デカルトの卵形線の性質に関する考察*
―― 計算機援用作画による比較検討 ――

蛭子井　博　孝**

1．はじめに

卵形線は，数学上〝内部の任意の２点を結ぶ線分上の点がすべて内部の点である閉曲線〟という凸閉曲線としての定義があり，その微分幾何学的な性質も多く研究されている。しかし，これとは別に，卵形線の初等幾何学的な〝円とその内側の１点からとの距離の比が一定な曲線〟としての定義がある。これは，デカルトの卵形線[1),2)]と呼ばれ，やはり凸閉曲線としての卵形線の一種である。この初等的作図による定義から，幾何学的考察により，卵形線を種々な定義で表現できることがわかった。今回は，そのうち，卵形線の作図[3)]を多く示して，その表現を明かにした。これには，双極座標表示[6)]や極座標表示の動径と角の関係式より卵形線上の点の座標を計算しＸＹプロッター[5)]による出力を行うことにより，精度や時間の面での計算機[4)]の援用を行った。次に,卵形線の縮閉線の表現法をも考察し，法線の包絡線としてばかりでなく，媒介変数表示をも導き出し，計算機により作図を行った。

2．卵形線の種々の表現法

(1)　卵形線の右・左離心率をパラメータとした表現

デカルトの卵形線は，双極座標を用いて，$mr_1 \pm nr_2 = kc$（kは定数）で表現される。[6)]ここで，cは焦点（極）間の距離，r_1，r_2は双極から卵形線上の点までの距離である。これにより，卵形線の長軸の長さ（補助円の直径[2)]）は $\frac{2kc}{m+n}$ で表わされるが，それを固定し，**左離心率** $e_l = \frac{n}{k}$，**右離心率** $e_r = \frac{m}{k}$（楕円では,左右一致）を定義し，これをパラメータとして，形状変化を考えた。

図１は長軸80㎜とし，$k=10$，$4 \leqq n \leqq 9$，$n \leqq m \leqq 9$ の場合の卵形線である。なお作図に際しては180点の座標を計算し,ＸＹプロッターに出力した。卵形線の外分枝 $mr_1 - nr_2 = kc$ については，長軸を60㎜とし，同様に作図した。この図よりいわゆる卵の形は，〝卵の実験〟[7)]のニワトリの卵の写真と比較して $(e_l ; e_r) = (0.6 ; 0.7)$ から $(0.7 ; 0.9)$ のデカルトの卵形線で近似されていることがわかる。

(2)　３つの同心円群の各交点列としての表現

卵形線の定義式 $mr_1 \pm nr_2 = kc$ が与えられたとき，$-kr_2 + mr_3 = \pm n\left(\frac{k^2-n^2}{m^2-n^2}\right)c$，〔ここで，$\left(\frac{k^2-\cancel{n^2}}{m^2-n^2}\right)c$ は，第２，第３焦点間の距離〕によって定義される第３焦点を用いた卵形線の表示式がある。[2)]この２つの表示式を用いて，第１，第２，第３焦点を中心とする３つの同心円群の交点としての卵形線を作図した。

図２においては，k，m，n および同心円の数 h，第１,第３焦点間の距離 S_1S_3 を入力し，c を計算し，次に卵形線の第１焦点を中心にし，１番短い半径 $r_1^1 = \frac{k-n}{m+n}c$ から, h＋１番目の$r_1^{h+1} = \frac{(k-n)c}{m+n} + \frac{2nc}{m+n} = \frac{k+n}{m+n}c$ の半径の同心円を等間隔に h＋１個描き，同様に，第２，第３焦点を中心にして r_1^l から r_2^l，r_3^l（$1 \leqq l \leqq h+1$）を計算した同心円を h＋１個づつ描いた。ただし，卵形線を強調するために，内分枝に関しては卵形線内の円群は描いていない。また，外分枝に関しては，卵形線外の円群は描いていない。さらに，内外分枝とも，その各３つの円の交点を通る，つまり k，m，n，c で決まる卵形線そのものも描いた。

図２　$k=14$，$m=13$，$n=10$，$S_1S_3=150$㎜，$h=15$（原図）

図３　$k=10$，$m=8$，$n=6$，$S_1S_3=28$㎜，$h=12$（原図）

*昭和60年５月27日受付　　**広島女学院

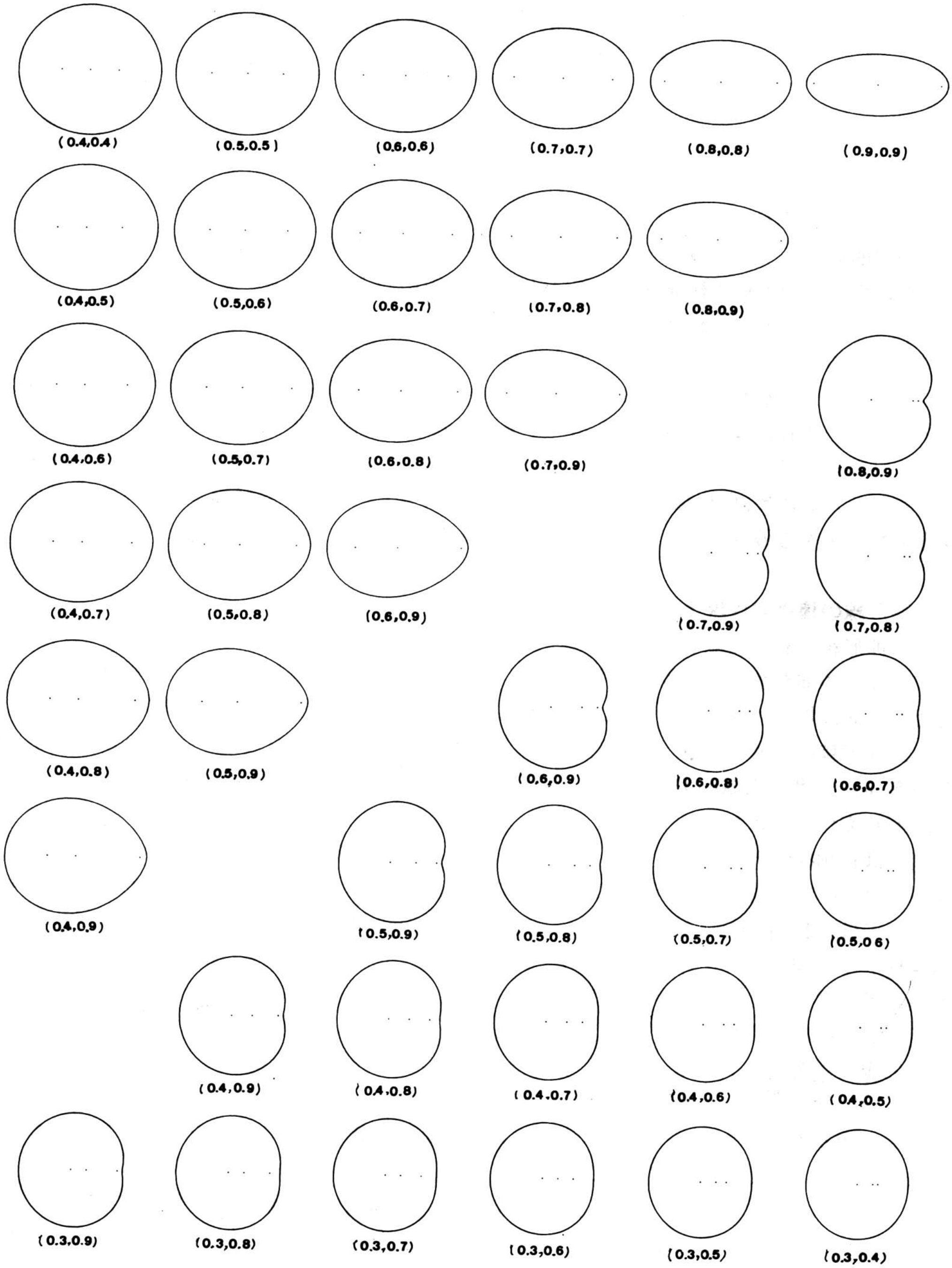

図1　卵形線の形状変化　上：内分枝，下：外分枝

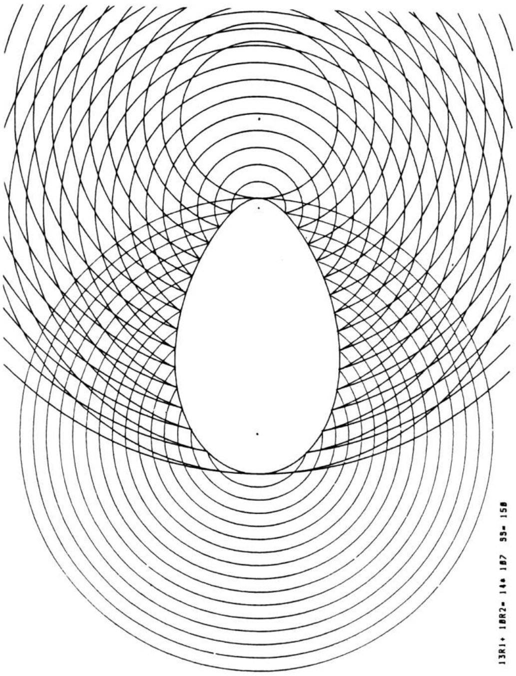

図　2

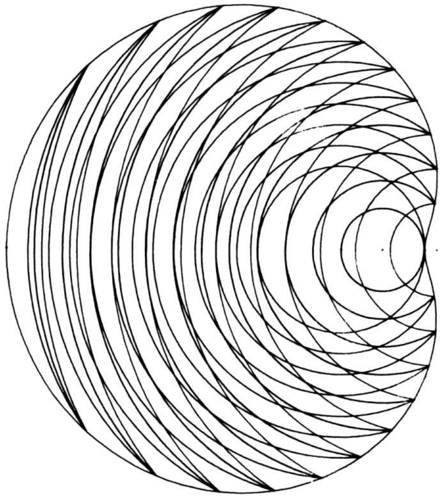

図　3

(3)　楕円と準円間の曲線束としての表現

楕円とその第１焦点を中心とする準円が与えられたとき，楕円の２つの焦点とその準円[2)]を共有する卵形線を描くことができる。このことにより，卵形線は，パラメータ変化により，楕円と円の間を連続的に埋めつくす曲線族ととらえることができる。

今，準円は，第１焦点 S_1 を中心，半径 $\frac{k}{m}c$ である。この $\frac{k}{m}c = R_o$ を固定し，また $c = C_o$ を固定して，間をうめる卵形線の数を h とし，m を h＋1から２（h＋1）まで１ずつ増し，n を２（h＋1）－m まで変化して，k を求め，その m，n，k，c より卵形線を描いた。

図４　（a）　m：n＝1：1（楕円）から m：n＝1：0（円）の間に h＝3本の卵形線を描いている。

（b）　h＝9本

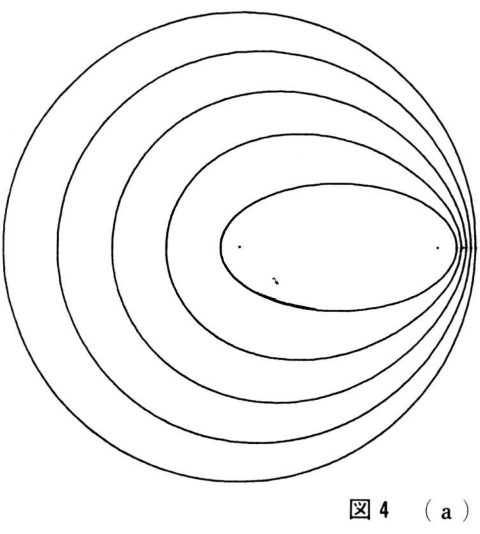

図４　（a）

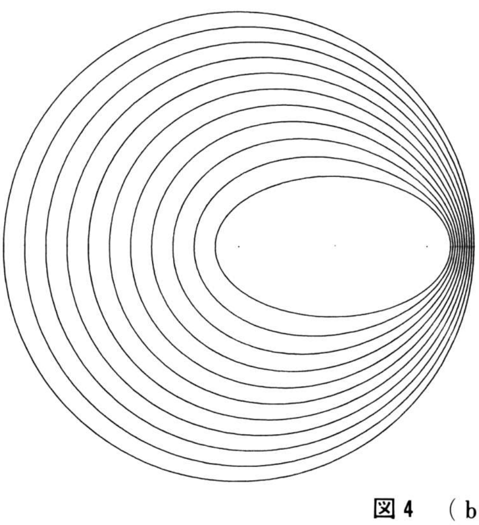

図４　（b）

3．卵形線の縮閉線[6),8)]の表現法

(1)　卵形線の法線[2),9)]の包絡線としての表現[6),8)]

卵形線 $mr_1 + nr_2 = kc$ の第２，第３等距離円[9)]と第２，第３焦点を通る平行線との交点（ここでは，第２等距離円と第３焦点を通る平行線の２交点と第３等距離円と第２焦点を通る平行線の１交点よりそれらを結ぶ２本）を結ぶ直線は卵形線の法線となる。

このことを利用し，法線の一部分を描き，その包絡線としての縮閉線を描いた。（図５）

手順は，第２，第３等距離円の半径と，その中心と第１焦点との距離を入力し，内部で，第２，第３焦点の位置や，c，m，n，k 等の卵形線のパラメータを計算し法線と卵形線を描いた。なお，頂点における法線によって，平面を４つの部分にわけ，その別々の範囲内の法線のみをひくことにより，その包絡線である縮閉線を浮び上がらせた。

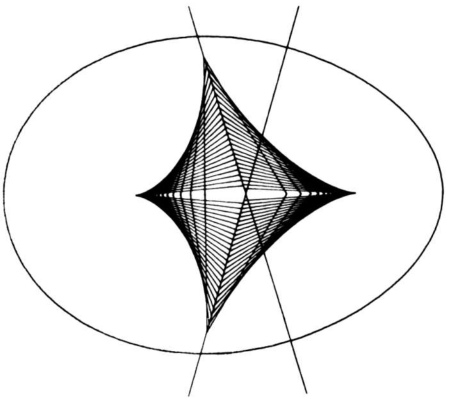

図５－１

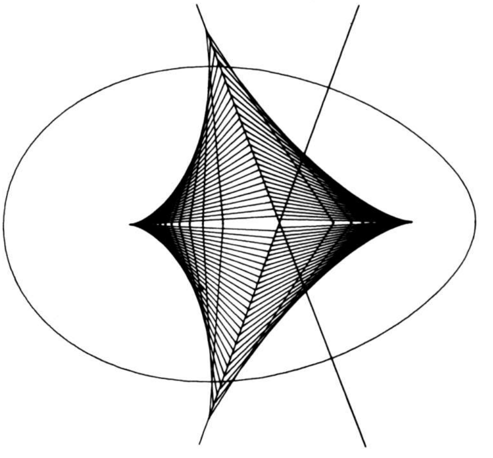

図５－２

(2)　媒介変数表示を利用した表現

上節で描いたような法線の包絡線としての縮閉線をとらえるのでは，包絡線を見る人が極限曲線として想像しているだけである。また作図時間もかかる。そこで，縮閉線そのものを描くことを考え，曲率中心の軌跡としての縮閉線[10)]を考えた。そして，曲率中心（x，y）を角 θ の媒介変数表示の式を導き出した。下式の x，y は，第１焦点を原点とし，第１，第２焦点を結ぶ直線を x 軸とする xy 座標で，媒介変数 θ は，卵形線上の点Ｐを，第１焦点を極とし，第１，第２焦点を結ぶ直線を始線とする極座標で表わしたときの角である。

$$x = \frac{c \cdot n\,(k^2+m^2-3km\cos\theta+km\cos^3\theta)\,\left(km-n^2\cos\theta-n\sqrt{k^2+m^2-2km\cos\theta-n^2\sin^2\theta}\,\right)}{(m^2-n^2)\left[(k^2+m^2-2km\cos\theta)\sqrt{k^2+m^2-2km\cos\theta-n^2\sin^2\theta}+n\{(k^2+m^2)\cos\theta-km\cos^2\theta-km\}\right]}$$

$$y = \frac{-c \cdot nkm\sin^3\theta\,\left(km-n^2\cos\theta-n\sqrt{k^2+m^2-2km\cos\theta-n^2\sin^2\theta}\,\right)}{(m^2-n^2)\left[(k^2+m^2-2km\cos\theta)\sqrt{k^2+m^2-2km\cos\theta-n^2\sin^2\theta}+n\{(k^2+m^2)\cos\theta-km\cos^2\theta-km\}\right]}$$

この式は複雑であるが縮閉線そのものを表すことを示すため，この式で描いた図を上節の包絡線の位置に重さねた図が図６である。図６より上式は，卵形線の**縮閉線の媒介変数表示**であることが確められよう。最後に，図７では，上式に離心率（$\frac{n}{k}$，$\frac{m}{k}$）の異なる値を入力し，卵形線とその縮閉線を描いた。

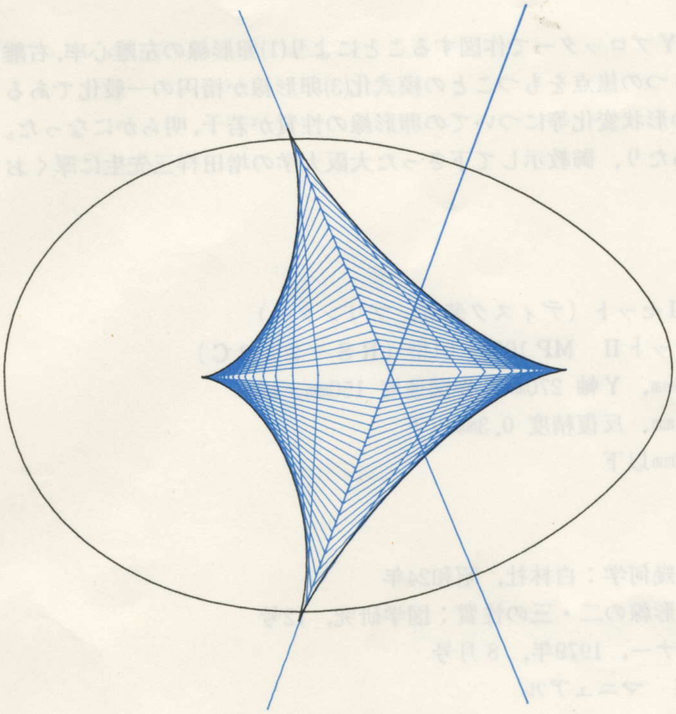

図 6 － 1　(0.6, 0.85)

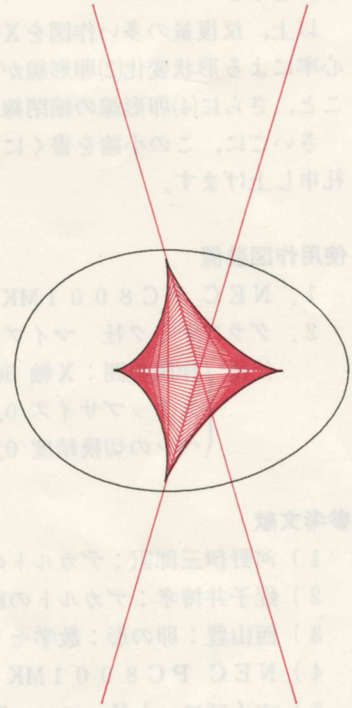

図 6 － 2　(0.6, 0.8)

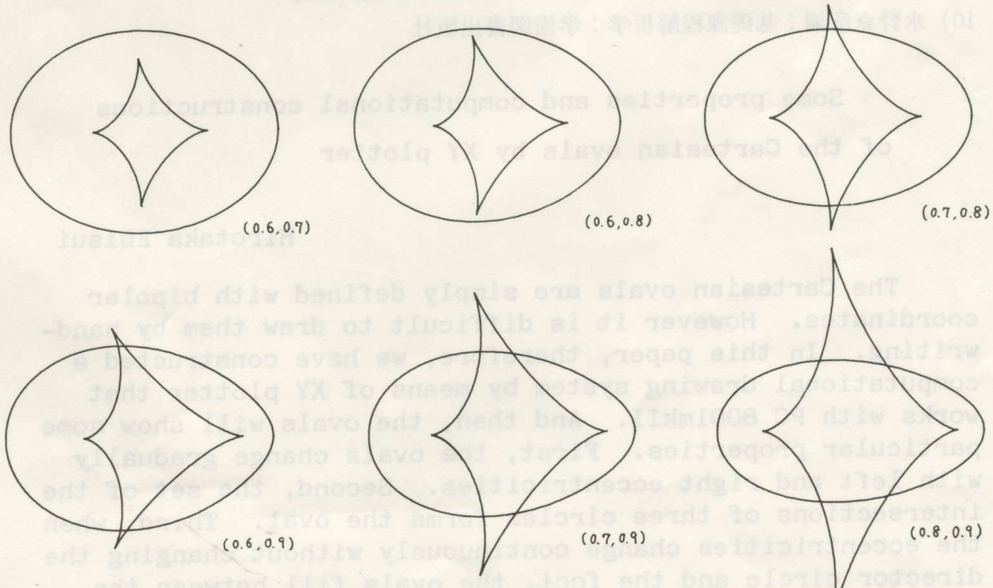

図 7　縮閉線のいろいろ

4．むすび

以上，反復量の多い作図をX−Yプロッターで作図することにより(1)卵形線の左離心率，右離心率による形状変化(2)卵形線が３つの焦点をもつことの模式化(3)卵形線が楕円の一般化であること，さらに(4)卵形線の縮閉線の形状変化等についての卵形線の性質が若干，明らかになった。

さいごに，この小論を書くにあたり，御教示して下さった大阪大学の増田祥三先生に厚くお礼申し上げます。

使用作図装置

1．NEC PC８００１MK IIセット（ディスク装置，プリンター）

2．グラフテック社　マイプロットII　MP 1000−01型（RS−２３２C）

仕様
- 作図範囲：X軸 360mm，Y軸 270mm，作図速度 150mm／sec
- ステップサイズ 0.1mm，反復精度 0.3mm以下
- ペンの切換精度 0.3mm以下

参考文献

1）河野伊三郎訳：デカルトの幾何学：白林社，昭和24年

2）蛭子井博孝：デカルトの卵形線の二・三の性質：図学研究，12号

3）西山豊：卵の形：数学セミナー，1979年，８月号

4）NEC PC８００１MK II　マニュアル

5）マイプロットII　マニュアル

6）ロックウッド著：松井政太郎訳：カーブ：みすず書房，1964

7）伏見康治・伏見満枝著：卵の実験：福音館書店，1977

8）F．ホーエンベルク著：増田祥三訳：技術における構成幾何学：日本評論社

9）蛭子井博孝：デカルトの卵形線の曲率円：図学研究，19号

10）水野克彦編：基礎課程解析学：学術図書出版社

Some properties and computational constructions of the Cartesian ovals by XY plotter

Hirotaka Ebisui

The Cartesian ovals are simply defined with bipolar coordinates. However it is difficult to draw them by hand-writing. In this paper, therefore, we have constructed a computational drawing system by means of XY plotter that works with PC 8001mkII. And then, the ovals will show some particular properties. First, the ovals change gradually with left and right eccentricities. Second, the set of the intersections of three circles forms the oval. Third, when the eccentricities change continuously without changing the director circle and the foci, the ovals fill between the ellipse and the director circle. Forth, there can be shown two kinds of evolutes of the ovals. The one is drawn as an evelope of the straight lines, and the other with paramatric equations. In this way, these properties of the oval can be shown for the first time by using computational drawing system.