししたものである。特に，序論の部分を手直し，卵形線の定義と短軸の定義との間の必然性を明らかにした。

1．2　卵形線の定義

デカルトの卵形線は，「定円とその内側にある定点と，からの距離が等しいときの楕円の接線作図法（図1)」を，図2のように発展させた楕円の拡張である。この定義の方法とその他の合せて3つの定義の方法を以下に述べる。その定義1と定義3は，小論[4)]に詳細が述べてある。

1．2．1　［定義1］

デカルトの卵形線は図3のように「**一定円とその円内の定点からの距離の比が一定（n/m）である曲線**」と定義される。さて，この定義では，図3のように，定円の内外に条件を満たす曲線ができるが，それらをそれぞれ，卵形線の内分枝，外分枝と呼ぶ。本論では内分枝のみについて考える。ここで，一定点，定円を固定して，比だけを$0<\frac{n}{m}<1$の条件で変化させると卵形線の大きさは変化し，図4のように$\frac{n}{m}=0$となる円と$\frac{n}{m}=1$となる楕円の間を埋めつくす曲線群となる[5)]。

しかし，これでは，定義にそった卵形線の長軸の長さが変化し，その曲線群全体に短軸を明確には，定義しにくい。なお，この定義は，ユークリッド幾何の範中で，先達の人がすでに知っている可能性もある。

1．2．2　［定義2］

次に，デカルトの卵形線は，双極座標[2)]を用いて

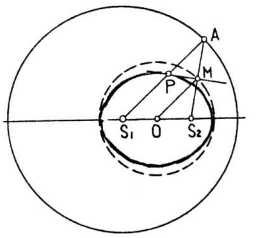

図1　楕円の接線

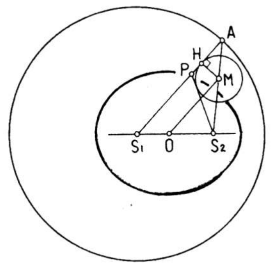

図2　図1の卵形線への拡張

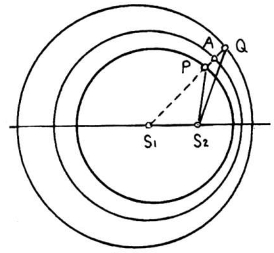

図3　卵形線　定義1

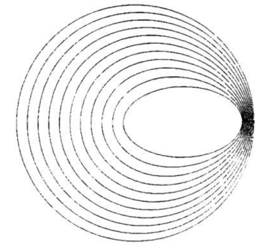

図4　円，楕円間の卵形線群

* 平成7年1月9日受付
** 福山暁の星女子高校

$$mr_1+mr_2=kc \qquad (1)$$

と定義される。図5のように，双極間の距離 $S_1S_2=c$ および2つの動径 $S_1P=r_1$, $S_2P=r_2$ が(1)式を満たして変化するとき，Pは卵形線を描く。ここで m, n, k は $k>m>n>0$ を満たす任意定数とする。なお，外分枝については $mr_1-mr_2=kc$ で表される。

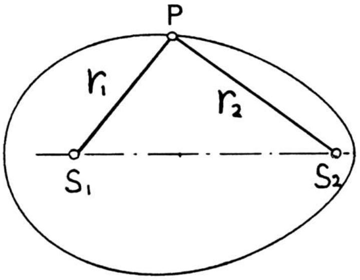

図5　卵形線　定義2

1．2．3　[定義3]

卵形線は，図6のように，一定円とその直径（$2a$）上に二定点（2極 or2 焦点と呼ぶ）を定めると，定まる。その作図方法を述べる。『円 O(中心；半径＝O;a) とその直径上の二定点 S_1, S_2 が与えられるとき，その二定点を通る平行線 ℓ_1, ℓ_2 を任意にひく。その2直線と定円の交点を N, N′, M, M′ とする。次に，S_1 を通り直線 OM と平行な直線を s とする。この s と直線 MN の交点を P とする。(ここで，パップスの定理より $ON/\!/S_2P$)，動直線 ℓ_1 が，この関係を保ちつつ，1回転するとき，点 P は，デカルトの卵形線を描く。』ここで，定円 O の半径 a は，ℓ_1 が長軸と重さなったとき，r_1, r_2 は，連立方程式

$$\begin{cases} mr_1+nr_2=kc \\ r_1-r_2=c \end{cases}$$

を満たし，解は $r_1=\dfrac{k+n}{m+n}c$ となり，故に $S_1S_2=c$,

$OS_1:OS_2=n:m$ より

$$\text{半径 } a=r_1-OS_1=\left(\frac{k+n}{m+n}\right)c-\left(\frac{n}{m+n}\right)c=\frac{k}{m+n}c$$

となる。ここで

$$e_L=\frac{OS_1}{a}=\left(\frac{nc}{m+n}\right)\Big/\left(\frac{kc}{m+n}\right)=\frac{n}{k} \quad \text{（左離心率）}$$

$$e_R=\frac{OS_2}{a}=\left(\frac{mc}{m+n}\right)\Big/\left(\frac{kc}{m+n}\right)=\frac{m}{k} \quad \text{（右離心率）}$$

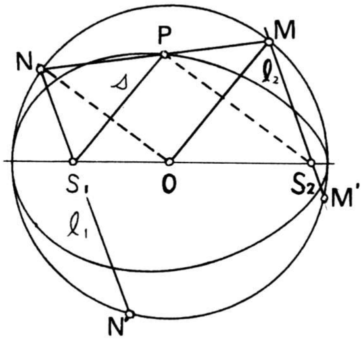

図6　卵形線　定義3

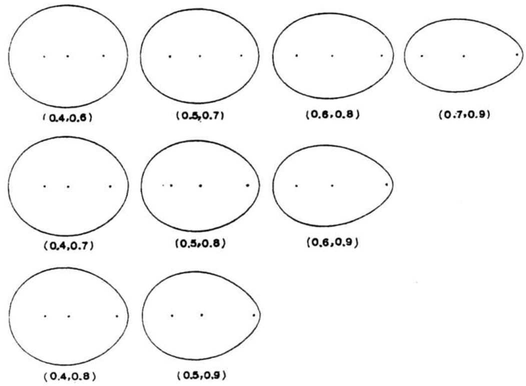

図7　卵形線の離心率による変化

が定義[5]できる。

この e_L, e_R を条件 $0\leqq e_L\leqq e_R\leqq 1$ の範囲で，変化さすと，図7のように様々な形の卵形が表される[5]。

1．2．4　3つの定義の関係

さて，3つの定義を双極座標で考えてみると

[定義1]

$R_0\to S_1S_2=c\to(n/m)$ 　⇨　$mr_1+nr_2=mR_0$

$$\text{変換}\ \downarrow\ R_0=\frac{k}{m}c\ \uparrow\ c=\frac{m}{k}R_0$$

[定義2]

$m\to n\to kc=K$ 　⇨　$mr_1+nr_2=kc$

$$\text{変換}\ \uparrow\ a=\frac{kc}{m+n}\ \downarrow\ k=\frac{a(m+n)}{c}$$

[定義3]

$a\to e_L:e_R=n:m$ 　⇨　$mr_1+nr_2=a(m+n)$

卵形線上の点 P が満たす，パラメータを用いた双極座標式を導くには，図8を参照すれば明かになる。このとき，次の関係式を用いて式を導出した。

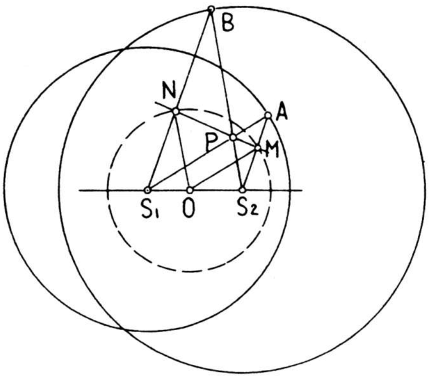

図 8　定義 1 と 3 の関係

$$S_1P+\frac{n}{m}S_2P=S_1A \rightarrow mS_1P+nS_2P=mS_1A$$

また，各式の間の変換が，図式の↑，↓のようになることも，明らかである。

2．卵形線の短軸

2．1　短軸の定義とその位置

前節 1.2.3. で考察したように，長軸が a で規格化されると，次の短軸概念が付加され意味をもつ。

2．1．1　［定義］

卵形線の短軸と言えば，長軸に垂直で，最も長い卵形線上の 2 点を結ぶ部分図 9 で定義することも考えられるが，それは，巾であって，楕円の一般化としては，図 10 のように，**「短軸は，長軸の中点と卵形線上の点 P を結ぶ線分のうち，最も短いもの」**と定義する。

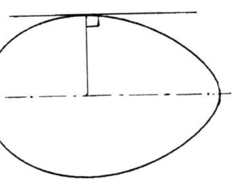

図 9　卵形線の巾

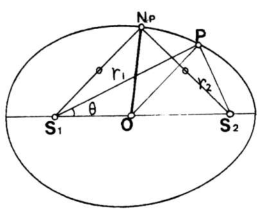

図10　短軸の定義

2．1．2　短軸の位置とその導出

$mr_1+nr_2=kc$ で定義されているとき，長軸（対称軸）の中点を原点 O とし，長軸方向を x 軸，垂直方向を y 軸とする。このとき，極間を c とすると，極の座標は，$S_1O:OS_2=n:m$ より，焦点 $S_1=\left(\frac{-nc}{m+n},\ 0\right)$，焦点 $S_2=\left(\frac{mc}{m+n},\ 0\right)$ である。卵形線上の 1 点 P を (X, Y)，$\angle PS_1O=\theta$，$S_1\ P=r_1$ とすると，線分の長さの 2 乗 (OP^2) は

$$OP^2=X^2+Y^2=\left(r_1\cos\ \theta-\frac{nc}{m+n}\right)^2+(r_1\ \sin\ \theta)^2$$

ここで $\begin{cases} r_2^2=r_1^2+c^2-2r_1c\ \cos\theta \\ mr_1+nr_2=kc \end{cases}$

まず r_2 を消去して，次に θ を消去すると

$$OP^2=r_1^2-\frac{2nc}{m+n}r_1\ \cos\theta+\left(\frac{nc}{m+n}\right)^2$$
$$=\frac{m}{n}\left(r_1-\frac{kc}{m+n}\right)^2+\frac{(k^2-mn)}{(m+n)^2}c^2$$

となる。

上式は，r_1 の 2 次式より，線分 OP は，$r_1=\frac{kc}{m+n}$ のとき，最小値 $\sqrt{(k^2-mn)c^2/(m+n)^2}$ となり，これは，1.2.3 の $a=\frac{kc}{m+n}$，$e_L=\frac{n}{k}$，$e_R=\frac{m}{k}$ を用いて変形すれば，$a\sqrt{1-e_Le_R}$ となる。ところで $\frac{kc}{m+n}$ は，卵形線の定義式 $mr_1+nr_2=kc$ における $r_1=r_2$ のときの $r_1=\frac{kc}{m+n}$ と一致する。ゆえに，短軸の位置として，**「卵形線の短軸は，焦点 S_1，S_2 から等距離にある卵形線上の点（近点と呼ぶ）と，中心を結ぶ線分である。」**と定義できる。長さは，$a\sqrt{1-e_Le_R}$ である。

2．2　卵形線の短軸の性質

2．2．1　卵形線の短軸が近点(Np)における卵形線の法線上にあること

図 11 におけるように，図 6 に更に，補助線 S_1M，S_2N を引き，S_1M と S_2N の交点 T を求めると，直線 PT は ,P における卵形線の法線である[4),6),8)]

ところで，点 P が N_p 点，つまり $r_1=r_2$ であるとき図 11 は，図 12 のようになる。つまり，$S_1S_2/\!/MN$ となり，四角形 S_1S_2MN が平行四辺形より，P,T,O が一直線上にある。つまり，N_pO は，点 N_p における卵形線の法線上にある。

2．2．2　短軸上の端点（近点）が微分幾何学的頂点でないこと

［理由］卵形線の頂点[7)] は，図 13 のような作図で求める。つまり，図 13 のように，図 6 の e_ℓ が $\ell_1\perp$

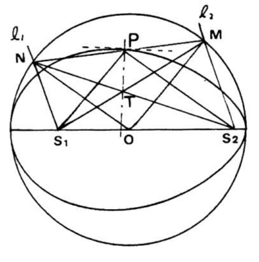

図11　卵形線の法線

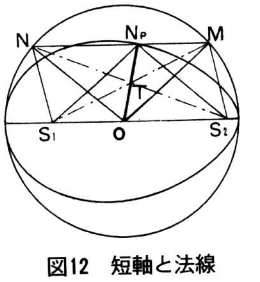

図12　短軸と法線

S_1S_2 のときであり，このとき，Pは，頂点Vとなる。ここで $e_L \neq e_R$ のとき，MN は ,S_1S_2 と平行でない。ゆえに，$V \neq N_p$ となる。故に ,N_p は，卵形線の頂点ではない。

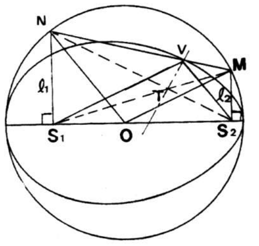

図13　卵形線の頂点

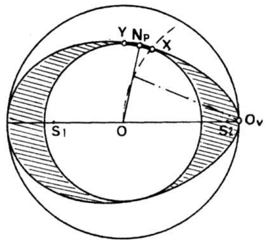

図14　同心円間の卵形線

2．2．3　短軸と長軸による卵形線のもとめ方

Oを中心とし，短軸の長さ $a\sqrt{1-e_Le_R}$ を半径とする円（短軸補助円）は，2.1 節の定義および 2.2.1 節の性質より，卵形線に内接する円であり，長軸補助円は，卵形線に外接する円である。ゆえに，図 14 のように，二つの同心円の間に，卵形線は存在する。

逆に，**『二つの同心円と内側の円周上の接点（近点）を与えると卵形線が定まる』**この近点は，図 14 のように，短軸補助円上の太線円弧 XY 上にとることが，できる。ここで X は，短軸補助円と，円 (O_v; O_vO) との交点である。

3．卵形面について

3．1　定義

卵形面は，卵形線の対称軸を回転軸として描けば，簡単に得られる。しかし，それでは卵形面の性質としては，対称軸および断面の卵形線の性質としてのものしか得られない。それで，次のように，卵形面を定義し，卵形線を拡張した。

［卵形面の定義］

1．空間に任意の異なる 4 点 (A, B, C, V) をとる。（同一平面上にない）
2．そのうちの 3 点 (A, B, C) を含む平面（α とする）を定める。
3．三角形 ABC の外接円の中心を O_1 とする。またこの外接円を C_1 とする。
4．4 点 (A,B,C,V) の外接球の直径が VU となるように点 U をとる。
5．点 V,U における外接球の接平面と，平面 α との交線をそれぞれ，ℓ_v，ℓ_u とする。
6．ΔABC の外接円の中心 O_1 を通り，平面 α に垂直な直線上に任意の動点 M をとる。
7．動点 M を中心とし，円 C_1 を含む動球面 (β_m) が一つ定まる。
8．ここで，直線 ℓ_u を含み，動球面 β_m に接する平面 (π_u) を一つ定める。この接平面 π_u に平行でしかも，直線 ℓ_v を含む平面 (π_v) が一つ定まる。
9．この平面 π_v と動球面 β_m との交円 (C_m) が一つ定まる。
10．9 の交円 C_m は，点 M を動かすとき，6 から 9 を繰り返すと，空間内を動く。その軌跡は，卵形面を描く。

これを 4 点 (A, B, C, V) が定める卵形面という。

ここで，図 15 のように，直線 ℓ_v に垂直で，外接円の中心 O_1 を通る平面 γ を定める。この平面 γ と，直線 ℓ_u，外接円 C_1，直線 ℓ_v との交線を順に O_o, S_1, S_2, S_3 とすると，卵形面と平面 γ の交線は，その 4 点を等距離円[7] の中心，3 焦点として定まる卵形線である。

また，卵形面と平面 α との交線は円である。

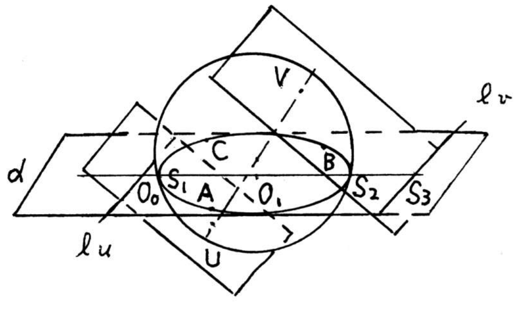

図15　卵形面定義の補助図

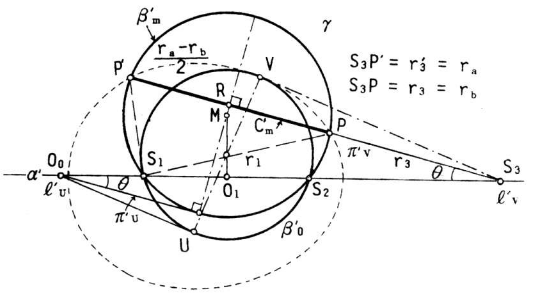

図16　卵形面補助立面図

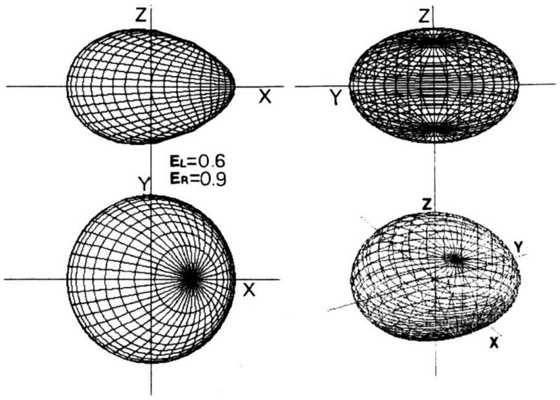

図17　卵形面のワイヤーフレーム図

3．2　卵形面を表す式

定義の立面図，図16において座標を次のようにとる。点 S_1 を原点，平面 α を xy 平面，平面 γ を xz 平面とすると，また，$S_1P=r_1, \angle PS_3S_2=\theta$ とし $S_3P=r_3$ とすると，焦点 S_1, S_3 を用いる双極座標を用いる定義式[4]より

$$nr_3+kr_1=\frac{m(k^2-n^2)}{m^2-n^2}c \tag{2}$$

$$r_1^2=r_3^2+\overline{S_1S_3}^{\,2}-2r_3\overline{S_1S_3}\cos\theta \tag{3}$$

(2), (3) に $\overline{S_1S_3}=\frac{k^2-n^2}{m^2-n^2}c$ を代入して，r_3 について解く

$$r_3^2+\frac{2(mn-k^2\cos\theta)c}{m^2-n^2}r_3+\frac{(k^2-m^2)(k^2-n^2)}{(m^2-n^2)^2}c^2=0$$

r_3 の2次方程式の解を r_a, r_b とすると

$$\left(\frac{r_a-r_b}{2}\right)^2=\left(\frac{mn-k^2\cos\theta}{m^2-n^2}\right)^2c^2-\frac{(k^2-m^2)(k^2-n^2)}{(m^2-n^2)^2}c^2$$

ゆえに，点Rを中心，半径 $(r_a-r_b)/2$ の交円 C_m 上の点 $Q(x, y, z)$ は

$$\begin{cases} x=\dfrac{c}{m^2-n^2}\Big\{k^2-n^2-(k^2\cos\theta-mn)\cos\theta \\ \quad +\sqrt{(k^2\cos\theta-mn)^2-(k^2-m^2)(k^2-n^2)}\cdot\cos\varphi\cos\theta\Big\} \\ y=\dfrac{c}{m^2-n^2}\sqrt{(k^2\cos\theta-mn)^2-(k^2-m^2)(k^2-n^2)}\,\sin\varphi \\ z=\dfrac{c}{m^2-n^2}\Big\{k^2\cos\theta-mn \\ \quad -\sqrt{(k^2\cos\theta-mn)^2-(k^2-m^2)(k^2-n^2)}\,\cos\varphi\Big\}\sin\theta \end{cases}$$

ここで $\varphi=0\sim 2\pi$　θ は

$$-\cos^{-1}\left(\frac{mn+\sqrt{(k^2-m^2)(k^2-n^2)}}{k^2}\right)\leqq\theta\leqq\cos^{-1}\left(\frac{mn+\sqrt{(k^2-m^2)(k^2-n^2)}}{k^2}\right)$$

この点 $Q(x(\varphi, \theta), y(\varphi,\theta), z(\varphi,\theta))$ が，前節に定義した**卵形面の媒介変数表示**である。

3．3　卵形面のワイヤフレーム図形

上式を用いて，卵形面のワイヤーフレーム図形の立面図（卵形線），平面図（円），側面図および見取図を図17に表す。

4．結び

以上，卵形線の短軸および卵形線の以下の性質がわかった。

1．卵形線の中心と近点を結ぶ線分が短軸である。
1．短軸は，近点における卵形線の法線上にある。
1．近点は，焦点から等距離にある点である。
1．近点は，卵形線の頂点ではない。
1．短軸の長さは，$a\sqrt{1-e_Le_R}$（楕円 $a\sqrt{1-e^2}$）である。
1．短軸の傾き α は $\cos\alpha=(e_R-e_L)/(2\sqrt{1-e_Le_R})$ である。
1．卵形線は，2つの同心円（長軸補助円と短軸補助円の間に存在する。

また，卵形面の定義を構成幾何学的に述べ，さらに式と図で表現できた。その性質として，2つの対称面（円と卵形線）もつことが解った。さらに，卵形面は，空間4次凸曲面であることがいえる。

以上，デカルトの卵形線を構成幾何学的に考察し，その短軸を発見し，また，空間への拡張を定義し得た。

これらの卵形線の追求が，楕円がそうであるように，数理物理学や天文学等に応用できることを期待した。

参考文献

1）デカルト著，河野伊三郎訳；“デカルトの幾何学” 白林社，1949 年

2）ロックウッド著，松井政太郎訳；“カーブ”；みすず書房，1964 年

3）窪田忠彦著，“微分幾何学”；岩波全書，P.201～ P.234,1967 年

4）蛭子井博孝；“デカルトの卵形線の二・三の性質”；図学研究，12, P.35～P.49,1973 年

5）蛭子井博孝；“デカルトの卵形線に関する考察(計算機援用作図による比較検討)”；“図学研究，37，P.9～14,1985 年

6）蛭子井博孝；“デカルトの卵形線に関する考察(その幾何学的構図)”；図学研究，49，P.9～14，1990 年

7）蛭子井博孝；“デカルトの卵形線の曲率円”；図学研究，19，P.7～11,1976 年

8）栗田　稔，“いろいろな曲線”；共立出版，P.91,1969 年

付　記

小論 4) に述べているように，本文中(2)式について，卵形線が，$mr_1+nr_2=kc$ で与えられるとき

$S_1S_2=c$, $S_1S_3=\dfrac{k^2-n^2}{m^2-n^2}c$, $S_2S_3=\dfrac{k^2-m^2}{m^2-n^2}c$

とする。その一直線上の 3 点 S_1, S_2, S_3 を 3 焦点（極）として，その 2 つの点

S_1, S_3 を極とする双極座標の定義式は，

$$nr_3+kr_1=m\frac{k^2-n^2}{m^2-n^2}c$$

S_2, S_3 を極とする双極座標の定義式は，

$$-kr_2+mr_3=n\frac{k^2-m^2}{m^2-n^2}c$$ と表される。

つまり，r_1, r_2 あるいは，r_2, r_3 あるいは r_3, r_1 のどれでも同じ卵形線を表す。

Minor Axis of the Oval of Descartes and Ovaliod

Ebisui, HIROTAKA

Descartes' oval is defined as $mr_1+nr_2=kc$ by using bipolar coordinates. Where, if $m=n$, it is ellipse. According to this definition and a number of the properties, it can be said that the Descartes' oval is essential extension of ellipse.

This time, the minor axis of oval that has the similar properties to those of the minor axis of ellipse is found. This minor axis is the segment connecting the middle point O of the major axis (the axis of symmetry) of oval and the point Np on the oval, which is at the shortest distance from the point O. The length of this minor axis is expressed by $a\sqrt{1-e_Le_R}$, where a is a half of the length of the major axis, and e_L and e_R are left and right eccentricities, respectively. As for this minor axis, its proof and a number of the properties are discussed.

Next, the method of defining ovaloid which is convex, closed curved surface in space by extending the oval on plane is found, therefore, it is reported. This ovaloid has, as the contours of the orthographic projection from three directions, circle, Descartes' oval and a fourth order curve like ellipse. Further, the parametric expression of this ovaloid is derived. In this way, the new properties of oval are able to be added, therefore, it is reported.