

# Doval 研究論文集

蛭子井博孝著

はじめに

ある、青春の日、楕円の接線の作図において、垂直2等分線が使われていた。それを  $m:n$  の比に置き換えると、どうなるだろうかと考えた。この思いつきが、この論文集の発端である。それから、39年の年月が流れ、ここに、Dovalの考察の成果を、お見せすることができるようになった。各論文の注を下記に述べている。本論と合わせ、ごらん頂きたい。

**Dovalとは、点と円からの距離の比が一定な曲線**：この定義から、すべてが生まれたと言っても過言ではない。小さな思いつきも多くの実りを生む。最大の成果は何かと問われても答えることができない。Dovalを私なりの多角的に見て、性質や定理を見つけ出してきた。皆さんも、皆さんの見方で、Dovalの定義を眺めると、それ相応の定理が見つかると思う。それらの成果と、この論文集が結びつき、Dovalの学問体系が生まれることを願ってやまない。

ああ、Dovalの空間とは何だろう。この疑問に答える役に立ててほしい。  
それだけが、私の願いである。

## 1 . Doval 1a "デカルトの卵形線の二・三の性質": PDF

この論文は、デカルトの卵形線についての私の第一作です。

校正ミスなどにより、誤植が多く読みづらいと思います。

第五作から読むといいかもしれません。

とにかく、このファイルをコピーするより、

中の図を一つでも、自分で紙と鉛筆で、雑にでもいいから書いてみられることをおすすめ

します。運動幾何ソフトの Cabri や、Cinderella などを書けば、すぐ、頭で描いてある卵形線まで

軌跡として描けます。「doval\_1a.pdf」をダウンロードしてね。

Doval という言葉は、論文中どこにも出てきません

” デカルトの卵形線の内、外分枝合わせたものを Doval と呼ぶ ” ことにしたのは、

ここに PDF として掲載する 15 編を書いたあとです。だから、卵形線の内分枝、外分枝  
まと

めた性質（後ほど出てきます）を知ってはじめて、Doval が実感できるのでしょうか。

でも、内外分枝の 2 重閉曲線を Doval と言うことだけでも、単に卵形線をやっているの  
な

いことが認識できるでしょう。Doval の定義の画像追加しておきます。参照してください。

## 2 . Doval 2a "デカルトの卵形線の曲率円":PDF

「doval\_2a.pdf」をダウンロード 第二作は、等距離円、および、Doval の微分幾何学の頂  
点における曲率円を求めたもの。図が込み入って、複雑になっている。

直観幾何で、二つの法線の交点の極限值より、曲率円の半径を見つけたもの、今では、数  
式処理で簡単に求まるが、昔の苦心の作である。数式処理では、最終的に、数値で入れな  
いといけませんが、この作図法では、定規とコンパスで、製図できる点が違う。

## 2 '。Doval 2a-append "デカルトの卵形線を包絡する円群": PDF : 解析 的証明

「doval\_2aappend2.pdf」をダウンロード これは、第二作 ” デカルトの卵形線の曲率円 ”  
の円群の包絡線が、卵形線であることの解析的証明である。

## 3 . Doval 3a "デカルトの卵形線の性質に関する考察 ” - 計算機援用作 画による比較検討一 : PDF

第三作、初めて、PC と XY プロッターを用いて、Doval を作図した。一作目の時代には  
まだ、XY プロッターは、大きな、研究所にしかなく、10 年後のこの時期になって、個  
人向け、PC(マイコンとも言った)に接続できるものができた。B スプライン関数など、  
雲形定規の代役できる、関数がそろい、曲線もきれいに書けるようになった。「doval\_3a.pdf」  
をダウンロード

ここまで、初期 3 部作で縮閉線まで完成、初めてカラーの図を入れた。

楕円の縮閉線は、アステロイドとして有名、Doval の縮閉線、エピロイドと読んでほしい。

苦心して手計算で出した式、生前の岩田至康先生にもほめていただいたもので、それを用いて、法線の包絡線として、輪郭を書いた。

本論の中で言うのを忘れたが、エピロイドの尖点が、頂点の曲率円の曲率中心である。

### 3 ' Doval 論文集 正誤表

Doval 論文 PDF すでに修正してあるところもあるが、

一応、正誤表を作っているの、見ていただきたい。

「doval\_003ed.pdf」をダウンロード これから先のものまで、

載せている。

## 4 . Doval 4a "デカルトの卵形線の性質に関する考察"-その幾何学的構図- : P D F

ここでは、復習的内容と、直極点による定義、および、法線の作図法を載せている。

円錐の底面の楕円に、母線を引くのに近似接母線を引いた。長径に対する母線ではない。

幾何学的構図とは、直極点と卵形線が結びついたものを言う。

初等幾何の定理で、卵形線を定義すること、これは、後に、

卵形線を焦点が 4 つ以上の多極曲線に拡張する準備となっている。

もちろんこのときはそれはわからなかった。

しかし、卵形線の定義で、2 つの補助円によるものと同様に「doval\_4a.pdf」をダウンロード、不思議な構図である。それからもう一つ、大事な発見がある。

それは、Doval の空間曲線である、回転対称軸の平行な円錐面と円錐面の相貫曲線の媒介

変数表示である。

ここでは、付記にしたが、特筆すべき事柄である。

y 座標の t に関する 4 次式、因数分解して用いると、ルートの中が正の範囲が判る。

補言しておく。

## 5 . Doval 5a " デカルトの卵形線の短軸および卵形面 ": PDF

「doval\_5a.pdf」をダウンロード この論文は、国際会議に出した内容をまとめ直したものであ

る。卵形線の短軸の定義とその存在と証明をデカルトの卵形線で行っている。

卵形線の短軸は、一般の凸閉曲線にもこれと同じように定義できる。

つまり、" 卵形線の唯一の長径の存在と、その中点から、卵形線上の点までの最短径の存在 "

これで、卵形線の短軸は定義できる。デカルトの卵形線の場合にどうなっているか論文をご覧ください。

## 6 . Doval 6a " デカルトの卵形線の短軸に関する一定理 ": PDF

「doval\_6a.pdf」をダウンロード 短軸の垂直 2 等分線は第 3 焦点を通る

第三焦点の位置の定義に、逆に用いることができる。

私の傑作定理

## 7 . Doval 7a " デカルトの卵形線の2焦点を見込む角について ": PDF

「doval\_7a.pdf」をダウンロード ここまでの 7 作 + に対して、"デカルトの卵形線に一連の研究"として、日本図学会から、論文賞を頂いた。この見込み角の定理は、たぶん解析幾何では無理であろう。なぜなら、4 次式と直線の交点に関係し、文字係数の 4 次方程式を解く形になるから。原理的には、4 次方程式まで解の公式があるが、卵形線の式

は、2変数だし、複雑になろう。初等幾何で、証明したのが正解だろう。ただ、やたら、定理の系と書き、ちょっと複雑に書いてしまったのを反省している。(画像中、第三焦点を通る直線青に対して、見込み角が決まり、それが等しい。)

Doval の見込み角の第二定理(これは、Doval 7a の末尾の命題の補言である。)

Doval の頂点(第三焦点を通る直線が、Doval に接する点{文献 Doval 2a 参照})における、第一第二焦点を見込む角が、見込み角の最大値である。

これは、内分枝、外分枝、別々で言えること。

【略証】2つの補助円による Doval の作図法において、相似中心を通る平行線と補助円の2交点を見込む角は、平行線が決める Doval 点上からの見込み角に等しい。

この平行線が補助円を切り取る円弧が、最大になるのは、平行線が、中心を含むので、Doval の対称軸に垂直なときである。そして、与えられた2点を通る平行線の距離の最大値は、与えられた2点間距離だからである。証明終わり。

## 8 .Doval 8a "デカルトの卵形線の離心率による形状(凹凸)について{凹凸の分類}"

離心率と曲率半径の関係は、Doval 2a の時代に、判っていた。それを凹凸の関係に直したのが、この小論である。「doval\_8a.pdf」をダウンロード これは、図学会九州支部会で発表したものを、手直ししたもので、未発表のものである。

## 9 . Doval 9a " デカルトの卵形線の内外分枝の非対称軸について ": P DF

「doval\_9a.pdf」をダウンロード 概要を読んでいただければ判るだろう。

最後の方の式  $\dots = 2$  と  $= 1/2$  の違い 対称軸=外短軸 \* 2 よりであることを注意

## 10 . Doval 10a "卵形線の構図を膨らませた反転4次曲面": PDF: "Dov aloidについて"

「doval\_10a.pdf」をダウンロードもちろん、ここで言う卵形線とは、デカルトの卵形線であり Doval である。文中、デカルトと言う名を入れなかったのは、膨らませた曲面と言うことを強調したかったためである。なおこれは、自費で印刷したもので、雑誌には、載っていない。ここだけのものである。

### 1 1 . Doval 11a "直極点による卵形線の拡張としての多極多重曲線": PDF

「doval\_11a.pdf」をダウンロード 僕は、この論文を書くために生まれてきたと言っても過言ではない。説明不足で、研究資料になっているが、学生の頃、焦点が、3つ以上の曲線を見つけることが夢だった。先輩が、そんなこと寄せと言って、あきらめ掛けていた。しかし、25年後に、それが見つかった。それには、直極点の無限連鎖定理の発見も必要だった。何か、幸いしたのだろう。数式処理ソフトで、定義した多極曲線が描けた。曲線が画面に現れたとき、あきらめず研究してきた良かったと、うれしさに涙するほどだった。有り難う、コンピュータの科学技術に携わる多くの人々おかげである。ここで感謝のお礼をしたい。

### 1 2 . Doval 12a "楕円を拡張した共2焦点、共3焦点な卵形線群": PDF

「doval\_12a.pdf」をダウンロード これは、日本図学会、九州支部会で2003年に発表したものである。

### 1 3 . Doval 13a "卵形線とコンフィギュレーション": PDF

「doval\_13a.pdf」をダウンロード ここで、証明を示すという分があるが、実際には

別考察で、次の Doval 14a に、その証明がある。

### 14 . Doval 14a "Dovalの法接交点(コンフィギュレーション(15(4)、20(3))のある作図法)": PDF

「doval\_14a.pdf」をダウンロード この論文は、未発表のもので、Dovalの法線と接線を作る構図の証明である。図中、点(1)、(F)(2)が、Dovalの3焦点、点(3)(4)が、内分枝上の点、点(5)(6)が、外分枝上の点、直線(4)(9)、直線(6)(9)、直線(3)(11)、直線(5)(11)が法線、それに直交してる線が、接線。証明部分図は、後半にカラーで載せている。なお、まる1を(1)で表した。

### 15 . Doval 15a "Dovalの随伴円について": PDF

「doval\_15a.pdf」をダウンロード これは、2005年、日本図学会、本部例会で発表したものである。

### 1 6 . Doval 16a "About the Oval (Doval)": PDF

「doval\_16a\_about\_doval\_at\_11icgg\_guanzhou\_china.pdf」をダウンロード 国際会議の

proceeding。ここで、卵形線の内外分枝を Doval と呼ぶ承認を得た

## 17 . Doval 17a "国際会議OHP":PDF

「ticggohp\_2.pdf」をダウンロード これで終わりにならないように願ってください

### Dovalの論文のPDF作成を終わって

私の人生を掛けた、Dovalの研究の拙著を、ほぼ全部PDFファイルにした。これで、私の社会での役割の大半が終わったことになると思う。たった、一週間で、57年の人生を掛けた仕事の、上澄みが、表現できたことになる。便利な時代である。電子ファイルが、どれほどの永遠性を持つかは、よく判らない。DOMYやRONYのように、DORYも消してしまっは、世に残るべきものも残らないかもしれない。しかし、DORYをこれから先どのように運営していくか大きな問題である。Doval 1a ~ 17 a+ を、本にしたく思っているが、どのようにしたらいいか、よく判らない。皆さんにお聞きしたい。カラーの部分もかなりあり、印刷を、PDFからできるのか、誰かにお聞きしたい。とにかく、私の、Doval研究の大半をお見せした。5作を飛ばして、7作目までが、発表を紙面だけでして居たもので、丁寧さがあったかもしれない。後半は、几帳面さに欠けている点がある。お許し願いたい。

とにかく、Dovalの研究テーマは、まだたくさんあり、残りの人生も、それに取り組むつもりであるが、ここまでの所を、私の前半作として、皆さんに、提供できたことは、うれしい限りである。ああ、Dovalの基礎的研究は、ほぼ終わり、これからは、社会での、Dovalの本当の実用化の時代である。それには、皆さんの協力なくしてはできないことである。よろしく願います所存です。

研究には、終わりはない。これからも、続くであろう。これらの研究。

## デカルトの卵形線の二・三の性質\*

蛭子井 博 孝\*\*

楕円などの円錐曲線は、その定義あるいは作図に対して、焦点・準円・補助円・準線などが通常使われている。ところが、デカルトの卵形線は、楕円あるいは双曲線が一般化された曲線であることが知られている。そこで、デカルトの卵形線においても同様な性質が存在するのではないかと予想し、それに対して若干の考察を行なってみた。また、デカルトの卵形線は、回転軸の平行な二つの円錐面の交線を、回転軸に垂直な平面へ正射影したものであることが知られている<sup>1)</sup>が、それに対しても若干の考察を行なってみた。

### 1. 楕円の準円、補助円

楕円は、二定点からの距離の和が一定な点の軌跡として定義できる。すなわち、図1において、二定点を  $S_1$ 、 $S_2$ 、楕円上の一点を  $P$  とすると  $S_1P + S_2P = K$  (定数) を満足する。ここで、 $S_1$ 、 $S_2$  を焦点という。

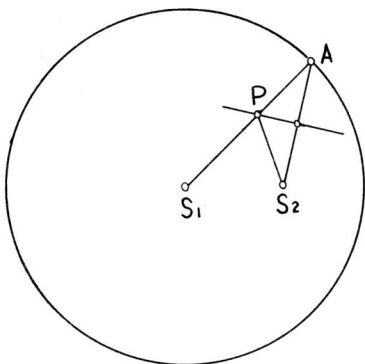


図1

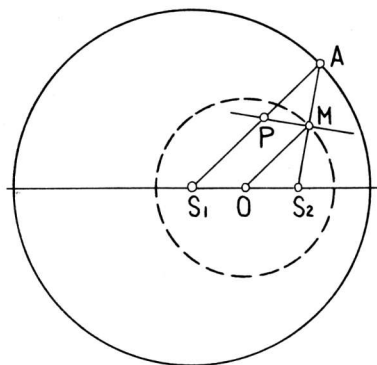


図2

今、線分  $S_1P$  を  $P$  を越えて延長し  $PA = PS_2$  となるように点  $A$  をとると、 $S_1P + PA = K$  となり、 $P$  が楕円上を動くとき、 $A$  は、円  $(S_1; K)$  上を動く。この円  $S_1$  は、準円<sup>2)</sup>と呼ばれる。逆に、この  $S_1A$  を半径とする円  $S_1$  が与えられ、この円内に、中心と異なる任意の一定点  $S_2$  をとり、線分  $S_2A$  の垂直二等分線と  $S_1A$  との交点として、 $P$  を求めれば、明らかに  $P$  は、楕円上にある。

ここで、図2におけるように、 $S_2A$  の中点  $M$  を通り、 $S_1A$  に平行な直線を引き、直線  $S_1S_2$  との交点を  $O$  とすれば、中点連結定理より、 $S_1O = OS_2$ 、また、 $OM = \frac{1}{2} S_1A$  となり、 $O$  は定点、 $OM$  は一定である。ゆえに、 $A$  が円周上を動くとき、 $S_2A$  の中点  $M$  は、円  $(O; OM)$  上を動く。この円  $O$  は、 $S_1S_2$  の中点を中心とし、 $\frac{1}{2} S_1A$  (長軸の長さの半分の長さ) の半径を持つ楕円の長軸の補助円であることがわかる。また、双曲線に対しても同様な性質の存在がよく知られている<sup>3)</sup>

\* 昭和47年7月27日受付

\*\* 大阪大学



## 2. デカルトの卵形線の準円, 補助円

デカルトの卵形線は, 次のように楕円の拡張であることがわかる。

### 2-1 卵形線の定義

デカルトの卵形線は, 双極座標を使って次のように定義される<sup>3)</sup>

$$m r_1 \pm n r_2 = K \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで,  $r_1, r_2$  は, 二定点 (極)  $S_1, S_2$  から卵形線上の一点  $P$  までの距離を表わしている。±の符号は卵形線が二分枝に分かれることを示す。また, 極が前述の円錐曲線の焦点に相等する。以下の説明に便利なように (1) 式を次のように書きかえる。

$$m r_1 \pm n r_2 = k c \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで,  $c$  は焦点間距離  $S_1 S_2$  を表わす。

$S_1, S_2$  に差はないから  $m > n$  としても一般性は失われない。だから, 符号を省いて,  $m, n, k$  を正数としたとき, 次の三つの場合が考えられる。

$$k > m > n > 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$m > k > n > 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$m > n > k > 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

2-2節, 2-3節においては,  $m r_1 - n r_2 = k c$  の場合を考えていない。また, 作図は, 主に (3) の場合であるが, 作図法は (3), (4), (5) の分類に関係しない。この分類の意味および等号の成立する場合も5節で明らかになろう。また, (3) の条件がある場合, +の符号をもつ卵形線を内分枝, -の符号をもつ卵形線を外分枝と呼ぶことにする。

### 2-2 卵形線の準円

図1において  $S_2 P$  をも延長し, 同様なことを行えば, 図3で明らかなように, 円 ( $S_1; K$ ), 円 ( $S_2; K$ ) はともに準円である。また明らかに  $S_1 B \parallel S_2 A$  である。これは, 逆に, 半径  $K$  の等しい円  $S_1, S_2$  がはじめに与えられ, 点  $S_1, S_2$  を通り, 互いに平行な直線  $l_1, l_2$  が円  $S_2, S_1$  とそれぞれ交わる点を  $B, A$  としたとき,  $S_1 A$  と  $S_2 B$  の交点が楕円上の点  $P$  となっていると見なすことができる。

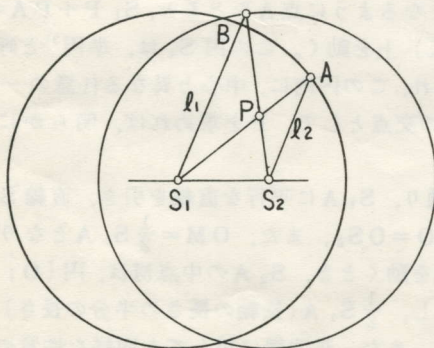


図3

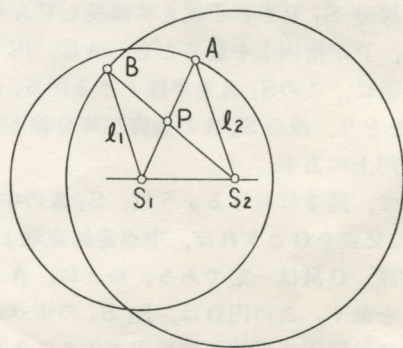


図4

今, 点  $S_1, S_2$  をそれぞれ中心とし, 異なる半径をもつ円 (この円を楕円の準円にならって卵形線の準円と呼ぶことにする) をはじめに与え, 点  $S_1, S_2$  を通り互いに平行な直線  $l_1, l_2$  が円 ( $S_2; \frac{k}{n} c$ ), 円 ( $S_1; \frac{k}{m} c$ ) とそれぞれ交わる点を  $B, A$  とし,  $S_1 A, S_2 B$  の交点が,  $A$  あるいは  $B$  がそれぞれの円周上を動くときに描く軌跡を考える。

図4において、 $S_1 A = \frac{k}{m} c$ 、 $S_2 B = \frac{k}{n} c$ とおく。すると、 $S_1 A : S_2 B = n : m$ となる。そして、 $\triangle S_1 P B$ の $\triangle S_2 P A$ より

$$\frac{PS_1}{PB} = \frac{PA}{PS_2} = \frac{PS_1 + PA}{PB + PS_2} = \frac{S_1 A}{S_2 B} = \frac{n}{m} \dots\dots\dots (6)$$

ゆえに、 $PA = \frac{n}{m} PS_2$ 、また、 $S_1 P + PA = S_1 A = \frac{k}{m} c$ 、これより、 $PS_1 + \frac{n}{m} PS_2 = \frac{k}{m} c$ を得る。ここで、 $S_1 P = r_1$ 、 $S_2 P = r_2$ とすれば、点Pは(2)式を満す。したがって、点Pはデカルトの卵形線上の点であることがわかる。

逆に、デカルトの卵形線  $mr_1 + nr_2 = kc$  が与えられると、それぞれ、中心を  $S_1$ 、 $S_2$ 、半径を  $\frac{k}{m} c$ 、 $\frac{k}{n} c$  とする準円が成立する。外分枝においても同様。

2-3 卵形線の補助円

次に、楕円の図2の場合がデカルトの卵形線ではどのようなになるかを考える。楕円では、Mが中点であるから、図5ではMが  $S_2 A$  を  $m : n$  に内分する点としてみる。まず、点Mを通り  $S_1 A$  に平行な直線と  $S_1 S_2$  の交点をOとすれば、 $S_1 O : OS_2 = n : m$  であり、点Oは定点となる。そして、 $S_1 A = \frac{k}{m} c$  とすれば、 $OM = \frac{k}{m} c \times \frac{m}{m+n} = \frac{k}{m+n} c$  となり、Aが円周上を動くとき、点Mは定円  $(O; \frac{k}{m+n} c)$  (楕円にならって補助円と呼ぶことにする) 上にある。そのとき、 $P$  を  $PS_2 : PA = m : n$  を満たすように  $S_1 A$  上に取れば、楕円の拡張となる。この点を具体的に作図するには、Mより  $S_1 A$  に垂線を下しその足をHとする。次にMを中心とし、半径MHの円を描く。この円に、 $S_2$  から接線を引き、 $S_1 A$  との交点をPとすればよい。なぜなら、 $\angle APM = \angle MPS_2$  となり、 $PS_2 : PA = m : n$  となるから。以上のことから、デカルトの卵形線  $mr_1 + nr_2 = kc$  が与えられると、 $S_1 S_2$  を  $n : m$  に内分する点Oを中心とし、 $\frac{k}{m+n} c$  を半径とする補助円が成立する。外分枝に対しては、 $S_1 S_2$  を  $n : m$  に外分する点を中心とし、 $\frac{k}{m-n} c$  を半径とする補助円が同様に成立する。

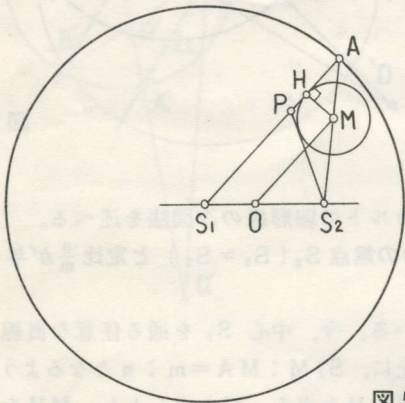


図5

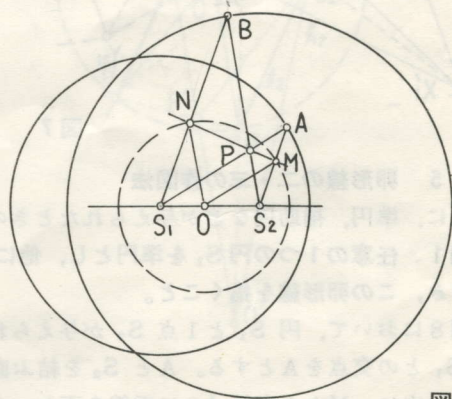


図6

また、図6のように $\angle APS_2$ の二等分線と  $S_1 B$ 、 $S_2 A$ の交点をN、Mとする。この点N、Mは  $S_1 B$  を  $n : m$  に、 $S_2 A$  を  $m : n$  にそれぞれ内分する点であるから、これらの点は、 $S_1 S_2$  を  $n : m$  に内分する点Oを中心とし、 $\frac{k}{m+n} c$  を半径とする円周上にあることが明らかである。逆に、図6において、円Oの中心線上に二点  $S_1$ 、 $S_2$  があり、それらの点を通る互いに平行な直線  $l_1$ 、 $l_2$  が円Oとそれぞれ交わる点をN、Mとし、NM上に $\angle NPS_1 = \angle MPS_2$  となるように点Pをとってもよい。

2-4 準円と補助円の関係

図7において、まず円  $S_1$ 、円  $S_2$  が与えられているとする。その半径を  $\frac{k}{m} c$ 、 $\frac{k}{n} c$  とする。

点  $S_1, S_2$  を通る互いに平行な直線  $h_1, h_2$  が円  $S_1, S_2$  と交わる点をそれぞれ  $X_1, X_2$  とする。(図において、 $X'_1, X'_2$  のように ' のついている点は、 $X_1, X_2$  のように ' のついていない同じ記号の点と同様な性質を持った点である。以下の図においても同様である。)  $X_1 X'_2$  と  $X'_1 X_2$  の交点  $O_{12}$  および  $X_1 X_2$  と  $X'_1 X'_2$  の交点  $O_{21}$  は明らかに直線  $S_1 S_2$  上にあり、補助円の中心である。なぜなら、 $S_1 O_{12} : O_{12} S_2 = \frac{k}{m} c : \frac{k}{n} c = n : m$  で  $O_{12}, O_{21}$  が  $S_1 S_2$  をそれぞれ  $n : m$  に内分、外分する点であるから。

次に  $S_1 X_2$  と  $X_1 S_2$  の交点を  $Y_{12}$  とし、 $Y_{12}$  と  $O_{12}$  を結ぶと、その線分の長さが補助円  $O_{12}$  の半径となる。なぜなら、 $S_1 Y_{12} : Y_{12} X_2 = \frac{k}{m} c : \frac{k}{n} c = n : m$  で  $Y_{12} O_{12} \parallel S_1 X_1$ 、ゆえに、 $Y_{12} O_{12} = S_1 X_1 \times \frac{m}{m+n} = \frac{k}{m+n} c$

同様にして、 $X_1 S_2$  と  $S_1 X'_2$  の交点  $Y_{21}$  とすると、 $O_{21} Y_{21} = \frac{k}{m-n} c$  となり、外分点の補助円の半径となる。以上のようにして、一組の準円から一組の補助円  $O_{12}, O_{21}$  が求められたが、逆に、任意の二円を一組の補助円として与えるとき、それに対する準円が求められる。これは、図7において点線  $Y'_{21} Y_{12}, Y_{21} Y_{12}$  を引き、点  $S_1, S_2$  を求め、この点を通り  $O_{12} Y_{12}$  に平行な直線と点線  $Y'_{21} Y'_{12}, Y'_{21} Y_{12}$  の交点  $X'_1, X_2$  を求めればよい。

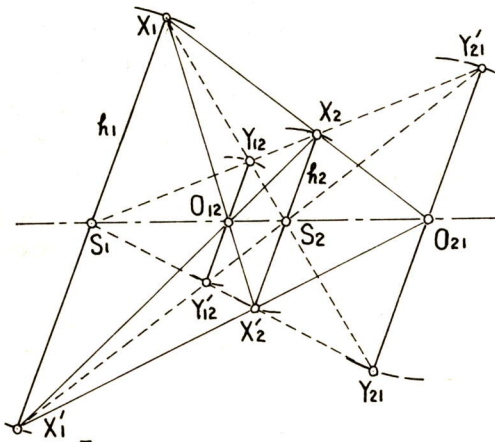


図7

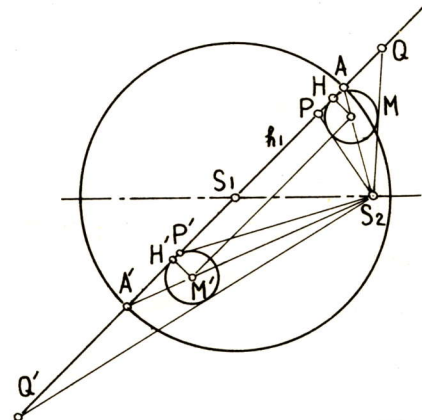


図8

2-5 卵形線の二・三の作図法

次に、準円、補助円などが与えられたときのデカルトの卵形線の作図法を述べる。

作図1. 任意の1つの円  $S_1$  を準円とし、他に1つの焦点  $S_2 (S_1 \neq S_2)$  と定比  $\frac{n}{m}$  が与えられたとき、この卵形線を描くこと。

図8において、円  $S_1$  と点  $S_2$  が与えられている。今、中心  $S_1$  を通る任意な直線  $h_1$  と円  $S_1$  との交点を  $A$  とする。 $A$  と  $S_2$  を結ぶ直線上に、 $S_2 M : MA = m : n$  となるように  $M$  をとる。次に、 $M$  から直線  $h_1$  に垂線を下し、その足を  $H$  とする。 $M$  を中心とし、 $MH$  を半径とする円を描き、 $S_2$  を通り、その円に接する直線との交点を  $P$  とする。 $S_1$  を中心に  $h_1$  を1回転させるとき、 $P, Q$  は、(2) 式を満たす卵形線を描く。ここで、 $P, Q$  は同じ性質をもつが、 $P$  は内分枝を、 $Q$  は外分枝を満たすものを表わす。以下の図においても同様である。

作図2. 任意の2つの円を準円として与えられたとき、この卵形線を描くこと。

図9において、円  $S_1$  と円  $S_2$  が与えられている。まず、 $S_1, S_2$  を通り、互いに平行な直線  $l_1, l_2$  を引く。 $l_1$  が円  $S_2$  と交わる点を  $B$ 、 $l_2$  が円  $S_1$  と交わる点を  $A$  とする。このとき、直線  $S_1 A$  と  $S_2 B$  の交点  $P, Q$  は、 $A$  あるいは  $B$  が、円  $S_2$  上あるいは円  $S_1$  上をそれぞれ動くとき、(2) 式を満たす卵形線を描く。

作図3. 任意の1つの円Oを補助円とし, 他に2つの焦点  $S_1, S_2$  ( $S_1 \neq S_2$ ) がOと共線であるように与えられたとき, この卵形線を描くこと。

図10において, 円Oと, その中心線上に任意に二点  $S_1, S_2$  が与えられている。まず,  $S_1, S_2$  を通り, 互いに平行な直線を  $l_1, l_2$  とする。 $l_1, l_2$  が円Oと交わる点をそれぞれN, Mとする。次に, ONに平行に  $S_2$  を通る直線  $h_2$  を引く。同様にOMに平行に  $S_1$  を通る直線  $h_1$  を引く。すると,  $h_1, h_2$  の交点P, Qは, NあるいはMが円O上を動くとき, (2)式を満たす卵形線を描く。ここで, N, P, MあるいはN, Q, Mが共線であることは, パップスの定理より明らか。

作図4. 任意の2つの円  $O_1, O_2$  が補助円として与えられたとき, この卵形線を描くこと。

図11において, 円  $O_1, O_2$  ( $O_1 \neq O_2$ ) が与えられている。前節の準円と補助円の関係より, 焦点  $S_1, S_2$  を求め,  $S_1, S_2$  を通り互いに平行な直線  $l_1, l_2$  を引く。 $l_1$  と円  $O_1, O_2$  が交わる点をそれぞれ  $N_1, N_2$  とし, 同様に  $M_1, M_2$  をとる。次に, 直線  $N_1M_1$  と直線  $N_2M_2$  が垂直に交わる点をPあるいはQとする。すると, P, Qは,  $N_1$  あるいは  $M_1$  が円  $O_1$  上を動くとき, (2)式を満たす卵形線を描く。

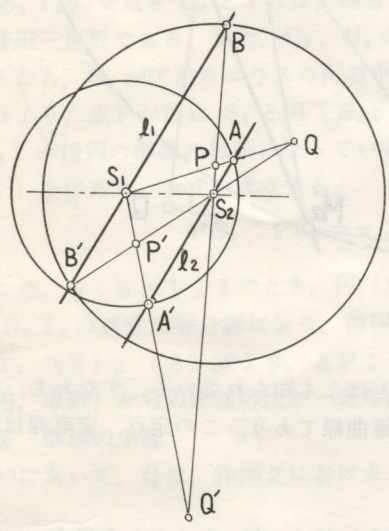


図9

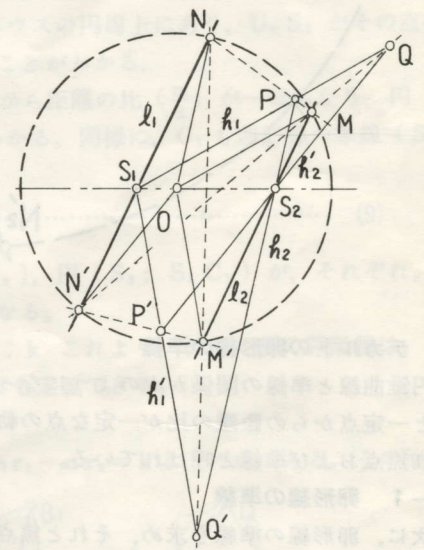


図10

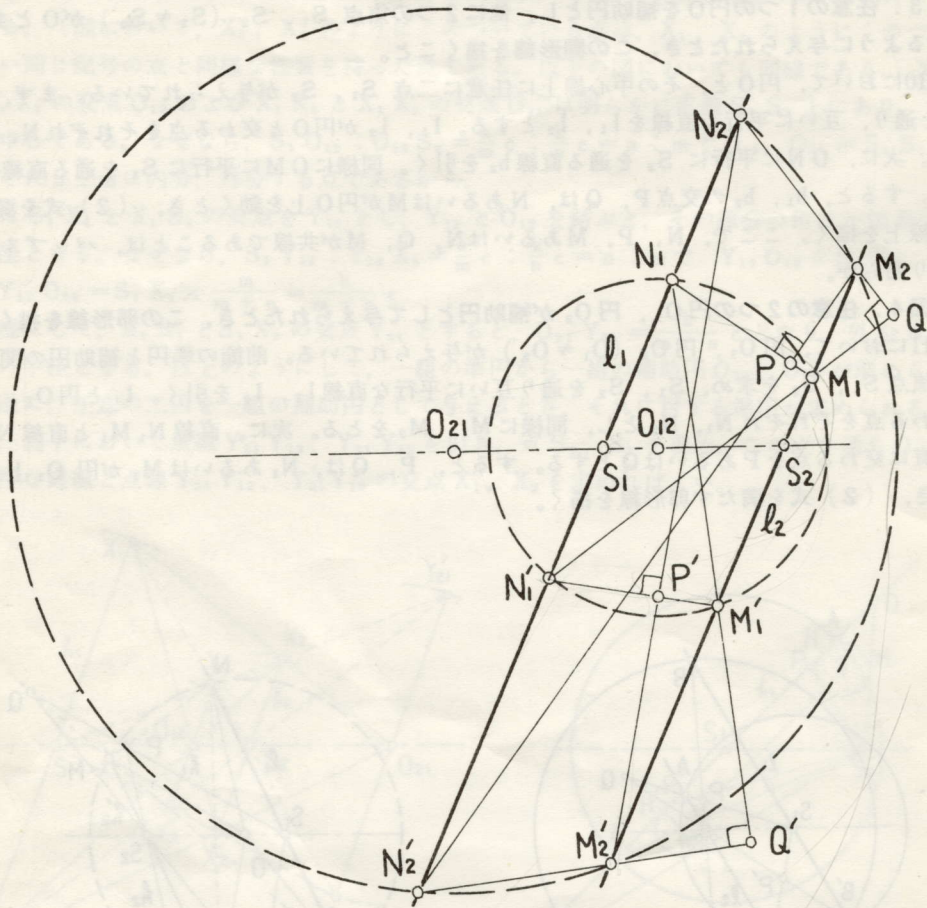


図 11

3. デカルトの卵形線の準線

円錐曲線と準線の関係が次のようになっていることはよく知られている。すなわち、一定直線と一定点からの距離の比が一定な点の軌跡は、円錐曲線であり、この定点、定直線は、それぞれ焦点および準線と呼ばれている。

3-1 卵形線の準線

次に、卵形線の準線を求め、それと焦点からの距離の比が一定であることを示す。

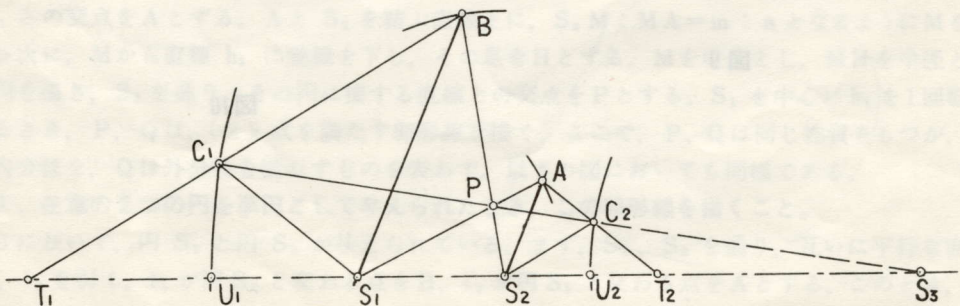


図12

図12において、二つの準円  $(S_1; \frac{k}{m}c)$  ,  $(S_2; \frac{k}{n}c)$  が与えられているとする。前節作図2によって、P, A, Bが得られたとする。ここで、直線  $S_1 S_2$  上の1点  $T_2$  を  $\triangle AS_1 S_2$  の  $\triangle T_2 S_1 A$  となるように決める。すると、 $S_1 T_2 : S_1 A = S_1 A : S_1 S_2 = \frac{k}{m}c : c$  より

$$S_1 T_2 = \frac{(S_1 A)^2}{S_1 S_2} = \frac{k^2}{m^2}c \quad \dots\dots\dots (7)$$

これより、 $T_2$  は定点であることがわかる。同様に  $T_1$  を決めた。次に、 $S_2$  を通り  $T_1 B$  に平行な直線を引き、 $AT_2$  との交点を  $C_2$  とする。すると、 $\angle C_2 S_2 T_2 = \angle BT_1 S_2 = \angle S_1 B S_2 = \angle AS_2 B$  より、 $\angle PS_2 A = \angle C_2 S_2 T_2$  となり、 $\triangle APS_2 \sim \triangle T_2 C_2 S_2$  となる。ゆえに(6)式より、 $S_2 P : PA = m : n$  となるから、 $S_2 C_2 : C_2 T_2 = m : n$  となり、Aが準円  $(S_1; \frac{k}{m}c)$  上を動くとき、 $C_2$  は二定点  $S_2, T_2$  からの距離の比が  $m : n$  のアポロニウスの円周上を動く。さて、 $\angle APS_2 = \angle T_2 C_2 S_2$  より、四角形  $APS_2 C_2$  は同一円周上にある。ゆえに、 $\angle PC_2 S_2 = \angle PAS_2 = \angle AT_2 S_2$  ,  $\angle S_2 PC_2 = \angle S_2 AT_2$  より、 $\triangle S_2 PC_2 \sim \triangle S_2 AT_2$  , これより、 $S_2 P : PC_2 = S_2 A : AT_2 = S_1 S_2 : S_1 A = c : \frac{k}{m}c = m : k$  , これより、次式が成立する。

$$S_2 P : PC_2 = m : k \quad \dots\dots\dots (8)$$

ゆえに、Pは、アポロニウスの円周上の点  $C_2$  と焦点  $S_2$  からの距離の比が一定となる。

ここで、 $PC_2$  の延長線が直線  $S_1 S_2$  と交わる点を  $S_3$  とする。また、 $\angle S_2 C_2 T_2$  の二等分線と  $S_2 T_2$  の交点を  $U_2$  とすれば、明らかに  $\angle S_3 C_2 U_2 = \angle C_2 U_2 S_3$  となり、 $\triangle S_3 C_2 U_2$  は二等辺三角形である。また、 $C_2, U_2$  がアポロニウスの円周上にあり、 $U_2 S_3$  がその直径上にあるから、 $S_3$  がアポロニウスの円の中心であることがわかる。

これより、点Pが焦点  $S_2$  と円  $(S_3; S_3 C_2)$  から距離の比  $(\frac{m}{k})$  が一定となり、円  $(S_3; S_3 C_2)$  が楕円の準線の拡張になっていることがわかる。同様に、 $C_1$  も卵形線の準線  $(S_3; S_3 C_1)$  上にあり、次式が成立する。

$$PS_1 : PC_1 = n : k \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $m : n = 1 : 1$  のとき、円  $(S_3; S_3 C_2)$  , 円  $(S_3; S_3 C_1)$  が、それぞれ、 $S_2 T_2, S_1 T_1$  の垂直二等分線になり、楕円の準線となる。

さて、(6), (8)式より、 $AP : PC_2 = n : k$  これより、デカルトの卵形線は、二円(準円, 準線)からの距離の比が一定な曲線としても定義できる。

### 3-2 準線の半径

図13において、Qは、作図2におけるように、 $mr_1 - nr_2 = kc$  上の点である。その他の点

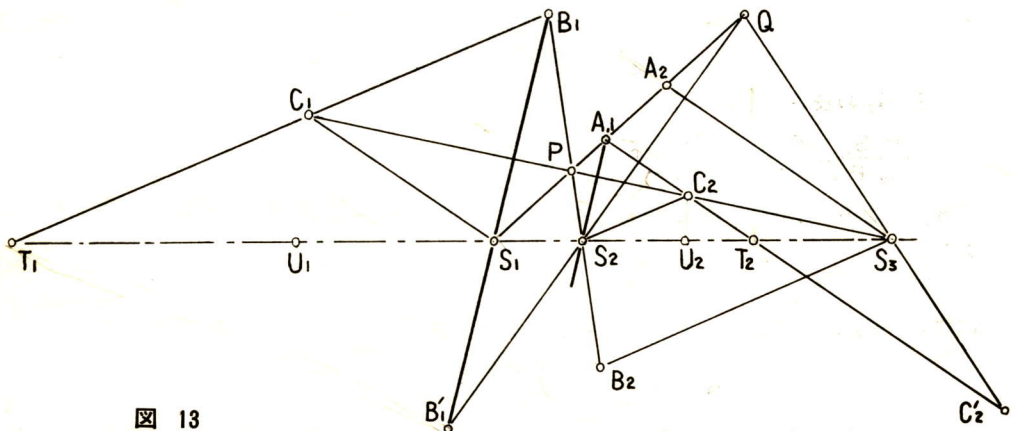


図 13

は、図12と同じである。ここで、 $\angle S_1 B'_1 S_2 = \angle A_1 S_2 Q = \angle C_2 S_2 T_2$ 、また、 $\angle P A_1 S_2 = \angle P C_2 S_2$  ゆえに、 $\angle P Q S_2 = \angle P S_3 S_2$ 、これより、四点  $P Q S_3 S_2$  が同一円周上にあり次の結果を得る。

$$S_1 P \cdot S_1 Q = S_1 S_2 \cdot S_1 S_3 = \text{定数} = \frac{k^2 - n^2}{m^2 - n^2} c^2 \dots\dots\dots (10)$$

この式の定数の値は、適当に計算すれば求まるが、文献3)より引用した。さて、上式より、卵形線上の外分枝上の点Qは、 $S_1$ に関する点Pの反点である。それゆえ、内分枝と外分枝が焦点に関して反転曲線の関係にある<sup>3)</sup>

次に準線 ( $S_3$ ;  $S_3 C_2$ ) の半径を求める。 $S_3 C_2 = S_3 U_2 = S_1 S_3 - S_1 S_2 - S_2 U_2$

(10) 式より 
$$S_1 S_3 = \frac{k^2 - n^2}{m^2 - n^2} c \dots\dots\dots (11)$$

図より、 $S_2 U_2 = \frac{m}{m+n} (S_1 T_2 - S_1 S_2)$  (7) 式より  $S_1 T_2 = (k^2 / m^2) c$

これより、次の準線の半径 ( $S_3 C_2$ ) が求まり、同様にして  $S_3 C_1$  が求まる。

$$S_3 C_2 = \frac{n}{m} \frac{(k^2 - m^2)}{(m^2 - n^2)} c \quad (12) \quad S_3 C_1 = \frac{m}{n} \frac{(k^2 - n^2)}{(m^2 - n^2)} c \dots\dots\dots (13)$$

4. 卵形線の第3の焦点とそれに対する準円、補助円、準線

さて、(10) 式より、 $S_3$  がデカルトの卵形線の第3の焦点であることがわかる。<sup>3)</sup>これは、(8)、(9) の関係が、作図1と類似していることからわかる。

4-1 第3の焦点の他の焦点との同等性

このことについては、図13における、 $S_3 P = r_3$  とすれば、 $r_1$  と  $r_3$  が一次の関係にあることから明らかにされている<sup>3)</sup> が、ここでは、別な見方で明らかにする。

定義より 
$$S_1 S_2 = c = R_{12} \dots\dots\dots (14)$$

(11) 式より 
$$S_1 S_3 = \frac{k^2 - n^2}{m^2 - n^2} c = R_{13} \dots\dots\dots (15)$$

(14)、(15) 式より 
$$S_2 S_3 = \frac{k^2 - m^2}{m^2 - n^2} c = R_{23} \dots\dots\dots (16)$$

これより、 $S_1 S_2 : S_2 S_3 : S_3 S_1 = m^2 - n^2 : k^2 - m^2 : n^2 - k^2$  ゆえに、 $S_1, S_2, S_3$  が同等であることがわかる。5節において、このことはより明白になろう。

4-2 第3の焦点と第1、第2焦点間の準円

前節の同等性から、( $S_1, S_2$ ) の間に一組の準円が存在するのと同様に ( $S_2, S_3$ ) ( $S_3, S_1$ ) の組にも、それぞれ一組の準円が存在すると考えられる。次にそのことを具体的に示す。

図13において、 $S_3$  より  $S_2 C_2$  に平行な直線を引き、直線  $S_2 P$  との交点を  $B_2$  とする。すると、 $S_1 B_2$  の長さは、次のようにして求まる。

$$\frac{P S_2}{C_2 P} = \frac{P B_2}{P S_3} = \frac{P B_2 - P S_2}{P S_3 - P C_2} = \frac{S_2 B_2}{S_3 C_2} \dots\dots\dots$$

(8) 式より  $P S_2 : C_2 P = m : k$  ゆえに  $S_2 B_2 = \frac{m}{k} S_3 C_2$  これに (12) 式の値を代入して

$$S_2 B_2 = \frac{n}{k} \frac{(k^2 - m^2)}{(m^2 - n^2)} c \quad (\text{定数})$$

同様に、 $S_3$  より  $S_1 C_1$  に平行な直線を引き、直線  $S_1 P$  との交点を  $A_2$  とすれば、

$$S_1 A_2 = \frac{m}{k} \frac{(k^2 - n^2)}{(m^2 - n^2)} c \quad (\text{定数})$$

ここで、 $S_2, B_2, S_3, C_2$  および  $P$  の関係が作図2に対応していることがわかる。また、

$S_1, A_2, S_3, C_1, P$ についても同様、これより、次の結果を得る。

焦点  $S_2, S_3$  間の準円の半径は、

$$S_2 B_2 = \frac{n(k^2 - m^2)}{k(m^2 - n^2)} c = \frac{n}{k} R_{23}, \quad S_3 C_2 = \frac{n(k^2 - m^2)}{m(m^2 - n^2)} c = \frac{n}{m} R_{23} \quad \dots\dots\dots (17)$$

焦点  $S_3, S_1$  間の準円の半径は、

$$S_3 C_1 = \frac{m(k^2 - n^2)}{n(m^2 - n^2)} c = \frac{m}{n} R_{13}, \quad S_1 A_2 = \frac{m(k^2 - n^2)}{k(m^2 - n^2)} c = \frac{m}{k} R_{13} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、(15)、(16)式を使った。

4-3 卵形線の定義式

さて、 $S_1 S_2$  間の準円の半径は、(14)式を使って、 $\frac{k}{m} R_{12}, \frac{k}{n} R_{12}$  であり、焦点  $S_1, S_2$  から卵形線上の点  $P$  あるいは  $Q$  までの距離をそれぞれ  $r_1, r_2$  とおくと、 $r_1, r_2$  は、

$$m r_1 \pm n r_2 = k R_{12} \quad \dots\dots\dots (19)$$

を満たしたのと同様に、焦点  $S_3$  からの距離を  $r_3$  とおくと、(17)式より、 $r_2, r_3$  は、

$$\mp k r_2 \pm m r_3 = n R_{23} \quad \dots\dots\dots (20)$$

を満たし、同様に、(18)式より、 $r_3, r_1$  は、下式を満たす。

$$-n r_3 \mp k r_1 = \pm m R_{31} \quad \dots\dots\dots (21)$$

ただし、 $R_{13} = -R_{31}, k > m > n > 0$  の場合で、(19)、(20)、(21)の複号の上の符号が、ともに同一の卵形線の内分枝を表わし、下の方がともに同一の外分枝を表わす。つまり、一組

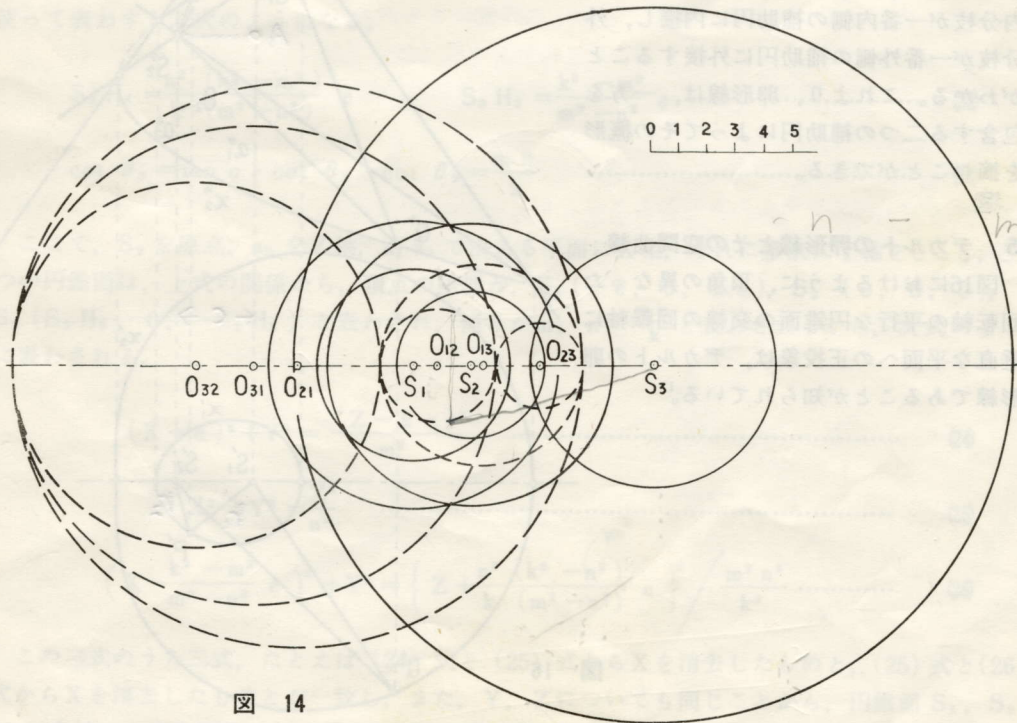


図 14



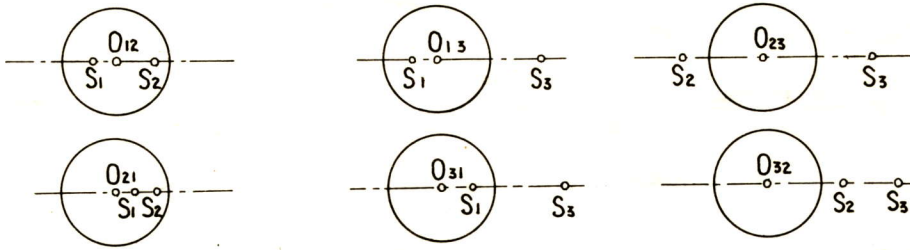


図 15

の卵形線を定義する場合、(19)，(20)，(21)のどれを使ってもよいことになる。

さて、定義式がわかると、準円、補助円がわかる。また、図13におけるように、準円は準線でもあった。これらの円(準円6コ、補助円6コ)を具体的に描くと、図14のようになる。

ただし、 $m=3$ ， $n=2$ ， $k=5$ ， $R_{12}=2$ として(15)，(16)式より、

$$R_{23}=6.4, R_{31}=-8.4$$

図14からわかるように、補助円は、6個の円が互いに接している。これは、補助円の半径と中心の関係から計算してもわかる。また、図15のように、作図3における1つの補助円と2つの焦点の関係は、焦点が補助円上にある場合を除いて、6種類に分類できるが、図14の6個の補助円とそれに対する焦点(補助円  $O_{12}$ ，

$O_{21}$ は焦点間  $S_1 S_2$ をそれぞれ、内分、外分した点を中心としている)の関係は、この6種を全部満たす。また、卵形線は、内分枝が一番内側の補助円に内接し、外分枝が一番外側の補助円に外接することがわかる。これより、卵形線は、一方を包含する二つの補助円によってその概形を掴むことができる。

據

### 5. デカルトの卵形線とその空間曲線

図16におけるように、頂角の異なる回転軸の平行な円錐面の交線の回転軸に垂直な平面への正投影は、デカルトの卵形線であることが知られている。<sup>1)</sup>

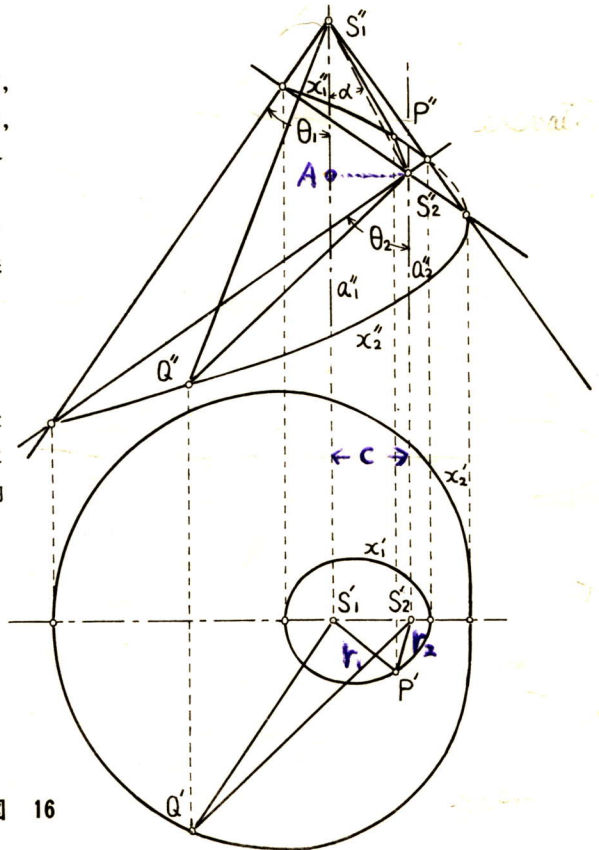


図 16

5-1 二つの円錐面の相貫曲線と卵形線

上記の相貫曲線の正投影象が卵形線であることを、双極座標を使って示す。

今、二つの平行な回転軸によって決まる平面を  $\pi_2$ 、回転軸に垂直な平面を  $\pi_1$  とする。ここで、 $\pi_2$  を立面図、 $\pi_1$  を平面図としたのが、図16である。さて、頂点  $S_1, S_2$  を持つ円錐面の頂角をそれぞれ、 $\theta_1, \theta_2$  とする。ここで、 $\cot \theta_1 = m, \cot \theta_2 = n$  とおく。すなわち、 $m, n$  は、 $\pi_1$  面に対する円錐面の傾角を表わす。また回転軸間距離、すなわち、 $S_1 S_2$  を  $c$  とする。また、回転軸を  $a_1, a_2$  とする。 $a_1$  と  $S_1 S_2$  のなす角を  $\alpha$  とおき、 $\cot \alpha = k$  とおく。交線(すなわち、デカルトの卵形線の空間曲線)を  $x$  とする。 $x$  上の任意の点  $P$  と  $S_1$  を結ぶ線分(すなわち、円錐  $S_1$  の  $P$  点を通る母線上の線分)の  $\pi_1$  面への正射影を  $r_1$  とする。同様に  $S_2 P$  の方を  $r_2$  とする。すると、 $S_1 P$  と  $S_2 P$  の  $a_1$  軸 への正射影は、それぞれ、 $m r_1, n r_2$  に等しく、これらの和は、 $S_1 S_2$  の  $a_1$  軸 への正射影すなわち  $k c$  に等しい。ゆえに、 $m r_1 + n r_2 = k c$  となり、 $\pi_1$  面上の点  $P$  は、(2) 式を満たすデカルトの卵形線上の点であることがわかる。 $Q$  についても同様に考えて、 $m r_1 - n r_2 = k c$  を満たすことがわかる。

5-2 三つの円錐面の相貫曲線と卵形線

次に、<sup>three cones intersecting</sup> 立面図について考える。 $\pi_2$  面上での二つの円錐面の母線の交点を、図17のように、 $A, B, C, D$ 、とする。 $\angle DAC = \angle DBC$  より、明らかに四点  $A, B, C, D$  は同一円周上にある。ここで、直線  $AB$  と  $DC$  の交点を  $S_3$  とする。また、直線  $BS_3$  上に  $S_3$  に対して  $B$  と反対側の1点を  $E$  とする。 $\angle ADC = \angle S_1 B A$  より、 $\angle CS_3 E$  の二等分線  $a_3$  は、 $a_1, a_2$  に平行である。つまり、円錐  $S_1$  と円錐  $S_2$  を決めると、頂点を  $S_3$ 、回転軸を  $a_3$ 、子午線を直線  $AB$  とする円錐面が、一意的に決まることがわかる。ここで、円錐面  $S_1, S_2$  の交線が円錐面  $S_2, S_3$  の交線および円錐面  $S_3, S_1$  の交線と空間的に一致することを示す。

図16と同様に、円錐  $S_3$  の頂角を  $\theta_3$  とする。また、 $a_2 \parallel a_3$  より、 $\angle BS_3 C$  の二等分線は、 $a_2$  に直交する。この交点を  $H_3$  とする。さて、 $S_2 H_3, S_3 H_3$ 、頂角  $\theta_3$  を  $m, n, k, c$  を使って表わすと、次のようになる。

$$S_2 H_3 = \frac{n^2 (k^2 - m^2)}{k (m^2 - n^2)} c \quad S_3 H_3 = \frac{k^2 - m^2}{m^2 - n^2} c \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\cot \theta_3 = \tan \alpha \cdot \cot \theta_1 \cdot \cot \theta_2 = \frac{m n}{k} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 $S_2$  を原点、 $a_2$  を  $Z$  軸、 $a_1 a_2$  で決まる平面に  $X$  軸、それに垂直に  $Y$  軸をとると、三つの円錐面は、上式の関係から、頂点の座標が、 $S_1 (-c, 0, k c), S_2 (0, 0, 0), S_3 (S_3 H_3, 0, -S_2 H_3)$  と表わされ、傾きが  $m, n, \frac{m n}{k}$  と表わされるから、次式のように表わされる。

$$(X + c)^2 + Y^2 = \frac{(Z - k c)^2}{m^2} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$X^2 + Y^2 = \frac{Z^2}{n^2} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\left( X - \frac{k^2 - m^2}{m^2 - n^2} c \right)^2 + Y^2 = \left\{ Z + \frac{n^2 (k^2 - n^2)}{k (m^2 - n^2)} c \right\}^2 \frac{m^2 n^2}{k^2} \quad \dots\dots\dots (26)$$

この三式のうち二式、たとえば (24) 式と (25) 式から  $X$  を消去したものと、(25) 式と (26) 式から  $X$  を消去したものとが一致し、また、 $Y, Z$  についても同じことから、円錐面  $S_1, S_2, S_3$  の交線である空間曲線は、ただ1組存在することがわかる。

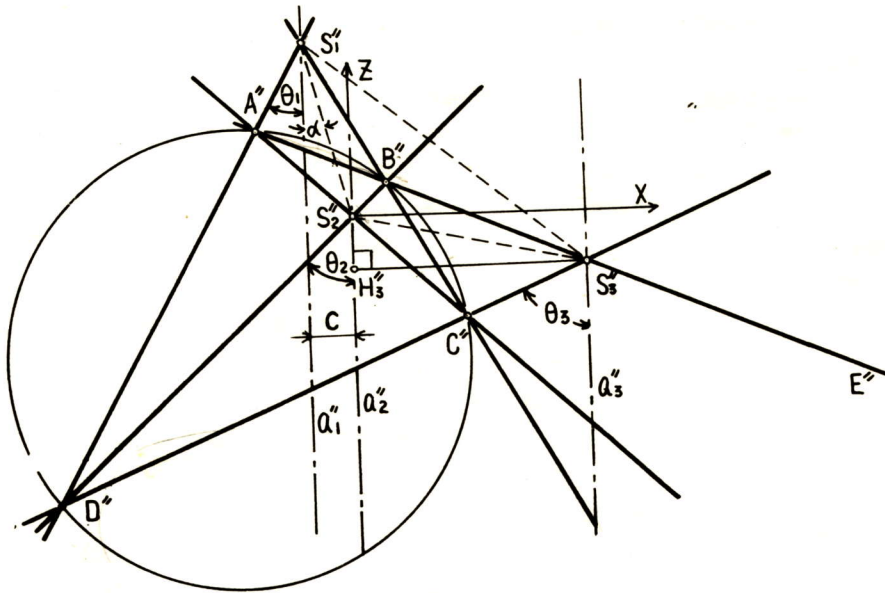


図 17

次に、 $\Delta S_1 S_2 B$ について見ると、 $S_1 B$ 、 $S_2 B$ 、 $S_1 S_2$ の $\pi_1$ との傾きが $m$ 、 $n$ 、 $k$ であり明らかに $k > m > n$ であり、これは、(3)式に対応している。同様に、 $\Delta S_2 S_3 B_2$ において三辺の傾きの関係が(4)式の関係にあることがわかる。 $\Delta S_3 S_1 B$ についても、同様。

また、(19)～(21)式の±の符号も図17と比較すれば明らかである。つまり、空間曲線 $x_1$ (図16の内分枝を作る曲線)が、回転軸方向に関して、 $S_1$ 、 $S_2$ の間にあるから、 $r_1$ 、 $r_2$ の係数の正負の符号が一致し、 $x_2$ は、 $S_1 S_2$ の外側にあるから、 $r_1$ 、 $r_2$ の係数の正負の符号が逆である。また、 $x_1$ 、 $x_2$ と $S_2$ 、 $S_3$ などの関係から(20)、(21)の±の符号がわかる。

さて、ここで、空間図形とデカルトの卵形線の平面的性質である準円、補助円などの関連を考える。

図18におけるように準円は、各円錐面の頂点を通る回転軸に垂直な平面で切断したときのできる円を $\pi_1$ に正投影したものであることがわかる。これからも、図14におけるように、6個の準円が存在することがわかる。ただし、図18は、立面図のみ。

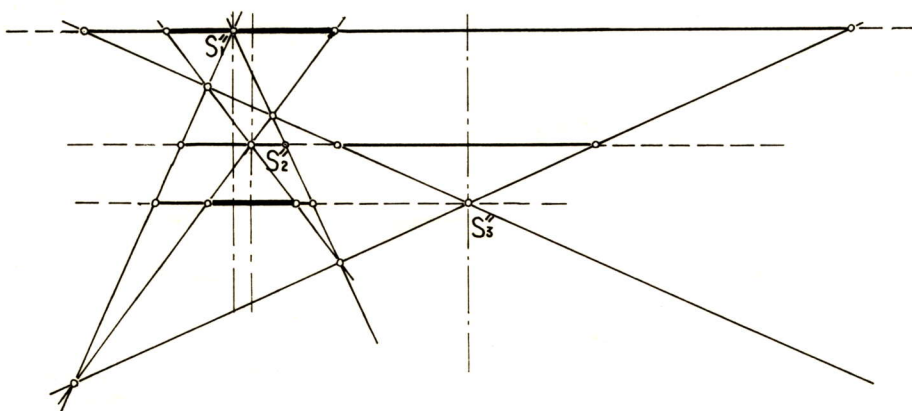


図 18

さて、図19において、四点A, B, C, Dおよびその中点の平面図を考える。図中  $O_{12}$ ,  $O_{21}$  は、それぞれAB, CDの中点であるが、図16におけるように  $m, n, k, c$  をとったとき、 $S_1 O_{12} : O_{12} S_2 = \frac{n}{m} : \frac{m}{n}$ ,  $S_1 O_{21} : O_{21} S_2 = \frac{m}{n} : \frac{n}{m}$  となるのが簡単な計算からわかる。このことから、 $O_{12}$ ,  $O_{21}$  は、焦点  $S_1$ ,  $S_2$  を内、外分する点であり、補助円の中心であることがわかる。また、 $O_{12} B'$  および  $O_{21} D'$  がそれぞれの半径である。

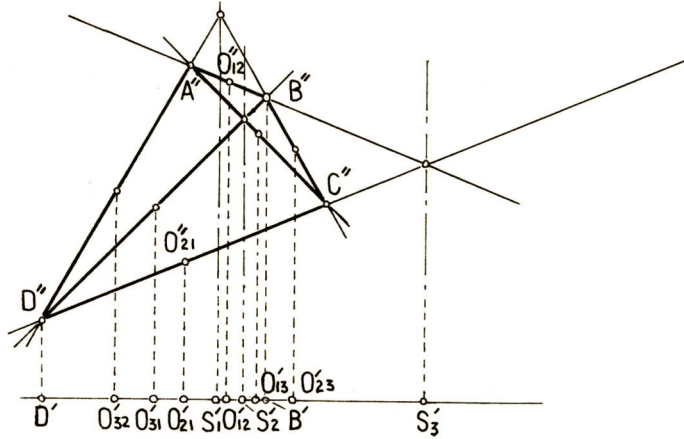


図 19

以上のことから、 $mr_1 \pm nr_2 = kc$  で与えられるデカルトの卵形線に付随する準円、補助円、準線の位置関係が、図17さえ書けば、ほぼ明らかになる。また、1組のデカルトの卵形線は、円に内接する四角形ABCD（特別な場合三角形となる）によって決定されると言える。

6. デカルトの卵形線の接線

今、一つの卵形線の定義式がわかっているものとする。つまり、作図1~4までのいずれかの条件が与えられているとする。図20において、作図1の条件が与えられており、卵形線上の点  $P_1$  における接線を考える。今、 $A_1 S_2$  の垂直二等分線は、 $P_1$  における楕円の接線であることが知られている。ここで、 $A_1 P_1$  の垂直二等分線と楕円上の点  $P_1$  の接線との交点を  $V_1$  とする。すると、 $P_1 V_1$  が  $P_1$  におけるこの卵形線に対する接線  $t_1$  である。つまり、 $\triangle A_1 P_1 S_2$  の外心  $V_1$  と  $P_1$  を結ぶ直線が  $P_1$  における卵形線に対する接線である。 $Q_1$  についても同様。

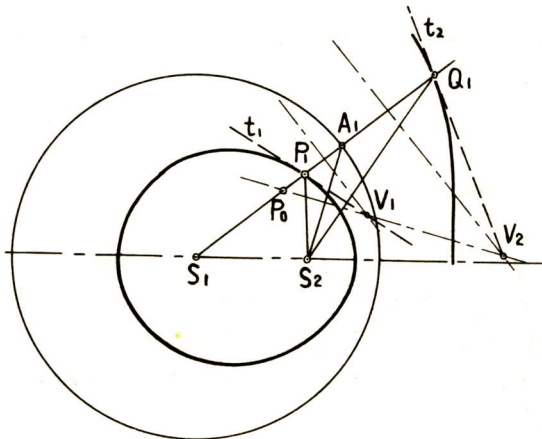


図 20

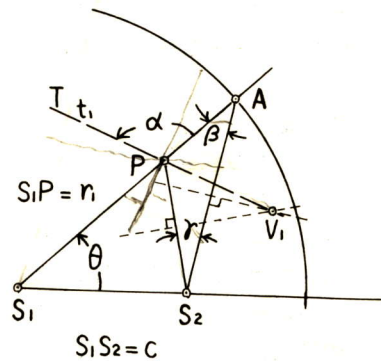


図 21

なお、ここで、 $P_1$  が  $P_0$  に一致した場合、 $P_1 V_1$  と楕円の接線が一致し、また、 $P_1$  が  $A_1$  に一致したとき ( $\frac{n}{m} = 0$ )  $V_1 P_1$  が  $A_1$  における円  $S_1$  の接線であることは、明らかである。

次に、解析的に  $t_1$  が点  $P_1$  における卵形線に対する接線であることを示す。

図21におけるように極座標表示における曲線  $r = f(\theta)$  上の点  $P$  での接線  $PT$  と、動径  $S_1 P$  から  $PT$  のほうへまわる角を  $\alpha$  とすると次式が成立する<sup>4)</sup>

$$\cot \alpha = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \dots\dots\dots (27)$$

今、卵形線が、 $mr_1 \pm nr_2 = kc$  のとき、 $S_1$  を極  $S_1 S_2$  方向を始線とすれば、 $r_1$  は次式を満たす。

$$r_1 = \frac{c \{ (km - n^2 \cos \theta) \mp n \sqrt{n^2 \cos^2 \theta - 2km \cos \theta + k^2 + m^2 - n^2} \}}{m^2 - n^2} \dots\dots\dots (28)$$

ここで、複号の-は内分枝、+は外分枝を表わす。ただし、 $k > m > n > 0$  これより、

$$\frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{d\theta} = \frac{\mp n \sin \theta}{\sqrt{n^2 \cos^2 \theta - 2km \cos \theta + k^2 + m^2 - n^2}} \dots\dots\dots (29)$$

ここで、図21から

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos (\frac{\pi}{2} + \gamma)}{\sin (\frac{\pi}{2} + \gamma)} = \frac{-\sin \gamma}{\cos \gamma} \dots\dots\dots (30)$$

ところで、 $S_2 P : PA = m : n$  より、 $m \sin \gamma = n \sin \beta$  ..... (31)

また、 $\triangle AS_1 S_2$  において

$$\frac{c}{\sin \beta} = \frac{c \sqrt{(k^2/m^2) + 1 - 2(k/m) \cos \theta}}{\sin \theta} \dots\dots\dots (32)$$

(31)、(32) 式を (30) 式に代入して、 $\beta$ 、 $\gamma$  を消去すると

$$\cot \alpha = \frac{-n \sin \theta}{\sqrt{n^2 \cos^2 \theta - 2km \cos \theta + k^2 + m^2 - n^2}} \dots\dots\dots (33)$$

これは、(29) の-の符号をもつ式に一致し、(27) 式が成立することがわかる。ゆえに、 $t_1$  が  $P_1$  における卵形線の接線であることがわかる。 $t_2$  についても同様。

### 7. 総括

デカルトの卵形線を楕円の一般化と考え、考察した結果、以下のような二・三の幾何学的性質がわかった。

○円錐曲線には、準円、補助円、準線が付随しているが、これは、卵形線にも同じような準円、補助円、準線が付随していた。しかし、卵形線には、焦点が3つあり、したがって、準円が6個あった。また、卵形線の準線は円であり、円の中心が無限遠点にある場合が、円錐曲線の準線となった。このことから、デカルトの卵形線の特別な場合が円錐曲線であることが明らかになった。

○デカルトの卵形線の接線の作図法も得られた。また、デカルトの卵形線の特別な場合が、

リマソンであることが知られているが、卵形線の接線の作図法は、この場合にも使える。  
 ○卵形線の空間曲線をつくる三つの円錐について考えることにより、準円、補助円、準線および三つの焦点の位置が簡単にわかるようになった。

## 参 考 文 献

- 1) ERNST SCHÖRNER, "RAUMBILD-LEHRBUCH DER DARSTELLENDE GEOMETRIE" R. OLDENBOURG VERLAG MÜNCHEN, 1960  
P. 126~P. 127
- 2) F. ホーエンベルク著 増田祥三訳 "技術における構成幾何学" 日本評論社 1969  
P. 55~P. 66
- 3) ロックウッド著 松井政太郎訳 "カーブ" みすず書房 1964  
P. 1~P. 38 P. 200~P. 204
- 4) 栗田稔著 "いろいろな曲線" 共立出版 1969 P. 91

{2}

The circle of curvatures of the Cartesian oval  
*curvature* P.23

デカルトの卵形線の曲率円\*

Oval

蛭子井博孝\*\*

デカルトの卵形線は、前論文<sup>1)</sup>において、焦点、準円、準線、補助円などの性質から楕円の一般化された曲線であることを述べた。本論は、引き続いて卵形線の円による包絡、および頂点(長軸、短軸)における曲率円の作図法を考察した。

1. 卵形線を包絡する円群

この節では、ある円群を考え、その包絡線が卵形線となることを幾何学的に示す。

今、図1において、文献<sup>1)</sup>作図3によりP, Qが求まり、直線 $l_2$ と直線PQの交点をAとする。P, Qが卵形線を描くとき、Aは、準円 $S_1$ (中心; 半径= $S_1$ ;  $S_1A$ )上を動く。ここで、 $O_{12}M_1 = \frac{kc}{m+n}$ ,  $S_1O_{12} : O_{12}S_2 = n : m$ とすると、 $S_1A = \frac{k}{m}c$ となる。さて、直線 $t_1, t_2$ は、文献<sup>1)</sup>の6によってP, Qにおける卵形線の接線である。またPにおける卵形線の法線を $n_1$ とする。そして $n_1$ と $l_2$ の交点を $R_1$ とすれば $\angle APM_1 = \angle S_2PM_1$ ,  $n_1$ は $\triangle APS_2$ の外接円の点Pにおける接線より $\angle R_1PA = \angle PS_2A$ ゆえに $\angle R_1PM_1 = \angle R_1M_1P$ となり $\triangle R_1PM_1$ は二等辺三角形となる。(同様に $\triangle R_1QM_1$ も二等辺三角形となる。)ここで、点Pを通り直線 $N_1M_1$ に垂直な直線と $l_1, l_2$ の交点を $N_2', M_2$ とする。すると $\angle S_1PN_2' = \angle N_2'PS_2$ より $S_2M_2 : M_2A = S_2M_1 : M_1A = m : n$ となり、 $M_2$ を通り直線 $S_1A$ に平行な直線と直線 $S_1S_2$ の交点を $O_{21}$ とすれば、 $M_2$ は中心 $O_{21}$ 、半径 $\frac{kc}{m-n}$ の卵形線の補助円上の点となる。 $\angle M_2PM_1 = \angle R_1PM_1$ ,  $\triangle R_1PM_1$ が二等辺三角形より、 $M_2R_1 = M_1R_1$ となり、 $M_1, M_2$ が補助円 $(O_{12}; O_{12}M_1) = (O_{12}; \frac{kc}{m+n})$ および $(O_{21}; O_{21}M_2) = (O_{21}; \frac{kc}{m-n})$ 上をそれぞれ動くとき、 $R_1$ は中心 $O_0$ (線分 $O_{12}O_{21}$ の中点)、半径

$$\left( \frac{kc}{m+n} + \frac{kc}{m-n} \right) / 2 = \frac{mkc}{m^2-n^2} = mkCo \quad (1)$$

をもつ円周上を動く。また、 $N_2'$ は $M_2N_2' \perp N_1M_1$ より文献<sup>1)</sup>の作図4より補助円 $O_{21}$ 上にあることがわかる。また補助円と準円の関係より $N_1O_{12} \parallel O_{21}N_2'$ で $R_2$ は $N_1N_2'$ の中点、 $O_0$ は $O_{12}O_{21}$ の中点より $O_0R_2 \parallel O_{12}N_1$ となる。ゆえに

$$O_0R_2 = \frac{O_{21}N_2' - O_{12}N_1}{2}$$

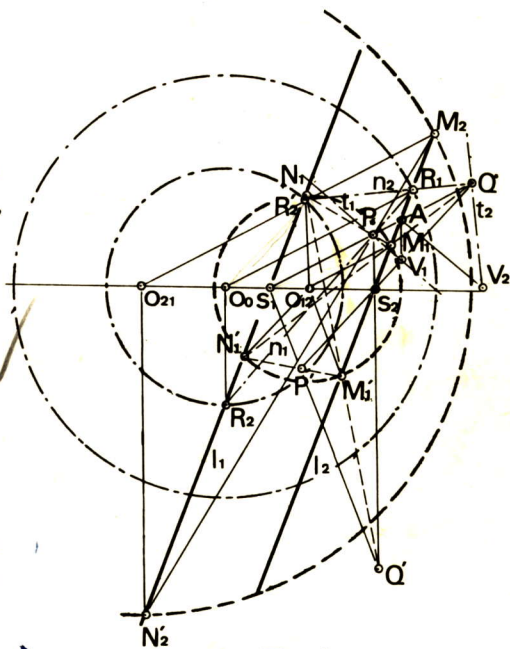


図 1

\* 昭和51年6月10日受付

\*\* 大阪大学

$$= \left( \frac{kc}{m-n} - \frac{kc}{m+n} \right) / 2 = \frac{nkC_0}{m^2-n^2} = nkC_0 \quad (2)$$

このように、円  $(O_0; O_0R_1)$ ,  $(O_0; O_0R_2)$  の中心および半径は補助円  $(O_{21}; \frac{kc}{m-n})$ ,  $(O_{12}; \frac{kc}{m+n})$  より求められる。また  $R_1P$ ,  $R_1Q$  は等しくかつ  $P$ ,  $Q$  における卵形線の法線である。ゆえに、円  $(R_1; R_1M_1)$  は卵形線に  $P$ ,  $Q$  で接する円となる。図2に示すように円  $(O_0; O_0R_1)$  上に中心をもち、 $M_2R_1=R_1M_1$  を半径、つまり  $M_1M_2$  を直径とする円  $(R_1$  を動点とし、直線  $S_2R_1$  より  $M_1, M_2$  が決まる) の包絡線は卵形線の内、外分枝である。同様に円  $(R_2; R_2N_1)$  の包絡線も同じ一組の卵形線を与える。これらの同心円  $(O_0; O_0R_1)=(O_0; mkC_0)$ ,  $(O_0; O_0R_2)=(O_0; nkC_0)$  はその周が卵形線から等距離にあるので、卵形線に対する等距離円と名づけることにする。

2. 等距離円と焦点との関係

ここでは、卵形線の第3の焦点も考慮して前節と同様な等距離円および等距離円と焦点の関係調べる。

図1において等距離円  $(O_0, O_0R_1)$ ,  $(O_0; O_0R_2)$  は補助円  $O_{12}$ ,  $O_{21}$  より求められた。同様に卵形線には図3におけるような関係にある補助円(破線の円)  $(O_{23}; n(k-m)C_0)$ ,  $(O_{32}; n(k+m)C_0)$ , 補助円  $(O_{13}; m(k-n)C_0)$ ,  $(O_{31}; m(k+n)C_0)$  がある。ここで、点  $O_{ij}(i \neq j, i, j=1, 2, 3)$  を通り互いに平行な直線  $h_{ij}$  を引く。補助円  $O_{ij}$  と  $h_{ij}$  の交点を  $H_{ij}$ ,  $H'_{ij}$  とする。今  $H_{ij}$  と  $H'_{ji}$  の中点を  $R_i$ ,  $H'_{ij}$  と  $H_{ji}$  の中点を  $R_j$  とする。すると  $O_{ij}O_{ji}$  の中点を  $O_0$  とすれば(すべての  $i, j$  に対してただ1つの点となる),  $O_0R_i$  は等距離円の半径となり次のように求まる。

半径は、補助円  $O_{23}$ ,  $O_{32}$  に対して

$$(n(k+m)C_0 + n(k-m)C_0) / 2 = nkC_0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(n(k+m)C_0 - n(k-m)C_0) / 2 = mnC_0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

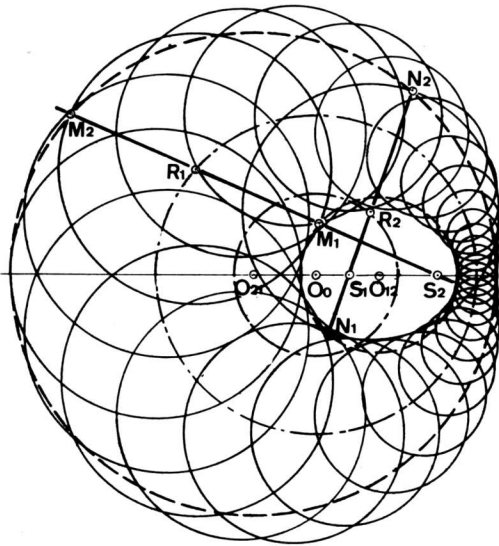


図 2

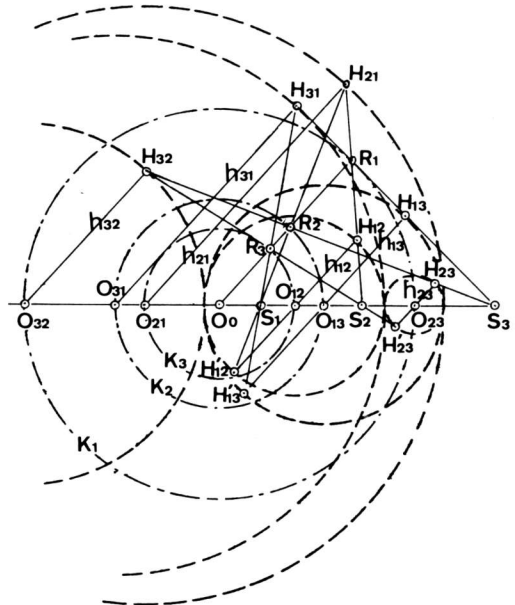


図 3



補助円  $O_{13}, O_{31}$  に対して

$$(m(k+n)C_0 + m(k-n)C_0) / 2 = mk C_0 \tag{1}$$

$$(m(k+n)C_0 - m(k-n)C_0) / 2 = mn C_0 \tag{3}$$

ゆえに等距離円は、中心を  $O_0$  とし半径 (1), (2), (3) の三つの同心円であることがわかる。これを等距離円  $K_1, K_2, K_3$  とする。

また、焦点は直線  $H_{ij}H_{ji}, H'_{ij}H'_{ji}$  と直線  $O_{ij}O_{ji}$  のそれぞれの交点  $S_j, S_i$  である。

計算により  $O_0 S_i \cdot O_0 S_j = O_0 R_k^2 \quad (i \neq j \neq k) \tag{4}$

が成立する。式 (4) は反転を表わしており、焦点  $S_i$  は等距離円  $K_k$  に関する  $S_j$  の反点である。さらに (4) 式より、点  $O_0, S_1, S_2, S_3$  を与えるとき等距離円  $K_1, K_2, K_3$  を求めることができ、逆もまた成立する。ゆえに、つぎのように述べるができる。

1. 卵形線は一直線上にある等距離円の中心  $O_0$ , 3 焦点  $S_1, S_2, S_3$  より定められる。
2. 卵形線は同心円である 3 つの等距離円より定められる。

### 3. 卵形線の頂点における曲率円

さて、図 3 において等距離円が 3 つ求められた。いま、図 4 において、焦点  $S_1, S_3$  の組に対する等距離円  $K_1, K_3$  に対して  $S_1, S_3$  を通り互いに平行な直線  $l_1, l_3$  を引く。その  $l_1, l_3$  と円  $K_3, K_1$  との交点を  $R_1, R'_1, R_3, R'_3$  とする。(図 1 において、 $R_1 R_2, R_1 R'_2$  等が卵形線の法線であったことから)、 $R_1 R_3, R_1 R'_3, R'_1 R_3, R'_1 R'_3$  は卵形線の法線となる。また、 $R_1 R_3, R_3 R'_1$  と円  $K_2$  の交点を  $R_2, R'_2$  とすれば、点  $S_1, S_2, S_3$  円  $K_1, K_2, K_3$  の同等性より、 $R_2 R'_2 S_3$  は同一直線上にあり、また、 $S_1 R'_2 \parallel S_2 R'_1, S_1 R_2 \parallel S_2 R_1, R_3 S_2 \parallel S_3 R_2$  となる。さて、 $\angle R_1 S_2 O_0 = \angle R'_1 S_2 S_3$  であることも簡単な考察からわかる。これにより、 $R_1 S_2$  と円  $K_1$  の交点  $\bar{R}'_1$  は点  $R'_1$  と直線  $O_0 S_3$  に対して対称となる。同様に  $\bar{R}_i, \bar{R}'_i$  が求まる。

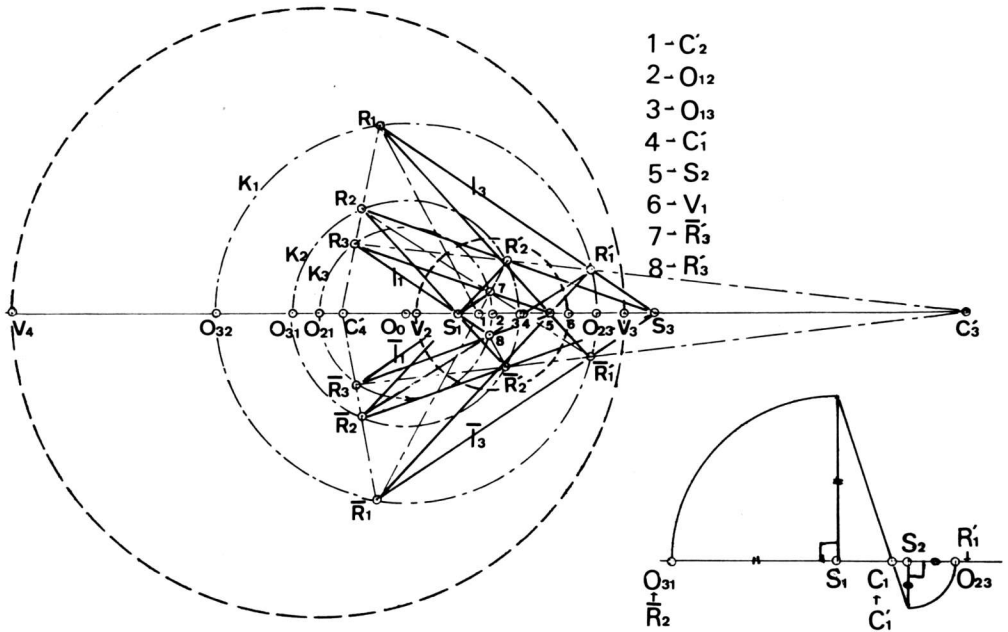


図 4

図 4-1

さて、 $R_1R_3, R_1R'_3, R_3R'_1, R'_1R'_3$  と  $\bar{R}_1\bar{R}_3, \bar{R}_1\bar{R}'_3, \bar{R}_3\bar{R}'_1, \bar{R}'_1\bar{R}'_3$  はそれぞれ、直線  $O_0S_3$  上で交わる。それは  $R$  と  $\bar{R}$  に関する2法線の交点で、そのため  $l_1$  が  $O_0S_3$  に一致する極限においてこの交点は曲率中心となる。つまり卵形線の対称軸（長軸）上の頂点での曲率中心の位置が求まり曲率半径が次のように求まる。

前節より卵形線の定義式が  $mr_1 \pm nr_2 = kc$  ( $k > m > n > 0$ ) のとき、等距離円  $K_1, K_2, K_3$  の半径は (1), (2), (3) となり、(4) 式より

$$O_0S_1 = n^2C_0, O_0S_2 = m^2C_0, O_0S_3 = k^2C_0 \tag{5}$$

これより  $C'_1$  を図のようにとると極限においても  $S_1\bar{R}_2 \parallel S_2R'_1$  で  $\bar{R}_2 \rightarrow O_{31}, R'_1 \rightarrow O_{23}$   $C'_1 \rightarrow C_1$  となることより

$$S_1C'_1 = \frac{S_1S_2 \cdot S_1\bar{R}_2}{S_1\bar{R}_2 + S_2R'_1} \rightarrow S_1C_1 = \frac{S_1S_2 \cdot S_1O_{31}}{S_1O_{31} + S_2O_{23}}$$

$$S_1C_1 = \frac{c(knC_0 + n^2C_0)}{(knC_0 + n^2C_0) + (kmC_0 - m^2C_0)} = \frac{n(k+n)c}{(m+n)(k-m+n)} \tag{6}$$

ここで、 $C_1$  の作図法のみ図4-1に示した。他も同様。なお(6)式の計算に(1)~(3), (5)を使用した。

さて、卵形線は補助円  $O_{12}; O_{21}$  に  $V_1, V_2; V_3, V_4$  で接し  $V_i$  は頂点である。これより  $C_iV_i$  は長軸頂点  $V_i$  の曲率半径となり、次のように求まる。(1)~(3), (5), (6) を使って

$$C_1V_1 = O_{12}V_1 + S_1O_{12} - S_1C_1 = (O_0O_{23} - O_0O_{13}) + S_1O_{12} - S_1C_1$$

$$= \frac{kmc}{m^2 - n^2} - \frac{knc}{m^2 - n^2} + \frac{mnc}{m^2 - n^2} - \frac{n^2c}{m^2 - n^2} - \frac{n(k+n)c}{(m+n)(k-m+n)}$$

$$= \frac{(k-m)(k+n)c}{(m+n)(k-m+n)} \quad \text{同様に } C_2V_2 = \frac{(k+m)(k-n)c}{(m+n)(k+m-n)}$$

$$C_3V_3 = \frac{(k-m)(k-n)c}{(m-n)(k-m-n)} \quad C_4V_4 = \frac{(k+m)(k+n)c}{(m-n)(k+m+n)}$$

さて、図4において、 $l_3$  が円  $K_1$  に接するとき  $R_1, R'_1$  は一致し、法線  $R_1R_3, R'_1R_3$  は一致し、その交点  $R_3$  は、図5のような一致した点  $C_6$  となることは明らかである。また、このとき、法線は図1より明らかなように  $O_0R_1 \parallel S_1V_5$  とすることにより求まる卵形線上の点  $V_5, V_6$  を通る。さてこの  $V_5, V_6$  は解析的には  $d\rho(s)/ds = 0$  を満す曲線の頂点であることも考察できる<sup>2)</sup> ゆえに点  $C_5, C_6$  は、頂点（短軸に相等） $V_5, V_6$  における曲率中心である。図1の関係を考慮して  $O_0C_6 \parallel S_3V_6, O_0C_5 \parallel S_3V_5$  が成立し、 $\angle R_1V_6S_3 = \angle R_1V_5S_3 = \angle R$  も成立する。

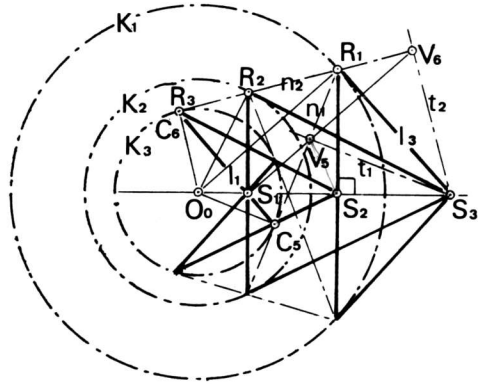


図 5

ゆえに、曲率半径  $C_5V_5, C_6V_6$  は  $C_5V_5 = R_1C_5 - R_1V_5$

$$= \sqrt{O_0R_1^2 - O_0C_5^2} - R_1S_3 \cdot \frac{O_0C_5}{O_0R_1} = \frac{\sqrt{k^2m^2 - m^2n^2} c}{m^2 - n^2} - \frac{\sqrt{k^4 - k^2m^2} c}{m^2 - n^2} \cdot \frac{n}{k}$$

$$= \frac{m\sqrt{k^2 - n^2} - n\sqrt{k^2 - m^2}}{m^2 - n^2} c \quad \text{同様に } C_6V_6 = \frac{m\sqrt{k^2 - n^2} + n\sqrt{k^2 - m^2}}{m^2 - n^2} c$$

これより、 $C_i$  を中心、 $C_iV_i$  を半径とする6つの頂点における曲率円が明らかとなった。

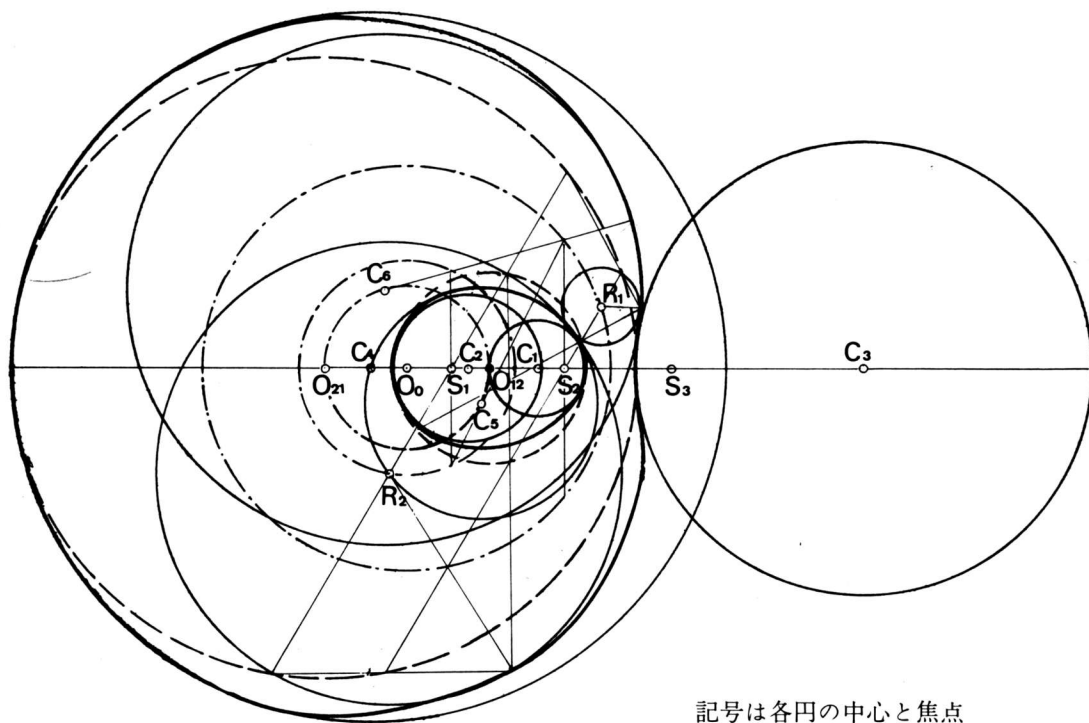
ここで焦点  $S_3$  を通る卵形線の接線  $t_1, t_2$  が短軸頂点の位置を与え、これは  $S_3$  が無限遠に行ったとき楕円に一致する。

以上、卵形線を包絡する円群の中心は等距離円上にあり、3つの等距離円が求まった。また卵形線の曲率円の幾何学的作図法、および、その証明がなされた。その曲率半径は、卵形線の定義式の任意定数  $m, n, k$  の簡単な関数であることがわかった。

また、ここで、この小論を書くに当り、御教示して下さった大阪大学の増田祥三先生に厚くお礼申し上げます。

参考文献

- 1) 蛭子井博孝；“デカルトの卵形線の二・三の性質”，図学研究，12号
- 2) 日本数学会編集；“岩波数学辞典”，p.445.



記号は各円の中心と焦点

補 図

卵形線を包絡する円群

NO.  
79-4-22 清書  
76-11-26

"デカルトの卵形線の曲率円"の図1において  
円(中心  $O_0$ , 半径  $O_0R_1 = \frac{kmC}{m^2-n^2}$ )上に中心  $S$  とす。  
半径  $R, M, \varepsilon$  もこの円群は次式で表された  
たが  $O_0$  を原点,  $\angle R, O_0, S_2 = \theta$  とし,  $O_0, S_2$  を  $x$  軸とす

$$\begin{aligned} & \left(x - \frac{kmC}{m^2-n^2} \cos \theta\right)^2 + \left(y - \frac{kmC}{m^2-n^2} \sin \theta\right)^2 \\ &= \frac{k^2 n^2}{(m^2-n^2)^2} C^2 + \frac{m^2 n^2}{(m^2-n^2)^2} C^2 - \frac{2kmn^2}{(m^2-n^2)^2} C^2 \cos \theta \quad \dots (1) \\ & \frac{kmC}{m^2-n^2} = N \quad \frac{kmC}{(m^2-n^2)} = M \quad \frac{mn}{m^2-n^2} C = K \text{ とおす.} \end{aligned}$$

$$(x - N \cos \theta)^2 + (y - N \sin \theta)^2 = M^2 + K^2 - 2KM \cos \theta$$

$\theta$  について偏微分する。

$$N(x - N \cos \theta) \sin \theta - N(y - N \sin \theta) \cos \theta = KM \sin \theta$$

$$Nx \sin \theta - Ny \cos \theta = KM \sin \theta$$

$$\begin{cases} (Nx - KM) \sin \theta = Ny \cos \theta \\ x^2 - 2Nx \cos \theta + y^2 - 2Ny \sin \theta = K^2 + M^2 - N^2 - 2KM \cos \theta \end{cases}$$

上式より  $\theta$  を消去

$$\begin{cases} (Nx - KM) \sin \theta - Ny \cos \theta = 0 & \dots (1) \\ -2Ny \sin \theta + (2KM - 2Nx) \cos \theta = K^2 + M^2 - N^2 - x^2 - y^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & (1) \times (2KM - 2Nx) + (2) \times Ny \\ & \{-2(Nx - KM)^2 - 2N^2 y^2\} \sin \theta = Ny(K^2 + M^2 - N^2 - x^2 - y^2) \quad \dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1) \times 2Ny + (2) \times (Nx - KM) \\ & \{-2(KM - Nx)^2 - 2N^2 y^2\} \cos \theta = (Nx - KM)(K^2 + M^2 - N^2 - x^2 - y^2) \quad \dots (4) \end{aligned}$$

$$\frac{\{-2(Nx - KM)^2 + N^2 y^2\}^2}{(Nx - KM)^2 + N^2 y^2} = \frac{\{N^2 y^2 + (Nx - KM)^2\}^2 (K^2 + M^2 - N^2 - x^2 - y^2)^2}{(Nx - KM)^2 + N^2 y^2}$$

$$(Nx - KM)^2 + N^2 y^2 = 0$$

$$4\{(Nx - KM)^2 + N^2y^2\} = (x^2 + y^2 - K^2 - M^2 + N^2)^2$$

$x = x + \frac{KM}{N}$  を代入 原点を  $O_0$  として  $S_1, 1:5 > 3$

$$4(N^2x^2 + N^2y^2) = \{(x + \frac{KM}{N})^2 + y^2 - K^2 - M^2 + N^2\}^2$$

$$4N^2(x^2 + y^2) = \{(x + \frac{KM}{N})^2 + y^2 - K^2 - M^2 + N^2\}^2$$

$$\frac{KM}{N} = \frac{n^2c}{m^2 - n^2}$$

$$\therefore 4 \frac{k^2 m^2 c^2}{(m^2 - n^2)^2} (x^2 + y^2) = \left\{ \left( x + \frac{n^2 c}{m^2 - n^2} \right)^2 + y^2 + \frac{k^2 (m^2 - n^2) c^2 - m^2 n^2 c^2}{(m^2 - n^2)^2} \right\}^2$$

$$4k^2 m^2 c^2 (x^2 + y^2) = \left\{ (m^2 - n^2) \left( x + \frac{n^2 c}{m^2 - n^2} \right)^2 + (m^2 - n^2) y^2 + k^2 c^2 - \frac{m^2 n^2 c^2}{m^2 - n^2} \right\}^2$$

$$4k^2 m^2 c^2 (x^2 + y^2) = \left\{ (m^2 - n^2) x^2 + 2n^2 c x + \frac{n^4 c^2}{m^2 - n^2} - \frac{m^2 n^2 c^2}{m^2 - n^2} + k^2 c^2 \right\}^2$$

$$4k^2 m^2 c^2 (x^2 + y^2) = \left\{ (m^2 - n^2) x^2 + 2n^2 c x + n^2 c^2 + k^2 c^2 \right\}^2 \quad \dots A$$

定義より  $m r_1 + n r_2 = k c$   $S_1$  を原点として

$$m\sqrt{x^2 + y^2} + n\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = k c$$

$$[m^2(x^2 + y^2) + n^2\{(x-c)^2 + y^2\} - k^2 c^2]^2 = 4m^2 n^2 (x^2 + y^2) \{(x-c)^2 + y^2\}$$

$$m^2(x^2 + y^2)^2 - 2m^2 n^2 \{(x-c)^2 + y^2\} (x^2 + y^2) + n^4 \{(x-c)^2 + y^2\}^2 + k^4 c^4$$

$$- 2k^2 m^2 c^2 (x^2 + y^2) - 2k^2 n^2 c^2 \{(x-c)^2 + y^2\} = 0$$

$$m^4 (x^2 + y^2)^2 + n^4 \{(x-c)^2 + y^2\}^2 + k^4 c^4 - 2m^2 n^2 (x^2 + y^2) \{(x-c)^2 + y^2\}$$

$$- 2k^2 n^2 c^2 \{(x-c)^2 + y^2\} + 2k^2 m^2 c^2 (x^2 + y^2) = k^2 k^2 m^2 c^2 (x^2 + y^2)$$

$$\{m^2(x^2 + y^2) + n^2\{(x-c)^2 + y^2\} + k^2 c^2\}^2 = 4k^2 m^2 c^2 (x^2 + y^2)$$

$$\{(m^2 - n^2)x^2 + 2n^2 c x - n^2 c^2 + (m^2 - n^2)y^2 + k^2 c^2\}^2 = 4k^2 m^2 c^2 (x^2 + y^2) \quad \dots B$$

A, B は一致

ゆえに (1) の包絡線は卵形線である。

R, M, の長さ

$$O_0 O_{12} = \left( \frac{nc}{m+n} + \frac{nc}{m-n} \right) \div 2 = \frac{mn}{m^2-n^2} c$$

$$S_1 A = \frac{k}{m} c$$

$$\therefore S_2 A = \sqrt{\frac{k^2}{m^2} c^2 + c^2 - 2 \frac{k}{m} c^2 \cos \theta}$$

$$R, M_1 = S_2 A \times \frac{O_0 O_u}{S_1 S_2}$$

$$= \frac{mn}{m^2-n^2} \sqrt{\frac{k^2}{m^2} c^2 + c^2 - 2 \frac{k}{m} c^2 \cos \theta}$$

$$= \frac{nc}{m^2-n^2} \sqrt{k^2 + n^2 - 2 km \cos \theta}$$

# デカルトの卵形線の性質に関する考察\*

—— 計算機援用作画による比較検討 ——

蛭子井 博 孝\*\*

## 1. はじめに

卵形線は、数学上“内部の任意の2点を結ぶ線分上の点がすべて内部の点である閉曲線”という凸閉曲線としての定義があり、その微分幾何学的な性質も多く研究されている。しかし、これとは別に、卵形線の初等幾何学的な“円とその内側の1点からとの距離の比が一定な曲線”としての定義がある。これは、デカルトの卵形線<sup>1), 2)</sup>と呼ばれ、やはり凸閉曲線としての卵形線の一種である。この初等的作図による定義から、幾何学的考察により、卵形線を種々な定義で表現できることがわかった。今回は、そのうち、卵形線の作図<sup>3)</sup>を多く示して、その表現を明かにした。これには、双極座標表示<sup>6)</sup>や極座標表示の動径と角の関係式より卵形線上の点の座標を計算しXYプロッター<sup>5)</sup>による出力を行うことにより、精度や時間の面で計算機<sup>4)</sup>の援用を行った。次に、卵形線の縮閉線の表現法をも考察し、法線の包絡線としてばかりでなく、媒介変数表示をも導き出し、計算機により作図を行った。

## 2. 卵形線の種々の表現法

(1) 卵形線の右・左離心率をパラメータとした表現

デカルトの卵形線は、双極座標を用いて、 $mr_1 \pm nr_2 = kc$  ( $k$ は定数)で表現される。<sup>6)</sup>ここで、 $c$ は焦点(極)間の距離、 $r_1, r_2$ は双極から卵形線上の点までの距離である。これにより、卵形線の長軸の長さ(補助円の直径<sup>2)</sup>)は $\frac{2kc}{m+n}$ で表わされるが、それを固定し、**左離心率**  $e_l = \frac{n}{k}$ 、**右離心率**  $e_r = \frac{m}{k}$  (楕円では、左右一致)を定義し、これをパラメータとして、形状変化を考えた。

図1は長軸80mmとし、 $k=10$ 、 $4 \leq n \leq 9$ 、 $n \leq m \leq 9$ の場合の卵形線である。なお作図に際しては180点の座標を計算し、XYプロッターに出力した。卵形線の外分枝  $mr_1 - nr_2 = kc$  については、長軸を60mmとし、同様に作図した。この図よりいわゆる卵の形は、“卵の実験”<sup>7)</sup>のニワトリの卵の写真と比較して  $(e_l; e_r) = (0.6; 0.7)$  から  $(0.7; 0.9)$  のデカルトの卵形線で近似されていることがわかる。

(2) 3つの同心円群の各交点列としての表現

卵形線の定義式  $mr_1 \pm nr_2 = kc$  が与えられたとき、 $-kr_2 + mr_3 = \pm n \left( \frac{k^2 - n^2}{m^2 - n^2} \right) c$ 、[ここで、 $\left( \frac{k^2 - n^2}{m^2 - n^2} \right) c$  は、第2、第3焦点間の距離]によって定義される第3焦点を用いた卵形線の表示式がある。<sup>2)</sup>この2つの表示式を用いて、第1、第2、第3焦点を中心とする3つの同心円群の交点としての卵形線を作図した。

図2においては、 $k, m, n$  および同心円の数  $h$ 、第1、第3焦点間の距離  $S_1S_3$  を入力し、 $c$  を計算し、次に卵形線の第1焦点を中心とし、1番短い半径  $r_1 = \frac{k-n}{m+n}c$  から、 $h+1$ 番目の  $r_1^{h+1} = \left( \frac{k-n}{m+n} \right) c + \frac{2nc}{m+n} = \frac{k+n}{m+n}c$  の半径の同心円を等間隔に  $h+1$ 個描き、同様に、第2、第3焦点を中心にして  $r_1^l$  から  $r_2^l, r_3^l$  ( $1 \leq l \leq h+1$ ) を計算した同心円を  $h+1$ 個づつ描いた。ただし、卵形線を強調するために、内分枝に関しては卵形線内の円群は描いていない。また、外分枝に関しては、卵形線外の円群は描いていない。さらに、内外分枝とも、その各3つの円の交点を通る、つまり  $k, m, n, c$  で決まる卵形線そのものも描いた。

図2  $k=14, m=13, n=10, S_1S_3=150\text{mm}, h=15$  (原図)

図3  $k=10, m=8, n=6, S_1S_3=28\text{mm}, h=12$  (原図)

\* 昭和60年5月27日受付    \*\* 広島女学院

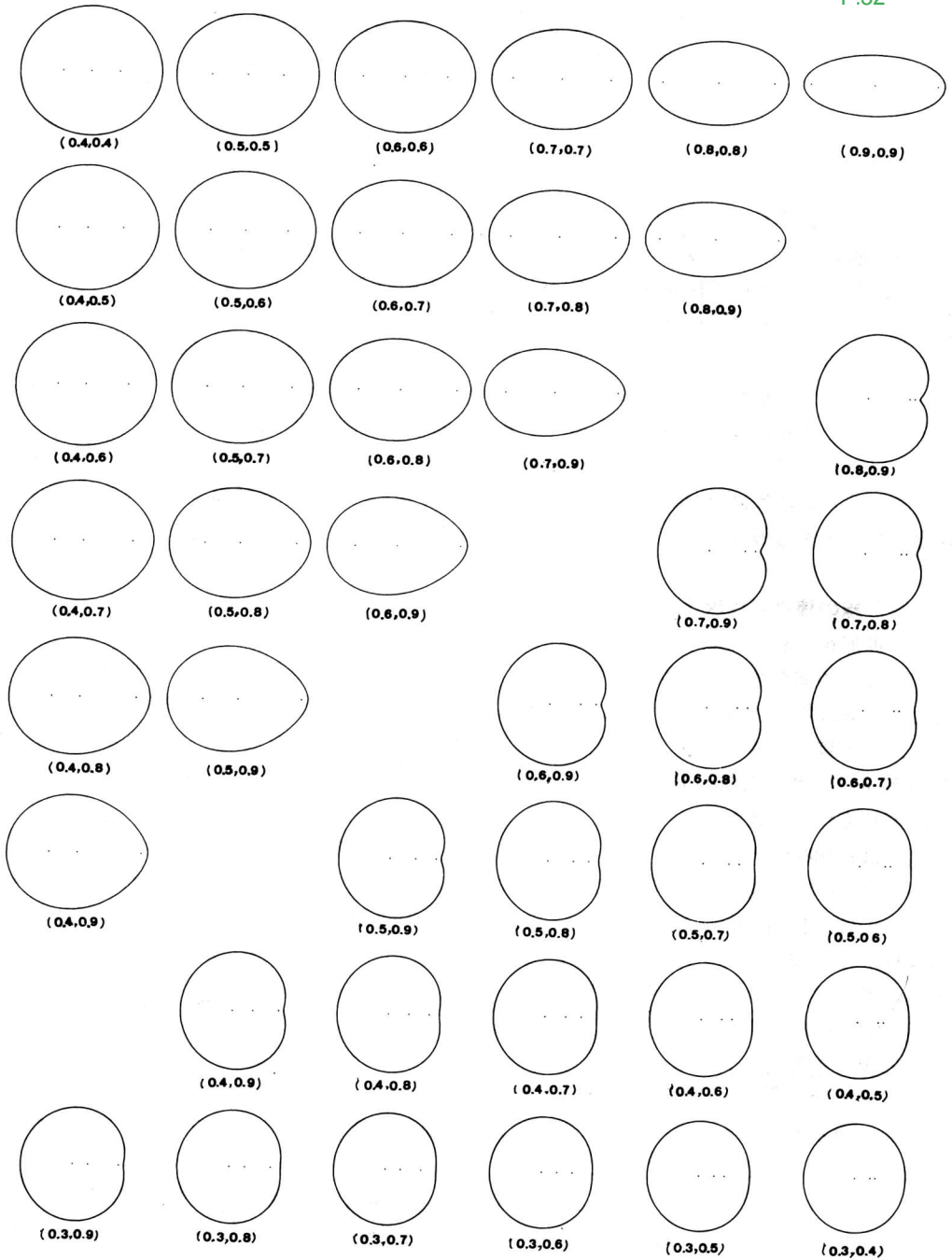


図1 卵形線の形状変化 上：内分枝，下：外分枝



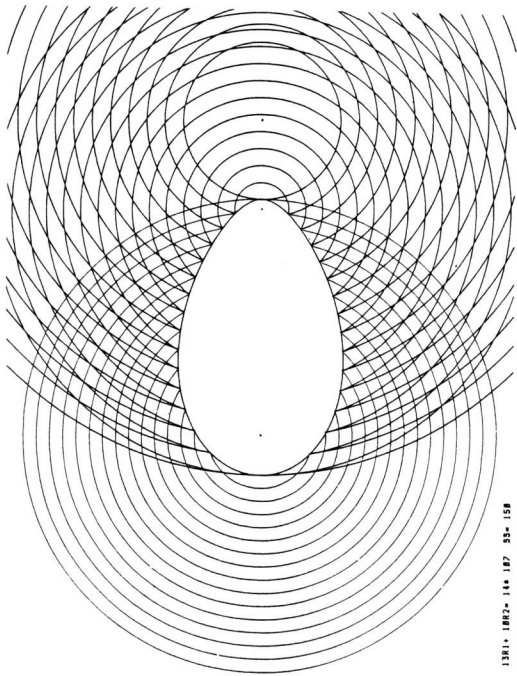


図 2

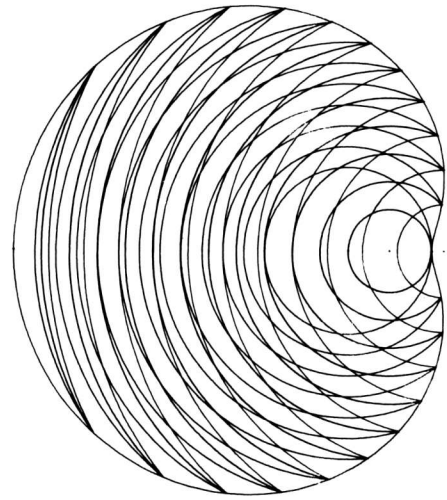


図 3

(3) 楕円と準円間の曲線束としての表現

楕円とその第1焦点を中心とする準円が与えられたとき、楕円の2つの焦点とその準円<sup>2)</sup>を共有する卵形線を描くことができる。このことにより、卵形線は、パラメータ変化により、楕円と円の間を連続的に埋めつくす曲線族ととらえることができる。

今、準円は、第1焦点  $S_1$  を中心、半径  $\frac{k}{m}c$  である。この  $\frac{k}{m}c = R_0$  を固定し、また  $c = C_0$  を固定して、間をうめる卵形線の数  $h$  とし、 $m$  を  $h+1$  から  $2(h+1)$  まで1ずつ増し、 $n$  を  $2(h+1) - m$  まで変化して、 $k$  を求め、その  $m, n, k, c$  より卵形線を描いた。

図4 (a)  $m : n = 1 : 1$  (楕円) から  $m : n = 1 : 0$  (円) の間に  $h = 3$  本の卵形線を描いている。

(b)  $h = 9$  本

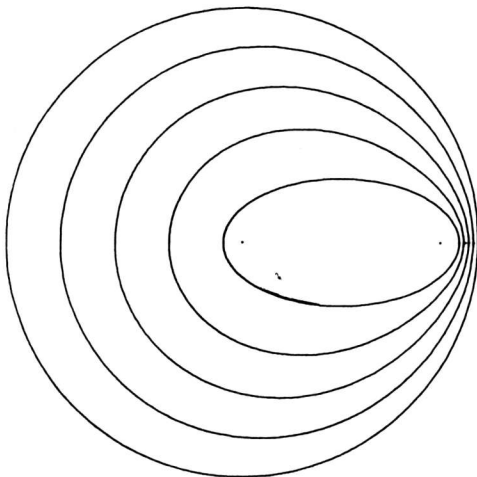


図 4 (a)

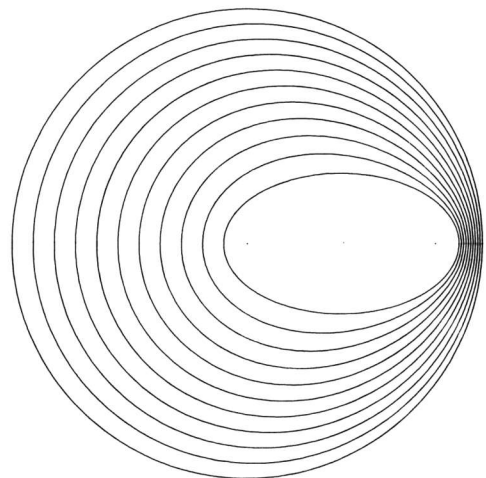


図 4 (b)

3. 卵形線の縮閉線<sup>6), 8)</sup>の表現法

(1) 卵形線の法線<sup>2), 9)</sup>の包絡線としての表現<sup>6), 8)</sup>

卵形線  $mr_1 + nr_2 = kc$  の第2, 第3等距離円<sup>9)</sup>と第2, 第3焦点を通る平行線との交点 (ここでは, 第2等距離円と第3焦点を通る平行線の2交点と第3等距離円と第2焦点を通る平行線の1交点よりそれらを結ぶ2本) を結ぶ直線は卵形線の法線となる。

このことを利用し, 法線の一部を描き, その包絡線としての縮閉線を描いた。(図5)

手順は, 第2, 第3等距離円の半径と, その中心と第1焦点との距離を入力し, 内部で, 第2, 第3焦点の位置や,  $c, m, n, k$  等の卵形線のパラメータを計算し法線と卵形線を描いた。なお, 頂点における法線によって, 平面を4つの部分にわけ, その別々の範囲内の法線のみをひくことにより, その包絡線である縮閉線を浮び上がらせた。

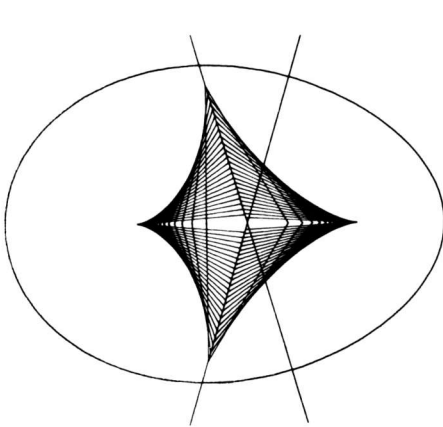


図5-1

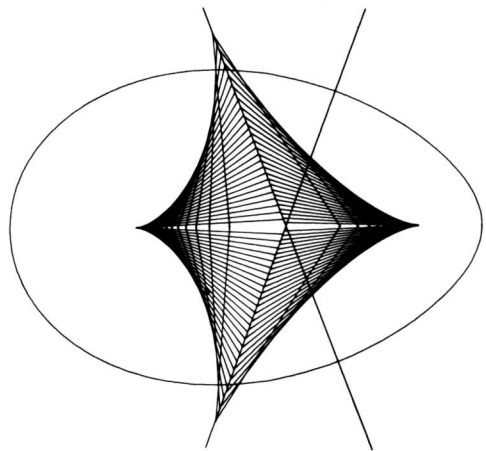


図5-2

(2) 媒介変数表示を利用した表現

上節で描いたような法線の包絡線としての縮閉線をとらえるのでは, 包絡線を見る人が極限曲線として想像しているだけである。また作図時間もかかる。そこで, 縮閉線そのものを描くことを考え, 曲率中心の軌跡としての縮閉線<sup>10)</sup>を考えた。そして, 曲率中心  $(x, y)$  を角  $\theta$  の媒介変数表示の式を導き出した。下式の  $x, y$  は, 第1焦点を原点とし, 第1, 第2焦点を結ぶ直線を  $x$  軸とする  $xy$  座標で, 媒介変数  $\theta$  は, 卵形線上の点  $P$  を, 第1焦点を極とし, 第1, 第2焦点を結ぶ直線を始線とする極座標で表わしたときの角である。

$$x = \frac{c \cdot n (k^2 + m^2 - 3k m \cos \theta + k m \cos^3 \theta) (k m - n^2 \cos \theta - n \sqrt{k^2 + m^2 - 2k m \cos \theta - n^2 \sin^2 \theta} + n \{(k^2 + m^2) \cos \theta \cos \theta - n^2 \sin^2 \theta\})}{(m^2 - n^2) [(k^2 + m^2 - 2k m \cos \theta) \sqrt{k^2 + m^2 - 2k m \cos \theta - n^2 \sin^2 \theta} + n \{(k^2 + m^2) \cos \theta \cos \theta - n^2 \sin^2 \theta\} - k m \cos^2 \theta - k m]}$$

$$y = \frac{-c \cdot n k m \sin^3 \theta (k m - n^2 \cos \theta - n \sqrt{k^2 + m^2 - 2k m \cos \theta - n^2 \sin^2 \theta})}{(m^2 - n^2) [(k^2 + m^2 - 2k m \cos \theta) \sqrt{k^2 + m^2 - 2k m \cos \theta - n^2 \sin^2 \theta} + n \{(k^2 + m^2) \cos \theta \cos \theta - n^2 \sin^2 \theta\} - k m \cos^2 \theta - k m]}$$

この式は複雑であるが縮閉線そのものを表すことを示すため, この式で描いた図を上節の包絡線の位置に重さねた図が図6である。図6より上式は, 卵形線の縮閉線の媒介変数表示であることが確められよう。最後に, 図7では, 上式に離心率  $(\frac{m}{k}, \frac{n}{k})$  の異なる値を入力し, 卵形線とその縮閉線を描いた。

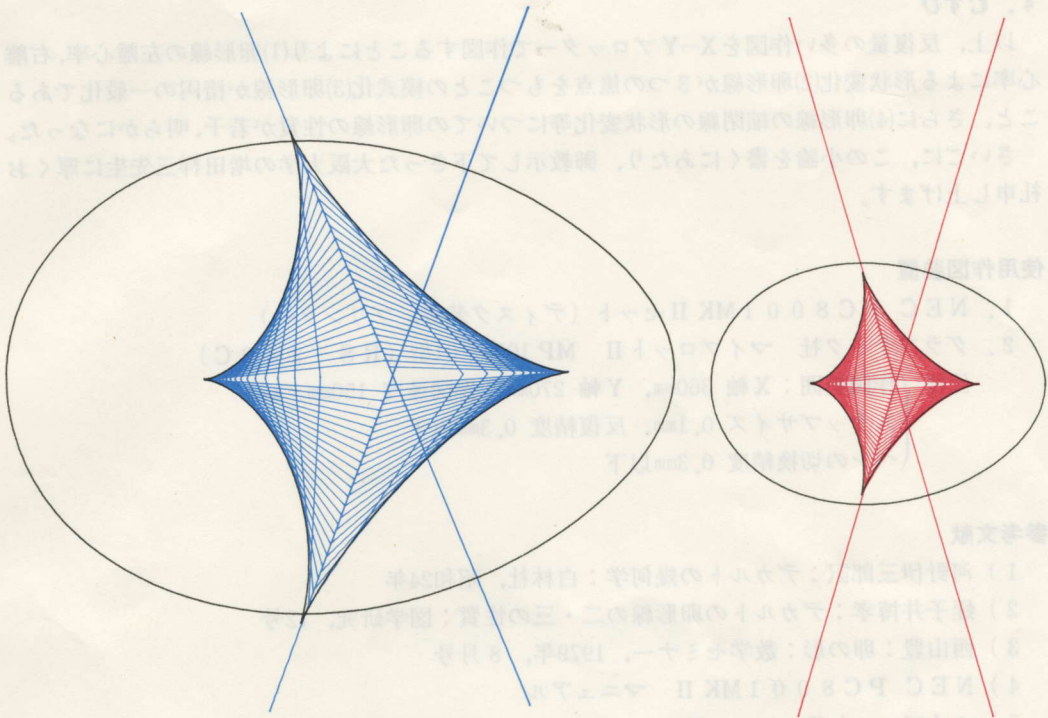


図 6 - 1 (0.6, 0.85) ・ 図 6 - 2 (0.6, 0.8)

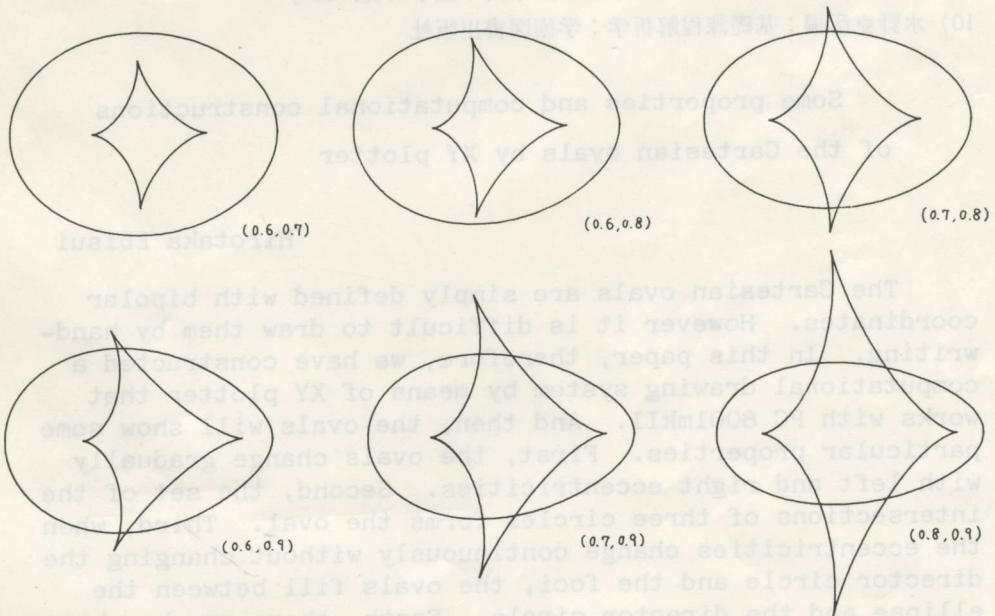


図 7 縮閉線のいろいろ

#### 4. むすび

以上、反復量の多い作図をX-Yプロッターで作図することにより(1)卵形線の左離心率, 右離心率による形状変化(2)卵形線が3つの焦点をもつことの模式化(3)卵形線が楕円の一般化であること, さらに(4)卵形線の縮閉線の形状変化等についての卵形線の性質が若干, 明らかになった。

さいごに, この小論を書くにあたり, 御教示して下さった大阪大学の増田祥三先生に厚くお礼申し上げます。

#### 使用作図装置

1. NEC PC 8001MK IIセット (ディスク装置, プリンター)
  2. グラフテック社 マイプロットII MP 1000-01型 (RS-232C)
- 仕様 (作図範囲: X軸 360mm, Y軸 270mm, 作図速度 150mm/sec  
 ステップサイズ 0.1mm, 反復精度 0.3mm以下  
 ペンの切換精度 0.3mm以下)

#### 参考文献

- 1) 河野伊三郎訳: デカルトの幾何学: 白林社, 昭和24年
- 2) 蛭子井博孝: デカルトの卵形線の二・三の性質: 図学研究, 12号
- 3) 西山豊: 卵の形: 数学セミナー, 1979年, 8月号
- 4) NEC PC 8001MK II マニュアル
- 5) マイプロットII マニュアル
- 6) ロックウッド著: 松井政太郎訳: カーブ: みすず書房, 1964
- 7) 伏見康治・伏見満枝著: 卵の実験: 福音館書店, 1977
- 8) F. ホーエンベルク著: 増田祥三訳: 技術における構成幾何学: 日本評論社
- 9) 蛭子井博孝: デカルトの卵形線の曲率円: 図学研究, 19号
- 10) 水野克彦編: 基礎課程解析学: 学術図書出版社

### Some properties and computational constructions of the Cartesian ovals by XY plotter

Hirotaka Ebisui

The Cartesian ovals are simply defined with bipolar coordinates. However it is difficult to draw them by hand-writing. In this paper, therefore, we have constructed a computational drawing system by means of XY plotter that works with PC 8001mkII. And then, the ovals will show some particular properties. First, the ovals change gradually with left and right eccentricities. Second, the set of the intersections of three circles forms the oval. Third, when the eccentricities change continuously without changing the director circle and the foci, the ovals fill between the ellipse and the director circle. Forth, there can be shown two kinds of evolutes of the ovals. The one is drawn as an envelope of the straight lines, and the other with parametric equations. In this way, these properties of the oval can be shown for the first time by using computational drawing system.

1999 6月21日現在

野村博孝

デカルトの卵形線に関する拙論正誤表

[1] "デカルトの卵形線の二・三の性質"; 国学会誌, 国学研究, 12号, 1973年

		誤	正
P.37	上から2行目	$\Delta S_2 PB$	$\Delta S_1 PB$
P.38	" 14	$Y_2, Y_{12}$	$Y'_2, Y_{12}$
P.41	" 20	$\Gamma(S_3)$	$\Gamma(S_3)$
P.42	" 27	$S_2 C_1$	$S_2 C_2$
"	" 28	$S_1 B_2$	$S_2 B_2$
P.44	" 17	挿入	挿入
P.37	" 3	$\frac{PS_1 + PA}{PB + PS_2}$	$\frac{PS_1 + PA}{PB + PS_2}$
P.43	" 14	$= m R_{31}$	$= \pm m R_{31}$
P.45	下から4行	$\left\{ \frac{m^2 n^2}{R^2} \right\}$	$\left\{ \frac{m^2 n^2}{R^2} \right\}$
P.47	上から3行目	$n = m$	$n = m$
"	" 3	$S'_1 O'_2$	$S'_1 O'_2 = O'_2 S'_2$
P.48	" 14	$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)$
		$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)$
P.49	" *	SCHORNZER	SCHÖRNZER
		LEHRBUCH	LEHRBUCH
"	" 5	MÜNCHEN	MÜNCHEN

[2] "デカルトの卵形線の曲率"; 国学研究, 19号, 1976年9月

P.7	50521	$\frac{kc}{m-c}$	$\rightarrow$	$\frac{kc}{m-n}$
P.10	" 1	$\overline{R_1}, \overline{R_3}$		$\overline{R_1}, \overline{R'_3}$
P.10	7053	$\frac{\sqrt{k^2 - k^2 m^2 c}}{m^2 - n}$		$\frac{\sqrt{k^2 - k^2 m^2 c}}{m^2 - n^2}$
P.11	行外	51年3月		51年9月

[3] "デカルトの卵形線の性質に関する考察(計算機援用作画による比較検討)"

P.9	下から13	$\frac{k^2 - n^2 c}{m^2 - n^2}$	$\frac{k^2 - m^2 c}{m^2 - n^2}$	国学研究 37号 1985年9月
	下から12	$\frac{k - n^2 c}{m^2 - n^2}$	$\frac{k^2 - m^2 c}{m^2 - n^2}$	

[4] "デカルトの卵形線系の性質に因る考察 - 3の幾何学的標図 -"  
 国学研究所, 49号, 1990年3月

P.11 右14	$> O_0 O_3 / 2$	$> O_0 S_3 / 2$
P.14 左22	卵形線を再=	卵形線を更に

[5] "Minor Axis of the Oval of Descartes and Ovaloid"; Proceeding of 6th  
 ICECG DG, Tokyo, Japan Aug. 1994年

別表1

[6] "デカルトの卵形線系の短軸および卵形面", 国学研究所, 68号, 1995年3月  
 P.5 右下51 図60e 図60l

P.6 右4	(a, c, d)	( $\alpha, \gamma, \delta$ )
右10	平面a	平面 $\alpha$
右12	平面a	平面 $\alpha$
P.7 右16	値はa	値は $\alpha$

[7] "デカルト - 卵形線 - の短軸に関する一定理" 国学研究所 70号 1995年12月

P.13 右19	$\angle \alpha = \angle \beta$	$\angle \alpha = \angle \beta$
P.13 右下53	$F_1 O_2 \cdot O_2 F_2$	$F_1 O_{12} \cdot O_{12} F_2$
P.14 右2	( $\therefore$ ) (A)	( $\therefore$ ) (A)

[11] "Basic CADによる卵形線 - 幾何学" 1997年大会 proceedings 論文集 財団法人

P.21 左下55 step 27 step 6

[12] AN EXTENSION TO FOURTH ORDER SURFACES BY THE  
 OVAL WITH 3 INVERSION POINTS. Proceedings of 6th  
 ICECG DG Austin, Texas USA Aug. 1994

P.431 右19  $m r_1 \pm h r_2 = h c$   $k r_1 - n r_3 = m c'$

## Erata or Correction

① p. 1 Right column

P depicts <sup>39</sup>on oval → P depicts an oval

② p. 2 Left column

(however,  $S_1 S_2 = c \dots$  → (where,  $S_1 S_2 = c \dots$

③ p. 3 Left column

0[nc/(m+n), 0] → 0(nc/(m+n), 0)

④ p. 4 Left column

1. We fixed four arbit.. → We fix four arbit..

4. We fixed point U → We fix point U

6. We determined a plane → We determine a plane

⑤ p. 4 Right column

O<sub>1</sub> as the origin → S<sub>1</sub> as the origin

⑥ p. 4 Right column

.....  $\angle \underline{PS}_1 S_2$  → .....  $\angle \underline{PS}_3 S_2$   
 $= \theta$  →  $= \theta$

⑦ p. 5 Left column ↓

$(mn - k^2 \cos \theta) c$  →  $2(mn - k^2 \cos \theta) c$   
 $r_3^2 + \frac{\quad}{r_3} \rightarrow r_3^2 + \frac{\quad}{r_3}$   
 $m^2 - n^2$  →  $m^2 - n^2$

## デカルトの卵形線の性質に関する考察\* —その幾何学的構図—

蛭子井 博 孝\*\*

### 1. まえがき

デカルトの卵形線は、楕円を一般化した4次曲線であり、その初等幾何学的図形は、楕円の幾何学的図形と関連が深い。今回は、そうした卵形線の初等幾何学的構成図(卵形線を定義するための図)などを調べているうちに、初等幾何の定理となっている構図を含む卵形線の定義の仕方を見い出した。ここでは、主にそれを報告する。なお、予備知識として卵形線の定義の仕方について、前論<sup>1)</sup>と重複する部分もあるが、種々な角度から眺めて述べてみたい。また、その中で、円錐面と円錐面の相貫図の透視図<sup>2)</sup>については、相貫空間曲線のパラメトリックな関係式を導出した。さらに、また卵形線の性質としての法線の一作図法も述べる。

卵形にはならないが、同様の性質を持つ。

(2) 二定点を  $(0, 0)$   $(c, 0)$  とおいて、卵形線上の点を  $(x, y)$  とする直交座標によれば、(1)式より

$$m\sqrt{x^2+y^2} \pm n\sqrt{(x-c)^2+y^2} = kc$$

という関係式で表現される。 $\sqrt{\quad}$ をはずすと

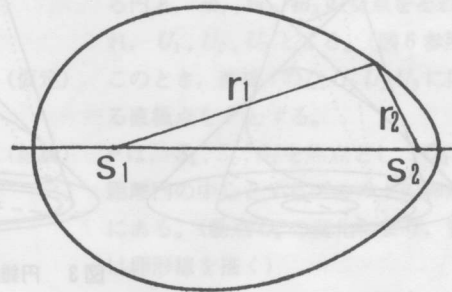


図1 卵形線の双極座標による定義

### 2. 卵形線の種々な定義の仕方

デカルトの卵形線については、次のような種々の異なる定義の仕方が考えられる。

- (1) 双極座標を用いた定義式<sup>3)</sup>(図1)
- (2) 直交座標による定義
- (3) 図形的関係による定義(図2)
- (4) 空間的構造による定義<sup>4)</sup>(図3)
- (5) 作図手法による定義<sup>5)</sup>(デカルトによる定義)

(図4)

(1)は、二定点(双極)からの加重距離の和(差)が一定な点の軌跡は、卵形線であると表現される。つまり、双極を  $S_1, S_2$  としてその双極間の距離を  $c$  とし双極から曲線上の点  $P$  までの距離を  $r_1, r_2$  とすれば

$$mr_1 \pm nr_2 = kc \tag{1}$$

なお、 $m, n, k$ は任意定数で、差の方は、いわゆる

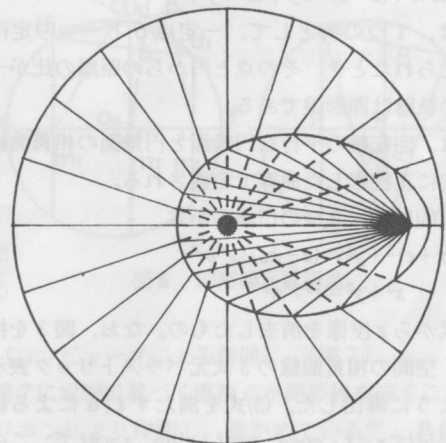


図2 1点と円による卵形線

\*平成元年10月3日受付  
\*\*岩国市元町4-12-10



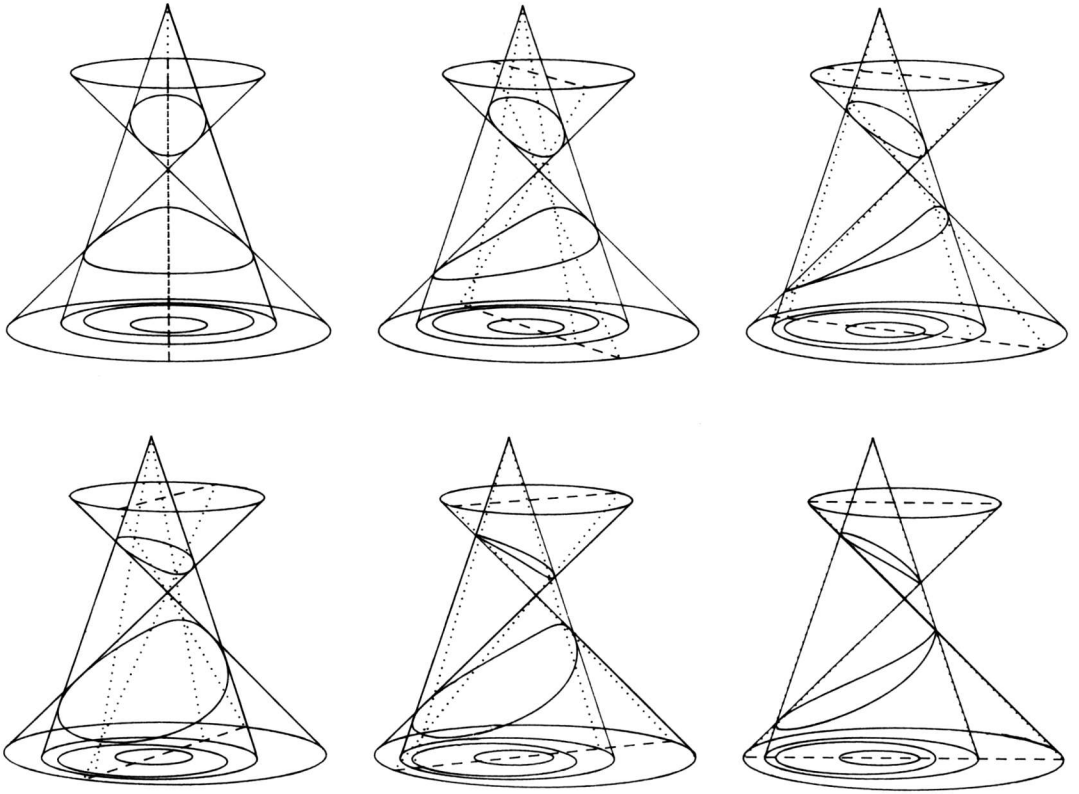


図3 円錐面の交線としての卵形線

$$[m^2(x^2+y^2) + n^2\{(x-c)^2+y^2\} - k^2c^2]^2 = 4m^2n^2\{(x-c)^2+y^2\}(x^2+y^2)$$

(3)は、1つの例として、一定点  $S$  と一つの定円  $O$  が与えられたとき、その点と円からの距離の比が一定な点の軌跡は卵形線である。

(4)は、回転軸の平行な円錐面と円錐面の相貫曲線を軸方向に正投影した曲線で定義される。

代数的には、2つの円錐面が式

$$(x+c)^2+y^2=(z-kc)^2/m^2 \tag{2}$$

$$x^2+y^2=z^2/n^2 \tag{3}$$

の2式から  $z$  座標を消去したもの。なお、図3を描くため、空間の相貫曲線の3次元パラメトリック表示を次のように導出した。(3)式を満たす  $t, \alpha$  による媒介変数表示は  $x=t \cdot \cos \alpha, y=t \cdot \sin \alpha, z=nt$  で、この式を、(2)(3)式より  $y$  を消去した式に代入して、 $\alpha$  と  $t$  の関係式を求め、その式から  $\alpha$  を消去すると、付記のように  $t$  の媒介変数表示を得る。

図3は、円錐面とその相貫図形のいわゆるフレーム

図形で、透視図法で、 $30^\circ$ ずつ回転したものをやや上方から眺め、投影面は軸に平行な面としている。また円錐の底面には、空間曲線の軸方向からの正投影した卵形線の図も描いている。この図では、内側の2つの長円である。

(5) 定直線  $l_1$  上に任意に3点  $F, A, G$  をとる。 $A$  を通り  $l_2$  上に  $AG=AR$  となる点  $R$  をとる。今、直線  $l_1$  上に動点  $P$  をとり、 $l_2$  上に動点  $Q$  をとる。ここで、 $AP:AQ$  は任意の定比 ( $k:n$ ) であり、 $P$  を  $P_1, P_2, P_3, \dots$  と動かす、それに対応して、 $Q$  を  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  と動かす。つまり  $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2 \parallel P_3Q_3, \dots$  ととる。このとき、2円  $\{$ 中心： $F$ , 半径： $FP_i (=FA+AP_i)\}$ ,  $\{$ 中心： $G$ , 半径： $RQ_i (=AR-AQ_i)\}$  の交点列は、 $P_i$  が動くとき卵形線を描く。これは、“デカルトの幾何学<sup>5)</sup>”の中にあるデカルトによる定義であり、(1)の双極座標の定義式で表せることを示す。

$$\text{半径 } FP=FA+AP=r_3$$

$$RQ=AR-AQ=r_1 \text{ とおく}$$

すると  $AP=r_3-FA$   $AQ=AR-r_1$

ここで  $\frac{AP}{AQ} = \frac{r_3-FA}{AR-r_1} = \frac{k}{n}$   $AR=AG$  より

これを变形して  $nr_3+kr_1=nFA+kAG$

これは、明らかに2定点  $FG$  からの距離  $r_3$ ,  $r_1$  の加重距離の和は一定となっている。

以上に述べたようにデカルトの卵形線の定義の仕方は種々あるが、それらは、それぞれ、卵形線の1つの性質を表わすものとして特長がある。

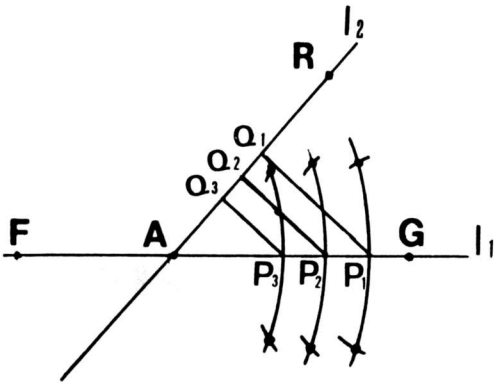


図4 デカルトによる卵形線の作図

3. 卵形線の幾何学的構図

前節に見るように、卵形線の定義の仕方はいろいろであるが、その中でも、定義の仕方として、その幾何学的構図が、初等幾何学の定理を含むものを見出した。これは、卵形線の性質を調べる中で、補助線をいろいろ引くうちに見つかったものである。それを述べる前に初等幾何のシムソン線、直極点について、予備知識として述べる。(図5)

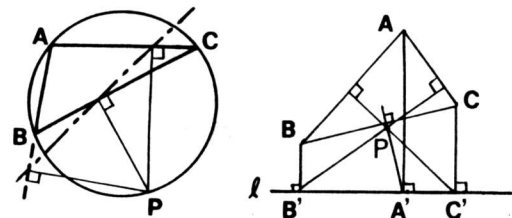


図5 シムソン線と直極点

〔シムソン線〕  $\triangle ABC$  の外接円の一点  $P$  から各辺または、その延長線上に下した垂線の足は一直線上

にある。この直線をシムソン線という。

〔直極点〕 直線  $l$  と  $\triangle ABC$  が与えられたとき、三角形の頂点  $A, B, C$  から、直線  $l$  に下した垂線の足を  $A', B', C'$  とする。その  $A', B', C'$  からそれぞれ対応する各辺、または、その延長線上に下した垂線は1点  $P$  で交わる。この点を  $l$  の  $\triangle ABC$  に関する直極点という。(図5)

卵形線の定義の幾何学的構図としての一定理

〔定理〕

- (条件) 1. 直線  $l$  上に任意の異なる4定点  $O_0, S_1, S_2, S_3$  をとる。
- 2.  $S_1, S_2, S_3$  から直線  $l$  に垂線  $m_1, m_2, m_3$  を立てる。
- 3. 直線  $l$  上の動点  $O_a (O_0 O_a > O_0 O_3/2)$  をとり、 $O_a$  を中心、 $O_0 O_a$  を半径とする円と、 $m_1, m_2, m_3$  の交点をそれぞれ、 $U_1, U_2, U_3$  とする。(図6参照)

(仮定) このとき、直線  $l$  の  $\triangle U_1 U_2 U_3$  に関する直極点を  $P$  とする。

(結論)  $P$  は、 $S_1, S_2, S_3$  を焦点とし、 $O_0$  を等距離円の中心とするデカルトの卵形線上にある。(動点  $O_a$  の変化により、動点  $P$  は卵形線を描く)

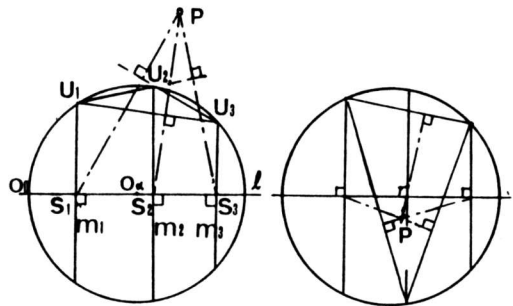


図6 卵形線と直極点

(コンピュータによる作図) (図7)

図7に定理に基づく直極点が卵形線を描くことを、パソコンにより作図し、確かめている<sup>6)</sup>。具体的には、図7は、動円  $O_a$  を3つと6個の三角形を描き、3焦点より垂線を引き6個の直極点を求めた。その3個づつが、卵形線の円分枝と外分枝上にあり、卵形線を形づくるものとなっていることを示している。

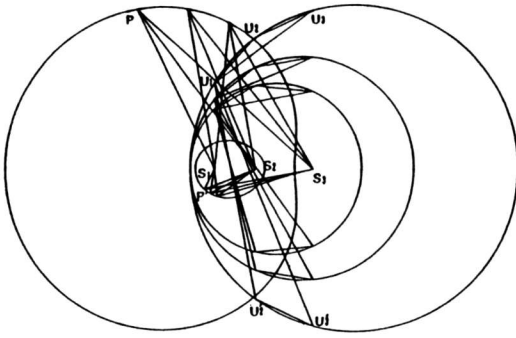


図7 卵形線の幾何学的構図

次に、証明のため2つの補題を考える。

〔補題1〕

$O_0$  から  $\triangle U_1 U_2 U_3$  の各辺またはその延長線上に下した垂線の足を  $R_1, R_2, R_3$  とすると、 $O_0 R_1, O_0 R_2, O_0 R_3$  は、円  $O_\alpha$  の位置に関係なく一定で、3つの等距離円<sup>8)</sup>の半径に等しくなる。

〔証明〕  $O_0 R_3^2 = O_0 S_1 \cdot O_0 S_2$  を証明すれば、小論<sup>8)</sup>より  $O_0 R_3$  は、等距離円の半径で一定といえる。

図8において、円  $O_\alpha$  の直径を  $O_0 O_\beta$  とする。すると  $\triangle O_0 U_1 O_\beta$  は直角三角形。また  $m_1 \perp l$  より

$$\angle O_0 U_1 S_1 = \angle U_1 O_\beta O_0 \quad (1)$$

また、円周角の定理より

$$\angle U_1 U_2 O_0 = \angle U_1 O_\beta O_0 \quad (2)$$

四角形  $U_1 R_3 O_0 S_1, U_2 R_3 O_0 S_2$  はともに、それぞれ同一円周上にある。ゆえに

$$\begin{aligned} \angle O_0 R_3 S_1 &= \angle O_0 U_1 S_1 \\ \angle U_1 U_2 O_0 &= \angle R_3 U_2 O_0 = \angle R_3 S_2 O_0 \end{aligned} \quad (3)$$

(1), (2), (3)より

$$\angle O_0 R_3 S_1 = \angle O_0 U_1 S_1 = \angle U_1 U_2 O_0 = \angle R_3 S_2 O_0$$

$$\therefore \angle O_0 R_3 S_1 = \angle R_3 S_2 O_0$$

$$\therefore \triangle O_0 S_1 R_3 \sim \triangle O_0 R_3 S_2$$

$$\therefore O_0 R_3^2 = O_0 S_1 \cdot O_0 S_2 \quad O_0 R_2, O_0 R_1 \text{ についても同様にして}$$

$$O_0 R_2^2 = O_0 S_1 \cdot O_0 S_3$$

$$O_0 R_1^2 = O_0 S_2 \cdot O_0 S_3$$

ゆえに  $O_0 R_1, O_0 R_2, O_0 R_3$  は、円  $O_\alpha$  の位置に関係なく、 $O_0, S_1, S_2, S_3$  によって定まる3つの等距離円の半径に等しく一定となる。

〔補題2〕

図9の  $\triangle U_1 U_2 U_3$  の外接円周上の一点  $O_0$  を通る直線  $l$  の  $\triangle U_1 U_2 U_3$  に関する直極点  $P$  は、 $O_0$  の  $\triangle U_1 U_2$

$U_3$  に関するシムソン線  $R_1 R_2 R_3$  上にある。証明は、文献7), p. 212.

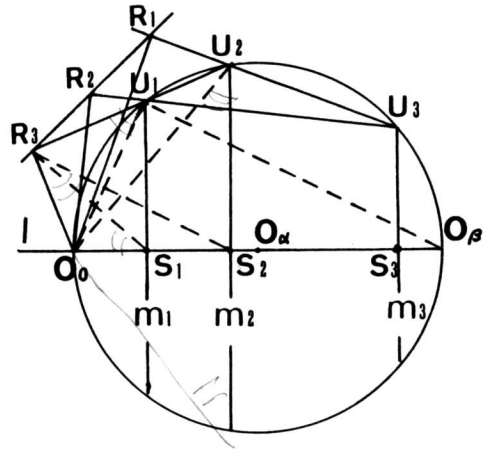


図8 補題1

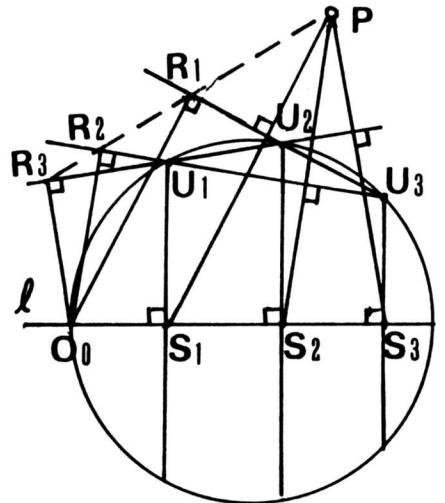


図9 補題2

〔本題の証明〕

補題1より、 $O_\alpha$  を変化させたとき、 $R_1, R_2$  は等距離円  $k_1, k_2$  を動く。また、補題2より、図10のように、

$$O_0 R_2 \parallel S_2 P \quad (1) \quad O_0 R_1 \parallel S_1 P \quad (2)$$

(パップスの定理より(1)(2)のとき  $S_1 R_2 \parallel R_1 S_2$  , )  
(これより、直線  $R_1 R_2$  は卵形線の法線となる。)

さて、 $O_0, S_1, S_2, S_3$  を与えたとき、次のようにとる。

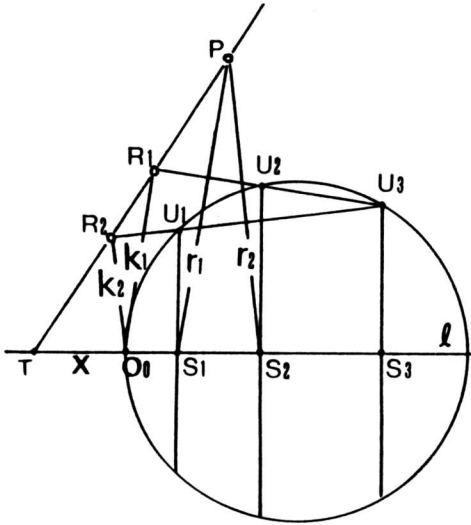


図10 本題

$$S_1 S_2 = c$$

$$O_0 S_1 = \frac{n^2 c}{m^2 - n^2} = s_1, O_0 S_2 = \frac{m^2 c}{m^2 - n^2} = s_2$$

$$O_0 S_3 = \frac{k^2 c}{m^2 - n^2} = s_3 \dots \dots \dots [A]$$

ここで、 $S_1, S_2$ を双極とする双極座標  $r_1, r_2$  を考える。 $S_1 P = r_1, S_2 P = r_2$  とおく。また  $O_0 R_1 = k_1, O_0 R_2 = k_2$  とおく

$R_2 P$  と  $l$  との交点を  $T$  とする。 $O_0 T = x$  とおく

(1)より  $k_2 : r_2 = x : x + s_2$  (1')

(2)より  $k_1 : r_1 = x : x + s_1$  (2')

(1)', (2)'より  $x$  を消去すると

$$k_2 s_2 r_1 - k_1 s_1 r_2 = k_1 k_2 s_2 - k_1 k_2 s_1 \quad (3)$$

ここで補題1より  $O_0 R_1^2 = O_0 S_2 \cdot O_0 S_3$

$$\therefore k_1^2 = s_2 s_3 \quad (4) \text{同様に} \quad k_2^2 = s_1 s_3 \quad (5)$$

(3), (4), (5)より  $k_1, k_2$  を消去して

$$\sqrt{s_2} r_1 - \sqrt{s_1} r_2 = \sqrt{s_3} (s_2 - s_1)$$

ここで  $s_1, s_2, s_3$  を [A] でおきかえると

$$\sqrt{\frac{m^2 c}{m^2 - n^2}} r_1 - \sqrt{\frac{n^2 c}{m^2 - n^2}} r_2 = \sqrt{\frac{k^2 c}{m^2 - n^2}} \left( \frac{m^2 c}{m^2 - n^2} - \frac{n^2 c}{m^2 - n^2} \right)$$

$$\therefore mr_1 - nr_2 = kc$$

これは、卵形線の双極座標の定義式に一致し、 $P$  は卵形線上にある。なお、図7において、点  $P$  は、

交点として多数あり、 $P$  群が、 $mr_1 - nr_2 = kc$  で、 $P'$  群は、 $mr_1 + nr_2 = kc$  を与える。証明は同様。

4. 卵形線の法線<sup>8), 9)</sup>の一作画法

一つの円と二定点より卵形線を作図する方法は、以前<sup>1)</sup>に述べた。その図において、卵形線の法線を作図する方法を見出したので、ここに述べる。

[定理]

図11におけるように円  $O_{12}$  をかき、定点  $S_1, S_2$  をとる。次に動平行線  $l_1, l_2$  をとり、円との交点  $M_1, M_2$  を求める。この線分  $M_1 M_2$  上に  $O_{12} M_2 \parallel S_1 P$  となる点  $P$  を求めると、これは卵形線上の点である。さらに、 $S_1 M_2$  と  $S_2 M_1$  の交点を  $T_0$  とすると  $T_0 P$  は  $P$  における卵形線の法線である。

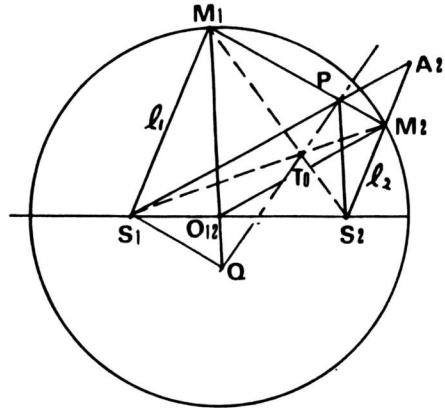


図11 卵形線の法線

[証明]

ここで、 $\angle T_0 P S_1 = \angle P S_2 M_2$  を証明すれば  $T_0 P$  が  $S_1 P$  と  $l_2$  との交点を  $A_2$  としたときの  $\triangle A_2 P S_2$  の外接円の接線より、 $T_0 P$  は小論<sup>1)</sup>によって  $T_0 P$  は法線である。

図11において直線  $T_0 P$  と直線  $M_1 O_{12}$  との交点を  $Q$  とする。すると  $\triangle M_1 S_1 Q$  と  $\triangle S_2 M_2 P$  とは  $T_0$  を通る三直線上にあるので、デザルグの定理が用いられ

$$M_1 S_1 \parallel M_2 S_2, M_1 Q \parallel S_2 P \text{ より } S_1 Q \parallel M_2 P$$

つまり  $S_1 Q \parallel P M_1$  ゆえに

$$\angle P S_1 Q = \angle A_2 P M_2 = \angle P M_2 O_{12} = \angle O_{12} M_1 P$$

ゆえに四角形  $S_1 Q P M_1$  において  $\angle P S_1 Q = \angle Q M_1 P$  によって四角形  $S_1 Q P M_1$  は同一円周上にある。ゆえに

$\angle S_1 M_1 Q = \angle S_1 P Q$  ところで平行線の関係から明らかに  $\angle S_1 M_1 Q = \angle P S_2 M_2 \therefore \angle S_1 P T_0 = \angle P S_2 M_2$   
ゆえに  $T_0 P$  は法線である。

5. むすび

卵形線の定義の仕方は数多くあり、それは、一連の卵形線の性質を形作っている。今回は、卵形線の空間曲線のパラメトリック表示を見出し、コンピュータグラフィックスの援用で、円錐の相貫曲線と卵形線の関係がより明らかになった。

また、初等幾何学の直極点の定理などが卵形線の作図に結びつくことを示し、卵形線のもつ幾何学的構図の深さを知ることができた。さらに、卵形線の法線の作図がコンパスと定規だけで、簡単に見い出せることを示した。このようにデカルトの卵形線は、初等幾何学的、射影幾何学的に数多くの構造的性質をもつものであり、その性質は円錐曲線のもつ性質の拡張でありまた円錐曲線のもつ性質は非常に多く、それらを卵形線に拡張することが、これからの研究課題である。さらにまた、卵形線の微分幾何学的性質や、代数幾何学的性質の研究をすれば、おもしろい性質が見つかるのではないと思われる。

また、卵形線を更に高次元代数曲線に拡張する方法があり、それらの性質もこれからの研究課題である。

参考文献

- 1) 蛭子井博孝, “デカルトの卵形線の二・三の性質”, 図学研究, 12 (1973), 35 - 49.
- 2) 日本図学会編, “図形科学ハンドブック”, 森北出版 (1980), 401 - 408.
- 3) ロックウッド, 松井政太郎訳 “カーブ”, みすず書房 (1964), 200 - 204.
- 4) Ernst Schörner, “RAUMBILDBLEHRBUCH DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE”, R. OLDENBOÛRG VERLAG MÜNCHEN (1960), 126 - 127.
- 5) デカルト, 河野伊三郎訳, “デカルトの幾何学”, 白水社 (1949).
- 6) NEC, PC98VM2, PC98RL  
グラフィック社 MILOT-MP3400 マニュアル.
- 7) 清宮俊雄, “初等幾何学”, 裳華房 (1972), 212.

8) 蛭子井博孝, “デカルトの卵形線の曲率円”, 図学研究, 19 (1976), 7 - 11.

9) 蛭子井博孝, “デカルトの卵形線の性質に関する考察”, 図学研究, 37 (1980), 9 - 14.

付記 二円錐面の相貫曲線のパラメトリック表示

$$(x+c)^2 + y^2 = (z-kc)^2 / m^2$$

$$x^2 + y^2 = z^2 / n^2$$

この2式の交線は

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2c} \left\{ \frac{(nt-kc)^2}{m^2} - t^2 - c^2 \right\} \\ y = \pm \sqrt{t^2 - \frac{1}{4c^2} \left\{ \frac{(nt-kc)^2}{m^2} - t^2 - c^2 \right\}^2} \\ z = nt \end{cases}$$

Some Properties and a Geometrical Composition on the Ovals of Descartes

Hiroataka EBISUI

In this paper we present three matters. First we show that the cross sections of two circular cones, which are the spatial curve of the ovals of Descartes, can be defined by three dimensional parametric formula. These formula were derived so that we can easily obtain the perspective drawings of the spatial curve with computer graphics. Secondly, we present that the ovals can be defined by orthopoles that satisfy some conditions. This definition indicates the geometrical composition of the ovals, and we present its proof. Finally, we describe the method to draw the normal line of the ovals and also give its proof. Thus additional new properties on the ovals are shown.

# デカルトの卵形線の短軸および卵形面\*

蛭子井 博 孝\*\*

## 1. 序論

### 1. 1 はじめに

卵形は、かなり以前から、様々な人が考察の対象にしていたのであろう。にわたりの卵は、確かに興味ある形をしている。そのような卵形の定式化<sup>1),2)</sup>や図形のユークリッド幾何的性質や微分幾何的性質<sup>3)</sup>(凸閉曲線の頂点の数など)は、その図式化や定式化の過程をたどれば、おもしろい考察材料となろう。

特に、デカルトの卵形線の定義は、図式的に様々な定義される。ここでは、それに卵形線の性質として、短軸という概念を付加できたので報告する。さらに、卵形線の平面から空間への拡張として、卵形面を卵形線の一般化として、定義し得たので報告する。これは、対称断面としての卵形線の考察から導出できる。

なお、この小論は、1994年6th ICECGDGの原稿を多少手直したものである。特に、序論の部分を手直しし、卵形線の定義と短軸の定義との間の必然性を明らかにした。

### 1. 2 卵形線の定義

デカルトの卵形線は、「定円とその内側にある定点と、からの距離が等しいときの楕円の接線作図法(図

1)」を、図2のように発展させた楕円の拡張である。この定義の方法とその他の合せて3つの定義の方法を以下に述べる。その定義1と定義3は、小論<sup>4)</sup>に詳細が述べてある。

#### 1. 2. 1 [定義1]

デカルトの卵形線は図3のように「一定円とその円内の定点からの距離の比が一定( $n/m$ )である曲線」と定義される。さて、この定義では、図3のように、定円の内外に条件を満たす曲線ができるが、それらをそれぞれ、卵形線の内分枝、外分枝と呼ぶ。本論では内分枝のみについて考える。ここで、一定点、定円を固定して、比だけを $0 < \frac{n}{m} < 1$ の条件で変化させると卵形線の大きさは変化し、図4のように $\frac{n}{m}=0$ となる円と $\frac{n}{m}=1$ となる楕円の間を埋めつくす曲線群となる<sup>5)</sup>。

しかし、これでは、定義にそった卵形線の長軸の長さが変化し、その曲線群全体に短軸を明確には、定義しにくい。なお、この定義は、ユークリッド幾何の範囲で、先達の人ですでに知っている可能性もある。

#### 1. 2. 2 [定義2]

次に、デカルトの卵形線は、双極座標<sup>2)</sup>を用いて

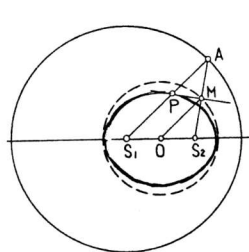


図1 楕円の接線

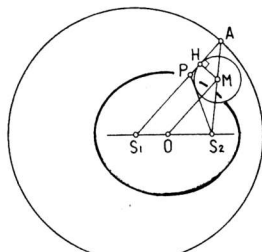


図2 図1の卵形線への拡張

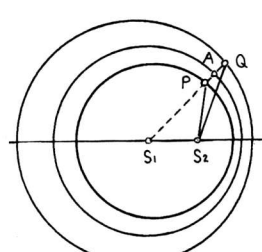


図3 卵形線 定義1

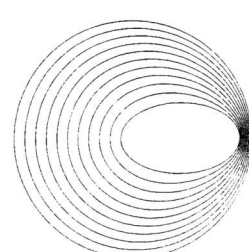


図4 円, 楕円間の卵形線群

\*平成7年1月9日受付

\*\*福山暁の星女子高校

$$mr_1 + mr_2 = kc \quad (1)$$

と定義される。図5のように、双極間の距離  $S_1S_2=c$  および2つの動径  $S_1P=r_1$ ,  $S_2P=r_2$  が(1)式を満たして変化するとき、Pは卵形線を描く。ここで  $m, n, k$  は  $k > m > n > 0$  を満たす任意定数とする。なお、外分枝については  $mr_1 - mr_2 = kc$  で表される。

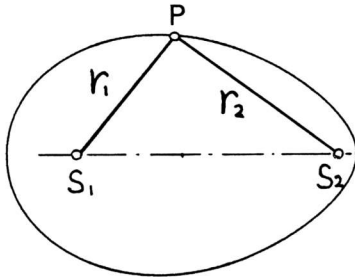


図5 卵形線 定義2

1. 2. 3 [定義3]

卵形線は、図6のように、一定円とその直径(2a)上に二定点(2極 or 2焦点と呼ぶ)を定めると、定まる。その作図方法を述べる。『円O(中心;半径=O;a)とその直径上の二定点  $S_1, S_2$  が与えられるとき、その二定点を通る平行線  $l_1, l_2$  を任意にひく。その2直線と定円の交点を  $N, N', M, M'$  とする。次に、 $S_1$  を通り直線  $OM$  と平行な直線を  $s$  とする。この  $s$  と直線  $MN$  の交点を  $P$  とする。(ここで、パップスの定理より  $ON/S_2P$ )、動直線  $l_1$  が、この関係を保ちつつ、1回転するとき、点  $P$  は、デカルトの卵形線を描く。』ここで、定円Oの半径  $a$  は、 $l_1$  が長軸と重なったとき、 $r_1, r_2$  は、連立方程式

$$\begin{cases} mr_1 + nr_2 = kc \\ r_1 - r_2 = c \end{cases}$$

を満たし、解は  $r_1 = \frac{k+n}{m+n}c$  となり、故に  $S_1S_2=c$ ,

$OS_1 : OS_2 = n : m$  より

$$\text{半径 } a = r_1 - OS_1 = \left(\frac{k+n}{m+n}\right)c - \left(\frac{n}{m+n}\right)c = \frac{k}{m+n}c$$

となる。ここで

$$e_L = \frac{OS_1}{a} = \left(\frac{nc}{m+n}\right) / \left(\frac{kc}{m+n}\right) = \frac{n}{k} \quad (\text{左離心率})$$

$$e_R = \frac{OS_2}{a} = \left(\frac{mc}{m+n}\right) / \left(\frac{kc}{m+n}\right) = \frac{m}{k} \quad (\text{右離心率})$$

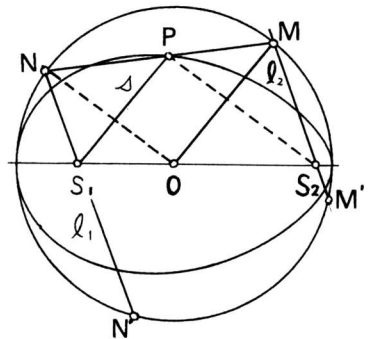


図6 卵形線 定義3

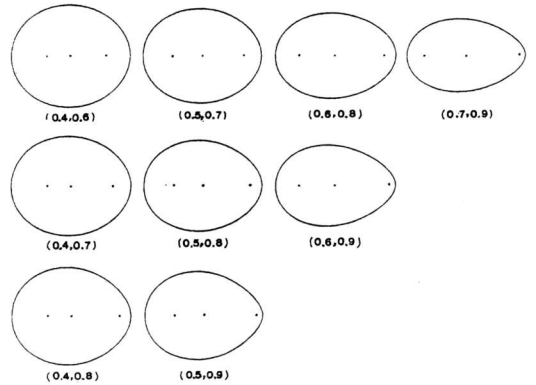


図7 卵形線の離心率による変化

が定義<sup>5)</sup>できる。

この  $e_L, e_R$  を条件  $0 \leq e_L \leq e_R \leq 1$  の範囲で、変化させると、図7のように様々な形の卵形が表される<sup>5)</sup>。

1. 2. 4 3つの定義の関係

さて、3つの定義を双極座標で考えてみると

[定義1]

$$R_0 \rightarrow S_1S_2 = c \rightarrow (n/m) \quad \Leftrightarrow \quad mr_1 + nr_2 = mR_0$$

$$\text{変換} \downarrow R_0 = \frac{k}{m}c \quad \uparrow c = \frac{m}{k}R_0$$

[定義2]

$$m \rightarrow n \rightarrow kc = K \quad \Leftrightarrow \quad mr_1 + nr_2 = kc$$

$$\text{変換} \uparrow a = \frac{kc}{m+n} \quad \downarrow k = \frac{a(m+n)}{c}$$

[定義3]

$$a \rightarrow e_L : e_R = n : m \quad \Leftrightarrow \quad mr_1 + nr_2 = a(m+n)$$

卵形線上の点Pが満たす、パラメータを用いた双極座標式を導くには、図8を参照すれば明かになる。このとき、次の関係式を用いて式を導出した。

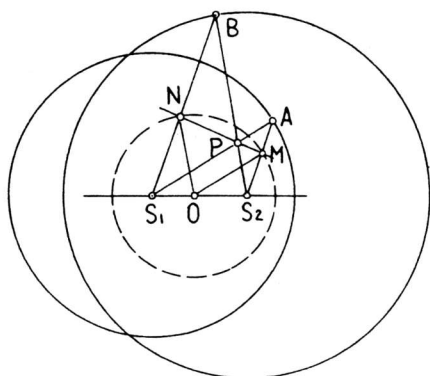


図8 定義1と3の関係

$$S_1P + \frac{n}{m}S_2P = S_1A \rightarrow mS_1P + nS_2P = mS_1A$$

また、各式の間の変換が、図式の↑、↓のようになることも、明らかである。

## 2. 卵形線の短軸

### 2.1 短軸の定義とその位置

前節1.2.3.で考察したように、長軸が  $a$  で規格化されると、次の短軸概念が付加され意味をもつ。

#### 2.1.1 [定義]

卵形線の短軸と言えは、長軸に垂直で、最も長い卵形線上の2点を結ぶ部分図9で定義することも考えられるが、それは、巾であって、楕円の一般化としては、図10のように、「短軸は、長軸の中点と卵形線上の点Pを結ぶ線分のうち、最も短いもの」と定義する。

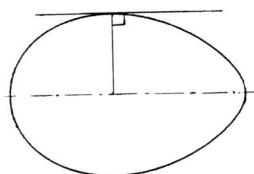


図9 卵形線の巾

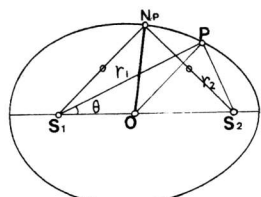


図10 短軸の定義

#### 2.1.2 短軸の位置とその導出

$mr_1 + nr_2 = kc$  で定義されているとき、長軸（対称軸）の中点を原点  $O$  とし、長軸方向を  $x$  軸、垂直方向を  $y$  軸とする。このとき、極間を  $c$  とすると、極の座標は、 $S_1O:OS_2 = n:m$  より、焦点  $S_1 = \left(\frac{-nc}{m+n}, 0\right)$ ,

焦点  $S_2 = \left(\frac{mc}{m+n}, 0\right)$  である。卵形線上の1点  $P$  を  $(X, Y)$ ,  $\angle PS_1O = \theta$ ,  $S_1P = r_1$  とすると、線分の長さの2乗 ( $OP^2$ ) は

$$OP^2 = X^2 + Y^2 = \left(r_1 \cos \theta - \frac{nc}{m+n}\right)^2 + (r_1 \sin \theta)^2$$

$$\text{ここで } \begin{cases} r_2^2 = r_1^2 + c^2 - 2r_1c \cos \theta \\ mr_1 + nr_2 = kc \end{cases}$$

まず  $r_2$  を消去して、次に  $\theta$  を消去すると

$$\begin{aligned} OP^2 &= r_1^2 - \frac{2nc}{m+n} r_1 \cos \theta + \left(\frac{nc}{m+n}\right)^2 \\ &= \frac{m}{n} \left(r_1 - \frac{kc}{m+n}\right)^2 + \frac{(k^2 - mn)}{(m+n)^2} c^2 \end{aligned}$$

となる。

上式は、 $r_1$  の2次式より、線分  $OP$  は、 $r_1 = \frac{kc}{m+n}$  のとき、最小値  $\sqrt{(k^2 - mn)c^2 / (m+n)^2}$  となり、これは、1.2.3の  $a = \frac{kc}{m+n}$ ,  $e_L = \frac{n}{k}$ ,  $e_R = \frac{m}{k}$  を用いて変形すれば、 $a\sqrt{1 - e_L e_R}$  となる。ところで

$\frac{kc}{m+n}$  は、卵形線の定義式  $mr_1 + nr_2 = kc$  における  $r_1 = r_2$  のときの  $r_1 = \frac{kc}{m+n}$  と一致する。ゆえに、短軸

の位置として、「卵形線の短軸は、焦点  $S_1, S_2$  から等距離にある卵形線上の点（近点と呼ぶ）と、中心を結ぶ線分である。」と定義できる。長さは、 $a\sqrt{1 - e_L e_R}$  である。

### 2.2 卵形線の短軸の性質

#### 2.2.1 卵形線の短軸が近点( $N_p$ )における卵形線の法線上にあること

図11におけるように、図6に更に、補助線  $S_1M, S_2N$  を引き、 $S_1M$  と  $S_2N$  の交点  $T$  を求めると、直線  $PT$  は、 $P$  における卵形線の法線である<sup>4),6),8)</sup>

ところで、点  $P$  が  $N_p$  点、つまり  $r_1 = r_2$  であるとき図11は、図12のようになる。つまり、 $S_1S_2/MN$  となり、四角形  $S_1S_2MN$  が平行四辺形より、 $P, T, O$  が一直線上にある。つまり、 $N_pO$  は、点  $N_p$  における卵形線の法線上にある。

#### 2.2.2 短軸上の端点（近点）が微分幾何学的頂点でないこと

[理由] 卵形線の頂点<sup>7)</sup> は、図13のような作図で求める。つまり、図13のように、図6の  $e_L$  が  $l_1 \perp$



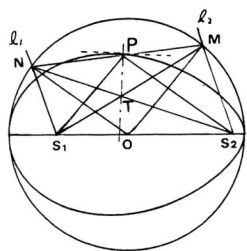


図11 卵形線の法線

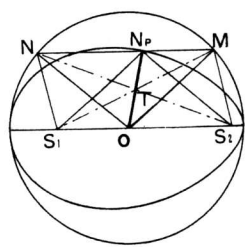


図12 短軸と法線

$S_1S_2$  のときであり、このとき、 $P$  は、頂点  $V$  となる。ここで  $e_L \neq e_R$  のとき、 $MN$  は、 $S_1S_2$  と平行でない。ゆえに、 $V \neq N_p$  となる。故に、 $N_p$  は、卵形線の頂点ではない。

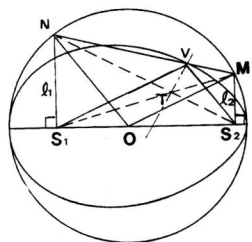


図13 卵形線の頂点

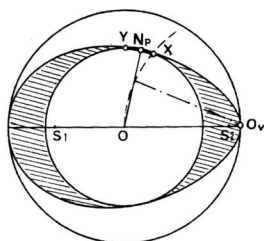


図14 同心円間の卵形線

### 2. 2. 3 短軸と長軸による卵形線のもともめ方

$O$  を中心とし、短軸の長さ  $a\sqrt{1-e_L e_R}$  を半径とする円（短軸補助円）は、2.1 節の定義および 2.2.1 節の性質より、卵形線に内接する円であり、長軸補助円は、卵形線に外接する円である。ゆえに、図 14 のように、二つの同心円の間に、卵形線は存在する。

逆に、『二つの同心円と内側の円周上の接点（近点）を与えると卵形線が定まる』この近点は、図 14 のように、短軸補助円上の太線円弧  $XY$  上にとることができる。ここで  $X$  は、短軸補助円と、円  $(O_v; O_vO)$  との交点である。

### 3. 卵形面について

#### 3. 1 定義

卵形面は、卵形線の対称軸を回転軸として描けば、簡単に得られる。しかし、それでは卵形面の性質としては、対称軸および断面の卵形線の性質としてのものしか得られない。それで、次のように、卵形面を定義し、卵形線を拡張した。

#### [卵形面の定義]

1. 空間に任意の異なる 4 点  $(A, B, C, V)$  をとる。  
(同一平面上にない)
2. そのうちの 3 点  $(A, B, C)$  を含む平面  $(a)$  とする  
を定める。
3. 三角形  $ABC$  の外接円の中心を  $O_1$  とする。またこの外接円を  $C_1$  とする。
4. 4 点  $(A, B, C, V)$  の外接球の直径が  $VU$  となるように点  $U$  をとる。
5. 点  $V, U$  における外接球の接平面と、平面  $a$  との交線をそれぞれ、 $l_v, l_u$  とする。
6.  $\triangle ABC$  の外接円の中心  $O_1$  を通り、平面  $a$  に垂直な直線上に任意の動点  $M$  をとる。
7. 動点  $M$  を中心とし、円  $C_1$  を含む動球面  $(\beta_m)$  が一つ定まる。
8. ここで、直線  $l_u$  を含み、動球面  $\beta_m$  に接する平面  $(\pi_u)$  を一つ定める。この接平面  $\pi_u$  に平行でしかも、直線  $l_v$  を含む平面  $(\pi_v)$  が一つ定まる。
9. この平面  $\pi_v$  と動球面  $\beta_m$  との交円  $(C_m)$  が一つ定まる。
10. 9 の交円  $C_m$  は、点  $M$  を動かすとき、6 から 9 を繰り返すと、空間内を動く。その軌跡は、卵形面を描く。

これを 4 点  $(A, B, C, V)$  が定める卵形面という。

ここで、図 15 のように、直線  $l_v$  に垂直で、外接円の中心  $O_1$  を通る平面  $\gamma$  を定める。この平面  $\gamma$  と、直線  $l_u$ 、外接円  $C_1$ 、直線  $l_v$  との交線を順に  $O_0, S_1, S_2, S_3$  とすると、卵形面と平面  $\gamma$  の交線は、その 4 点を等距離円  $\gamma$  の中心、3 焦点として定まる卵形線である。

また、卵形面と平面  $a$  との交線は円である。

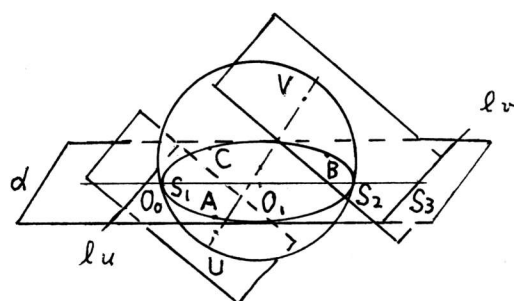


図15 卵形面定義の補助図

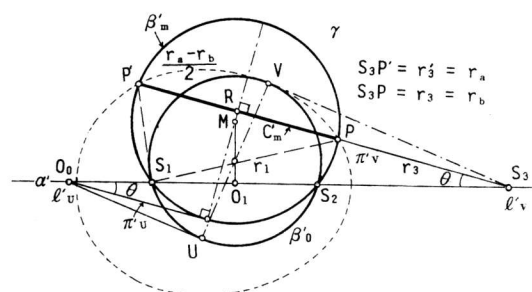


図16 卵形面補助立面図

### 3. 2 卵形面を表す式

定義の立面図, 図16において座標を次のようにとる。点S<sub>1</sub>を原点, 平面aをxy平面, 平面γをxz平面とすると, また, S<sub>1</sub>P=r<sub>1</sub>, ∠PS<sub>3</sub>S<sub>2</sub>=θとしS<sub>3</sub>P=r<sub>3</sub>とすると, 焦点S<sub>1</sub>, S<sub>3</sub>を用いる双極座標を用いる定義式<sup>4)</sup>より

$$nr_3 + kr_1 = \frac{m(k^2 - n^2)}{m^2 - n^2} c \quad (2)$$

$$r_1^2 = r_3^2 + S_1S_3^2 - 2r_3S_1S_3\cos\theta \quad (3)$$

(2), (3) に  $S_1S_3 = \frac{k^2 - n^2}{m^2 - n^2} c$  を代入して, r<sub>3</sub> について

解く

$$r_3^2 + \frac{2(mn - k^2\cos\theta)c}{m^2 - n^2} r_3 + \frac{(k^2 - m^2)(k^2 - n^2)}{(m^2 - n^2)^2} c^2 = 0$$

r<sub>3</sub> の2次方程式の解を r<sub>a</sub>, r<sub>b</sub> とすると

$$\left(\frac{r_a - r_b}{2}\right)^2 = \left(\frac{mn - k^2\cos\theta}{m^2 - n^2}\right)^2 c^2 - \frac{(k^2 - m^2)(k^2 - n^2)}{(m^2 - n^2)^2} c^2$$

ゆえに, 点Rを中心, 半径 (r<sub>a</sub> - r<sub>b</sub>)/2 の交円C<sub>m</sub>上

の点Q(x, y, z)は

$$\begin{cases} x = \frac{c}{m^2 - n^2} \left\{ k^2 - n^2 - (k^2\cos\theta - mn)\cos\theta \right. \\ \quad \left. + \sqrt{(k^2\cos\theta - mn)^2 - (k^2 - m^2)(k^2 - n^2)} \cdot \cos\varphi\cos\theta \right\} \\ y = \frac{c}{m^2 - n^2} \sqrt{(k^2\cos\theta - mn)^2 - (k^2 - m^2)(k^2 - n^2)} \sin\varphi \\ z = \frac{c}{m^2 - n^2} \{ k^2\cos\theta - mn \\ \quad - \sqrt{(k^2\cos\theta - mn)^2 - (k^2 - m^2)(k^2 - n^2)} \cos\varphi \} \sin\theta \end{cases}$$

ここでφ = 0 ~ 2π θは

$$-\cos^{-1}\left(\frac{mn + \sqrt{(k^2 - m^2)(k^2 - n^2)}}{k^2}\right) \leq \theta \leq$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{mn + \sqrt{(k^2 - m^2)(k^2 - n^2)}}{k^2}\right)$$

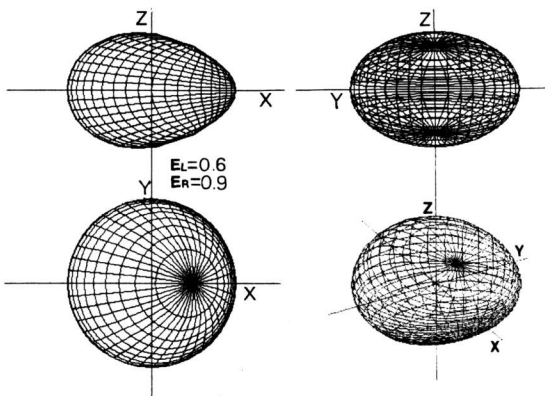


図17 卵形面のワイヤフレーム図

この点Q(x(φ, θ), y(φ, θ), z(φ, θ))が, 前節に定義した卵形面の媒介変数表示である。

### 3. 3 卵形面のワイヤフレーム図形

上式を用いて, 卵形面のワイヤフレーム図形の立面図(卵形線), 平面図(円), 側面図および見取図を図17に表す。

### 4. 結び

以上, 卵形線の短軸および卵形線の以下の性質がわかった。

1. 卵形線の中心と近点を結ぶ線分が短軸である。
1. 短軸は, 近点における卵形線の法線上にある。
1. 近点は, 焦点から等距離にある点である。
1. 近点は, 卵形線の頂点ではない。
1. 短軸の長さは,  $a\sqrt{1 - e_{LE}e_R}$  (楕円  $a\sqrt{1 - e^2}$ ) である。
1. 短軸の傾きαは  $\cos\alpha = (e_R - e_L)/(2\sqrt{1 - e_{LE}e_R})$  である。
1. 卵形線は, 2つの同心円(長軸補助円と短軸補助円)の間に存在する。

また, 卵形面の定義を構成幾何学的に述べ, さらに式と図で表現できた。その性質として, 2つの対称面(円と卵形線)もつことが解った。さらに, 卵形面は, 空間4次凸曲面であることがいえる。

以上, デカルトの卵形線を構成幾何学的に考察し, その短軸を発見し, また, 空間への拡張を定義し得た。

これらの卵形線の追求が, 楕円がそうであるように, 数理物理学や天文学等に应用できることを期待した。

## 参考文献

- 1) デカルト著, 河野伊三郎訳; “デカルトの幾何学” 白林社, 1949年
- 2) ロックウッド著, 松井政太郎訳; “カーブ”; みすず書房, 1964年
- 3) 窪田忠彦著, “微分幾何学”; 岩波全書, P.201~P.234, 1967年
- 4) 蛭子井博孝; “デカルトの卵形線の二・三の性質”; 図学研究, 12, P.35~P.49, 1973年
- 5) 蛭子井博孝; “デカルトの卵形線に関する考察(計算機援用作図による比較検討)”; “図学研究, 37, P.9~14, 1985年
- 6) 蛭子井博孝; “デカルトの卵形線に関する考察(その幾何学的構図)”; 図学研究, 49, P.9~14, 1990年
- 7) 蛭子井博孝; “デカルトの卵形線の曲率円”; 図学研究, 19, P.7~11, 1976年
- 8) 栗田 稔, “いろいろな曲線”; 共立出版, P.91, 1969年

## 付 記

小論4) に述べているように, 本文中(2)式について, 卵形線が,  $mr_1 + nr_2 = kc$  で与えられるとき

$$S_1 S_2 = c, S_1 S_3 = \frac{k^2 - n^2}{m^2 - n^2} c, S_2 S_3 = \frac{k^2 - m^2}{m^2 - n^2} c$$

とする。その一直線上の3点  $S_1, S_2, S_3$  を3焦点(極)として, その2つの点

$S_1, S_3$  を極とする双極座標の定義式は,

$$nr_3 + kr_1 = m \frac{k^2 - n^2}{m^2 - n^2} c$$

$S_2, S_3$  を極とする双極座標の定義式は,

$$-kr_2 + mr_3 = n \frac{k^2 - m^2}{m^2 - n^2} c \quad \text{と表される。}$$

つまり,  $r_1, r_2$  あるいは,  $r_2, r_3$  あるいは  $r_3, r_1$  のどれでも同じ卵形線を表す。

### Minor Axis of the Oval of Descartes and Ovaloid Ebisui, HIROTAKA

Descartes' oval is defined as  $mr_1 + nr_2 = kc$  by using bipolar coordinates. Where, if  $m = n$ , it is ellipse. According to this definition and a number of the properties, it can be said that the Descartes' oval is essential extension of ellipse.

This time, the minor axis of oval that has the similar properties to those of the minor axis of ellipse is found. This minor axis is the segment connecting the middle point  $O$  of the major axis (the axis of symmetry) of oval and the point  $N_p$  on the oval, which is at the shortest distance from the point  $O$ . The length of this minor axis is expressed by  $a\sqrt{1 - e_L e_R}$ , where  $a$  is a half of the length of the major axis, and  $e_L$  and  $e_R$  are left and right eccentricities, respectively. As for this minor axis, its proof and a number of the properties are discussed.

Next, the method of defining ovaloid which is convex, closed curved surface in space by extending the oval on plane is found, therefore, it is reported. This ovaloid has, as the contours of the orthographic projection from three directions, circle, Descartes' oval and a fourth order curve like ellipse. Further, the parametric expression of this ovaloid is derived. In this way, the new properties of oval are able to be added, therefore, it is reported.

## デカルトの卵形線の短軸に関する一定理\*

蛭子井 博 孝\*\*

このノートは、一定理の証明とその作図に関するものである。図には、作図線の順序を記してある。そして、証明は、その順序を追うことにより解かるようにした。さらに、解析的証明も付け加える。

### 1. [定理] デカルトの卵形線の短軸の垂直二等分線は、卵形線の第3焦点を通る。

(定義1) この卵形線の短軸とは、小論<sup>1)</sup>におけるように、卵形線の第1, 第2焦点から、対称軸の長さの半分に等しい距離にある点と、対称軸の中点  $O_{12}$  を結ぶ線分をいう。

(定義2) 卵形線の第3焦点とは、卵形線を定義する双極座標式の第1極(焦点), 第2極(第2焦点)を結ぶ直線上にある点である。そして、その第1極と第3の点(第3焦点)を用いると、それらを双極とする双極座標式により定義する卵形線が同じ位置に描ける。その式<sup>1)</sup>は、 $mr_1 + nr_2 = kc$

$$nr_3 + kr_1 = m \frac{(k^2 - n^2)c}{(m^2 - n^2)}$$

ここで、 $F_1F_2 = c$

$$\text{また } F_1F_3 = \frac{(k^2 - n^2)c}{(m^2 - n^2)}$$

### 2. [証明]

(円, 線分, 点を番号で示す。) 図参照。

① := 卵形線に外接する補助円  $O_{12}$  を描く。(逆に、補助円  $O_{12}$  に内接する卵形線を考える。) ② := 中心線を引く。③, ④ := 第1焦点, 第2焦点  $F_1, F_2$  を定める。④' :=  $O_{12}F_1 : O_{12}F_2 = n : m = e_L : e_R$  と考える。⑤, ⑥ := 短軸端点(近点)を求める。つ

まり、 $F_1, F_2$  を中心に、補助円  $O_{12}$  の半径に等しい半径の円を描き、その交点を求める。⑦ := 短軸端点  $N_P$  とする。⑧ := ①を通り、⑥に平行に直線を引く。⑨ := ⑧と円①の交点を  $N$  とする。すると、 $O_{12}F_2 N_P N$  は、平行四辺形。∴  $F_1F_2 \parallel NN_P$  ⑩ := ①を通り⑤と平行に直線を引く。⑪ := 同様に交点を  $M$  とする。すると、 $F_1O_{12}MN_P$  は平行四辺形。∴  $F_1F_2 \parallel MN_P$  ⑫ :=  $N, N_P, M$  は、同一直線上にある。⑬, ⑭ := パップスの定理より  $F_1N \parallel F_2M$ , このとき、四角形  $F_1NMF_2$  は平行四辺形。さて⑮ :=  $\triangle F_1F_2N_P$  の外接円を描く。ここで、 $\triangle N_P F_1 F_2$  は、二等辺三角形より、直線  $NN_P M$  ⑯ は、外接円の接線 ( $t_1$ ) となる。⑰ := 接線  $N_P O_{12}$  と外接円の交点を  $U_P$  とする。⑱ :=  $U_P$  における外接円の接線 ( $t_2$ ) と直線  $F_1F_2$  の交点を  $O_0$  とする。なお、余談になるが、⑲, ⑳, ㉑ = (㉒) は、同一直線上にある。

次に、 $O_0 O_{12}$  の長さを求める。⑮⑰より弦  $N_P U_P$  に対する接線が  $t_1, t_2$  より  $\angle \alpha = \angle \beta$ 。② // ⑫ より  $\angle \alpha = \angle \gamma \therefore \angle \beta = \angle \gamma = \angle \gamma' \therefore \triangle O_{12} U_P O_0$  は二等辺三角形。ここで、㉓, ㉔ :=  $O_0$  から  $N_P U_P$  への垂線の足を㉕,  $N_P$  から  $F_1 F_2$  への垂線の足を㉖とすると

$$\frac{\frac{1}{2} U_P O_{12}}{O_0 O_{12}} = \frac{\frac{1}{2} c - O_{12} F_1}{O_{12} N_P} \dots \dots \dots (1)$$

明らかに、 $\triangle F_1 O_{12} U_P \sim \triangle N_P O_{12} F_2$

$$\therefore F_1 O_2 \cdot O_{12} F_2 = U_P O_{12} \cdot O_{12} N_P \dots \dots \dots (2)$$

(1)(2)より

$$O_0 O_{12} = \frac{\frac{1}{2} U_P O_{12} \cdot O_{12} N_P}{\frac{1}{2} c - O_{12} F_1} = \frac{\frac{1}{2} F_1 O_{12} \cdot O_{12} F_2}{\frac{1}{2} c - O_{12} F_1}$$

\* 平成7年9月26日  
\*\* 岩国市元町4丁目12-10

$$= \frac{1}{2} \frac{nc}{m+n} \cdot \frac{mc}{m+n} = \frac{mnc}{m^2 - n^2} \dots\dots (A)$$

㉔: =  $U_P$  を通る  $\triangle F_1 N_P F_2$  の外接円の直径  $l$  を引く。

㉕: =  $N_P$  より  $l$  に垂線  $l_0$  を下し、その足を  $P$  とする。

㉖: =  $l_0$  と直線㉔との交点を  $F_3$  とする。

$O_0 U_P \parallel N_P F_3$  より  $\angle \delta = \angle \beta = \angle \gamma$

$\therefore F_3 N_P O_{12}$  は、二等辺三角形。

(本題の証明) 上の作図より

$\triangle O_{12} U_P O_0 \sim \triangle O_{12} N_P F_3$  で、それぞれ、二等辺三角形  $\therefore O_{12} O_0 \cdot O_{12} N_P = O_{12} U_P \cdot O_{12} F_3$

$$\therefore O_{12} F_3 = \frac{O_{12} O_0 \cdot O_{12} N_P}{O_{12} U_P} = \frac{O_{12} O_0 (O_{12} N_P)^2}{O_{12} U_P \cdot O_{12} N_P}$$

$$= \frac{O_{12} O_0 (O_{12} N_P)^2}{O_{12} F_1 \cdot O_{12} F_2} \quad (\because (2))$$

$$= \frac{mnc}{m^2 - n^2} a^2 (1 - e_L e_R)$$

$$= \frac{nc}{m+n} \cdot \frac{mc}{m+n}$$

$$\left( \begin{array}{l} \therefore (A) \text{ および小論 (1) より} \\ O_{12} N_P = a \sqrt{1 - e_L e_R} \\ = \frac{kc}{m+n} \sqrt{1 - \frac{m}{k} \cdot \frac{n}{k}} \end{array} \right)$$

$$= \frac{k^2 - mn}{m^2 - n^2} \cdot c \quad F_1 F_3 = O_{12} F_3 + O_{12} F_1$$

$$\therefore F_1 F_3 = \frac{(k^2 - mn)c}{m^2 - n^2} + \frac{nc}{m+n} = \frac{k^2 - n^2}{m^2 - n^2} c$$

ゆえに (定義 2) より  $F_3$  は、第 3 焦点である。

逆に、短軸の垂直二等分線と対称軸の交点が、第 3 焦点である。といえる。

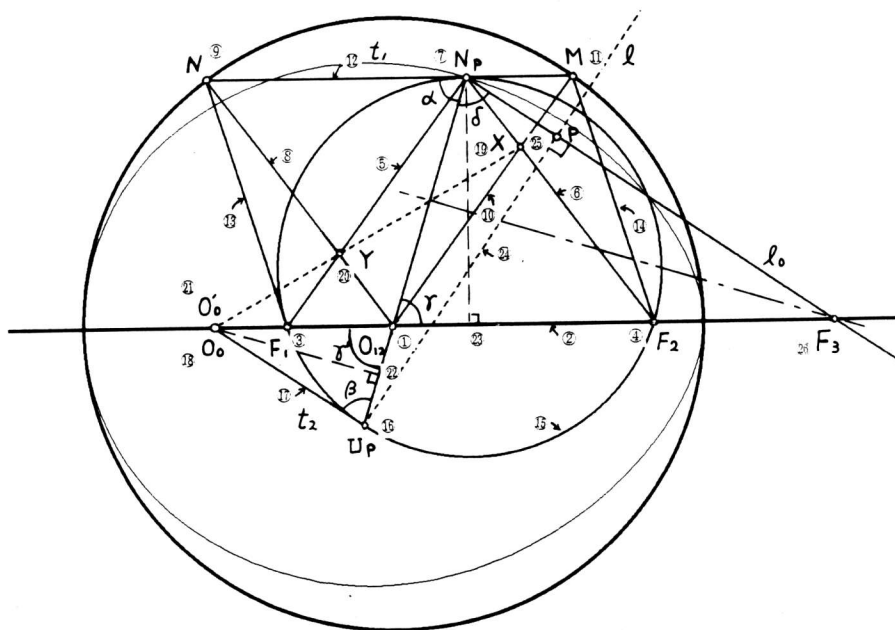


図 短軸と第 3 焦点

3. 解析幾何による証明

$O_{12}$  を原点  $(0, 0)$  とし、直線  $F_1 F_2$  を  $x$  軸とする。

$F_1 F_2 = c$  とし、 $O_{12} F_1 : O_{12} F_2 = n : m$  とする。

また、円  $O_{12}$  の半径を  $a$  とする。

短軸の端点は、

$$((m - n) \cdot c / \{2(m + n)\}, \sqrt{a^2 - c^2 / 4})$$

短軸の垂直二等分線の式は

$$Y - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - c^2 / 4} = \frac{-c(m - n) / (m + n)}{2 \sqrt{a^2 - c^2 / 4}} \left\{ X - \frac{(m - n)c}{4(m + n)} \right\}$$

$Y = 0$  のとき、 $a = kc / (m + n)$  とおくと

$$X = (k^2 - mn)c / (m^2 - n^2)$$

$$\therefore F_1X =$$

$$O_{12}X + F_1O_{12} = (k^2 - n^2) \cdot c / (m^2 - n^2)$$

ここで、 $F_1X$ は、定義2の $F_1F_3$ の長さに等しい。

ゆえに、短軸 $O_{12}N_P$ の垂直二等分線は、第3焦点を通る。

以上、定理の証明を終るが、短軸と、3つの焦点の

位置関係が、図のように単純であることがわかり、第3焦点が、身近なものとなった。

#### 参考文献

- 1) 蛭子井博孝；“デカルトの卵形線の短軸および卵形面”；図学研究 68， p.2 ~ p.8.

## デカルトの卵形線の2焦点を見込む角について\*

蛭子井 博 孝\*\*

デカルトの卵形線には、焦点が3つあり、その第1第2焦点は、いわゆる卵形の内側（卵形線の内分枝の内側）にあり、第3焦点は、卵形線の外分枝の外側にある。それらの2焦点を卵形線上の点から見込む角について、次のような性質を見つけ、証明したので報告する。

[定理1] 第3焦点を通る直線と卵形線との交点が内分枝上に2点あるとき、その各点から、第1、第2焦点を見込む角は、相等しい。

[定理1'] 第3焦点を通る直線と外分枝との交点についても同様である。図1参照

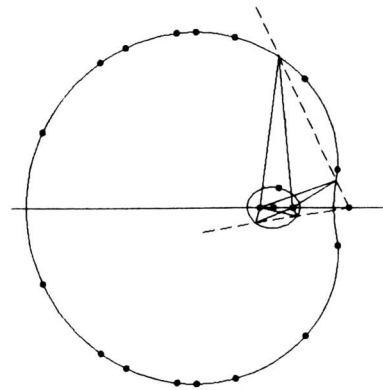


図1 2焦点を見込む角

### 1. 準備

[卵形線の定義] 図2におけるように、定円①（中心 =  $F_1$ 、半径 =  $F_1A$ ）と、第2焦点からの距離の比（ $PA : PF_2 = n : m$ ,  $QA = QF_2 = n : m$ ,  $m > n > 0$ ）が一定な点  $P, Q$  は動点  $A$  が定円上を動くとき、それぞれ、卵形線の内分枝、外分枝を描く。

この定義より、 $F_1P + (n/m)F_2P = F_1A$  で  $c = F_1F_2$  として、 $F_1A = (k/m)F_1F_2$  となるように  $k$  をとれば、 $F_1P = r_1$ ,  $F_2P = r_2$  より

$$mr_1 \pm nr_2 = kc \dots\dots\dots (1)$$

と、双極座標の定義式を得る。-は外分枝。

さて、卵形線に関して、次の2題が、文献<sup>1)</sup>に述べてあり、その証明も見られるが、記号の用い方の相異等があるので、ここで、証明も述べることにする。

[補題1]  $F_1P \cdot F_1Q$  は、一定である。

[補題2]  $\triangle F_2PQ$  の外接円と直線  $F_1F_2$  との交点は、卵形線の第3焦点である。

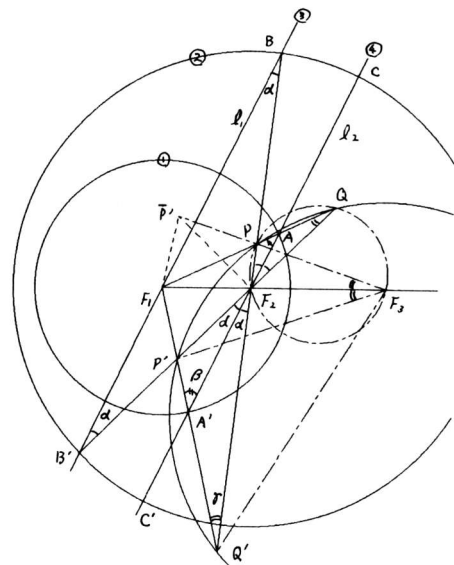


図2 証明補図1

\* 平成8年9月20日受付  
\*\* 岩国市元町4丁目12-10

[補題1の証明]

図2の△F<sub>1</sub>F<sub>2</sub>Pにおいて、余弦定理より

$$r_2^2 = r_1^2 + c^2 - 2r_1c \cdot \cos\theta \dots\dots\dots (2)$$

(1), (2)式より、r<sub>2</sub>を消去すれば

$$(m^2 - n^2)r_1^2 - 2(km - n^2\cos\theta)cr_1 + (k^2 - n^2)c^2 = 0$$

このr<sub>1</sub>についての2次方程式の解と係数の関係より、上式の2つの解の積は、一定で、次のようになる。

$$r_1 \cdot r_1' = (k^2 - n^2)c^2 / (m^2 - n^2) \dots\dots\dots (3)$$

ここで、r<sub>1</sub> = F<sub>1</sub>P, r<sub>1</sub>' = F<sub>1</sub>Qであるから

$$F_1P \cdot F_1Q \text{ は一定} \quad (\text{証明終り})$$

[補題2の証明]

△F<sub>1</sub>F<sub>2</sub>Q, △F<sub>1</sub>PF<sub>3</sub>は、円周角の定理より、  
∠F<sub>1</sub>QF<sub>2</sub> = ∠F<sub>1</sub>F<sub>3</sub>Pだから、相似である。

$$\therefore F_3P / F_1F_3 = F_2Q / F_1Q$$

$$(1)より mF_1Q - nF_2Q = kc$$

$$(3)より F_1P \cdot \frac{m^2 - n^2}{(k^2 - n^2)c^2} = \frac{1}{F_1Q}$$

$$\therefore \frac{F_3P}{F_1F_3} = \frac{nF_2Q}{nF_1Q} = \frac{mF_1Q - kc}{nF_1Q} \\ = \frac{m}{n} - \frac{kc}{nF_1Q}$$

$$\therefore \frac{F_3P}{F_1F_3} = \frac{m}{n} - \frac{k(m^2 - n^2)}{cn(k^2 - n^2)} \cdot F_1P$$

(3)と方べきの定理およびF<sub>1</sub>F<sub>2</sub> = cより

$$F_1F_2 \cdot F_1F_3 = c \cdot \frac{(k^2 - n^2)c}{(m^2 - n^2)}$$

$$\therefore \frac{(m^2 - n^2)F_3P}{(k^2 - n^2)c} + \frac{k(m^2 - n^2)F_1P}{cn(k^2 - n^2)} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore nr_3 + kr_1 = mF_1F_3$$

これは、F<sub>1</sub>, F<sub>3</sub>からPまでの距離r<sub>1</sub>, r<sub>3</sub>の一次式が、その極間距離F<sub>1</sub>F<sub>3</sub>の定数倍に等しいことから、(1)式と同様のものである。ゆえに、F<sub>3</sub>を焦点といえ、第3焦点と名付けられる。

外分枝上の点Qについて、△F<sub>1</sub>F<sub>3</sub>Q ∽ △F<sub>1</sub>PF<sub>2</sub>より同様にして -nF<sub>3</sub>Q + kF<sub>1</sub>Q = mF<sub>1</sub>F<sub>3</sub>

つまり、-nr<sub>3</sub> + kr<sub>1</sub> = m(k<sup>2</sup> - n<sup>2</sup>)c / (m<sup>2</sup> - n<sup>2</sup>)  
と言える。

このように、デカルトの卵形線は、第1, 第2, 第3焦点があり、そのうち、2つの点を双極として、定義できるのである。

2. 定理の証明

次に、卵形線の定義の方法として、定円①F<sub>1</sub>Aの半径のm/n倍の半径をもち、中心F<sub>2</sub>をもつ定円②を考へる。すると、点Pは、定円(中心=F<sub>2</sub>, 半径=F<sub>2</sub>B)と、定点F<sub>1</sub>からの距離の比が一定(m/n)の点である卵形線を考へることができる。

つまり、F<sub>1</sub>P : PB = F<sub>1</sub>Q' : Q'B = n : mである。さて、図2の作図順序を少し変えて考へる。

まず円F<sub>1</sub>, 円F<sub>2</sub>(半径比n : m)を描く、次に点F<sub>1</sub>を通る直線l<sub>1</sub>, 点F<sub>2</sub>を通る直線l<sub>1</sub>に平行な直線l<sub>2</sub>を引く。直線l<sub>1</sub>と円F<sub>2</sub>との交点をB, B' 直線l<sub>2</sub>と円F<sub>1</sub>との交点をA, A' とする。そして、直線F<sub>1</sub>AとF<sub>2</sub>B, F<sub>1</sub>AとF<sub>2</sub>B', F<sub>1</sub>A'とF<sub>2</sub>B', F<sub>1</sub>A'とF<sub>2</sub>Bの4交点P, Q, P', Q'を考へる。

直線l<sub>1</sub>, l<sub>2</sub>が一回転するとき、点P, P'は、卵形線の内分枝(mr<sub>1</sub> + nr<sub>2</sub> = kc), 点Q, 点Q'は、卵形線の外分枝(mr<sub>1</sub> - nr<sub>2</sub> = kc)上を動く。

[補題3] 点P, P'から焦点F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>を見込む角∠F<sub>1</sub>PF<sub>2</sub>は∠F<sub>1</sub>P'F<sub>2</sub>に等しい。同様に∠F<sub>1</sub>QF<sub>2</sub> = ∠F<sub>1</sub>Q'F<sub>2</sub>

[補題4] ∠PF<sub>3</sub>F<sub>1</sub> = ∠P'F<sub>3</sub>F<sub>2</sub>

[補題3, 4の証明]

図のように、∠α, ∠β, ∠γをとる。

$$\angle\alpha - \angle\beta = \angle\gamma = \angle F_1Q'F_2 = \angle F_1QF_2 \dots (4)$$

$$\therefore \angle PQP' = \angle P'Q'P'$$

$$\therefore \text{四角形} QPP'Q' \text{ は同一円周上} \dots\dots\dots (5)$$

$$\therefore \angle QP'Q' = \angle QPQ'$$

$$\therefore \angle F_1PF_2 = \angle F_1P'F_2 \text{ (補題3)}$$

ところで、F<sub>3</sub>は、補題2より四角形PQF<sub>2</sub>F<sub>3</sub>が同一円周上にあるような点である。

$$\therefore \text{方べきの定理より } F_1P \cdot F_1Q = F_1F_2 \cdot F_1F_3$$

$$\text{また、(5)より、} F_1P \cdot F_1Q = F_1P' \cdot F_1Q'$$

$$\therefore F_1P' \cdot F_1Q' = F_1F_2 \cdot F_1F_3$$

$$\therefore \text{四角形} P'Q'F_3F_2 \text{ は、同一円周上にある。}$$

$$\therefore \angle P'Q'F_2 = \angle P'F_3F_2 \text{ (補題4)} \dots\dots\dots (6)$$



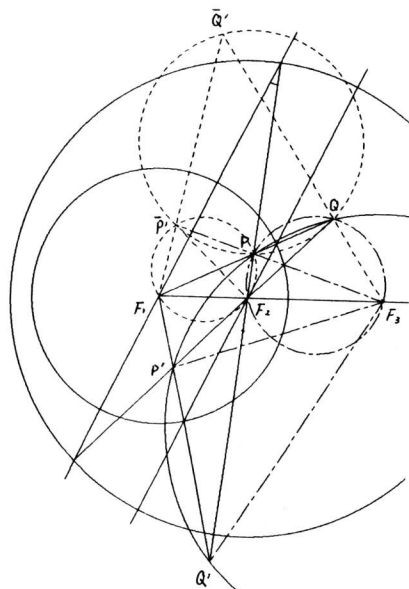


図3 証明補図2

四角形PQF<sub>3</sub>F<sub>2</sub>においても同様に

$$\angle PQF_2 = \angle PF_3F_2 \dots\dots\dots(7)$$

(4), (6), (7)より  $\angle PF_3F_2 = \angle P'F_3F_2$

つまり,  $\angle PF_3F_1 = \angle P'F_3F_1 \dots\dots\dots(8)$

[系1] ここで, P' の直線 F<sub>1</sub>F<sub>2</sub> に関する対称点を  $\bar{P}'$  とする。すると, (8)より, F<sub>3</sub>, P,  $\bar{P}'$  は, 同一直線上にある。図2, 図3参照

ゆえに, 逆にたどれば, 定理1が成立する。

[系2] 直線 F<sub>1</sub>P' と F<sub>3</sub>Q の交点を  $\bar{Q}'$  とすると四角形PQ $\bar{Q}'\bar{P}'$  は, 同一円周上にある。

[証明]

四角形 F<sub>1</sub>F<sub>2</sub>P $\bar{P}'$  は, 定理1より同一円周上にある。

$$\therefore \angle \bar{Q}'\bar{P}'P = \angle PF_2F_1$$

四角形PQF<sub>2</sub>F<sub>3</sub>は, 同一円周上にある。

$$\therefore \angle \bar{Q}'QP = \angle PF_2F_3$$

$$\therefore \angle \bar{Q}'\bar{P}'P + \angle \bar{Q}'QP = \angle PF_2F_1 + \angle PF_2F_3 = 180^\circ$$

∴ 四角形PQ $\bar{Q}'\bar{P}'$  は, 同一円周上にある。

[系3] 簡単な考察から,  $\angle QF_3F_2 = \angle \bar{Q}'F_3F_2$  より,  $\bar{Q}'$  は, 点Q'の直線 F<sub>1</sub>F<sub>3</sub> に関する対称点である。この系および(4)より

[定理1'] の F<sub>3</sub> を通る直線 (F<sub>3</sub>Q $\bar{Q}'$ ) が卵形線の外分枝と交わる点Q,  $\bar{Q}'$  より, 第1, 第2焦点 F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub> を見込む角は, 相等しいと言える。

[補題2] の四角形PF<sub>2</sub>F<sub>3</sub>Qが円に内接し, F<sub>1</sub>, P, Qが同一直線上にあることから, 直接, 次の定理が成立する。

[定理2]

第1焦点 F<sub>1</sub> を通る直線と卵形線の内分枝, 外分枝との交点を P, Q とすると, 点 P, Q から第2, 第3焦点 F<sub>2</sub>, F<sub>3</sub> を見込む角は, 相等しい。

同様に, 四角形PF<sub>1</sub>Q'F<sub>3</sub>が, 円に内接し, P, F<sub>2</sub>, Q'が同一直線上にあることから, 次の定理が成立する。

[定理3]

第2焦点 F<sub>2</sub> を通る直線と, 直線 F<sub>1</sub>F<sub>2</sub> の両側にある内分枝, 外分枝との交点を P, Q' とすると, 点 P, Q' から, 第1, 第3焦点を見込む角は, 互いに補角である。

以上, 定理1, 2, 3より, 第3焦点が, 無限遠点になったとき,  $\bar{P}'PF_3$  は, 対称軸に平行な直線となり, 楕円の場合と一致する。すなわち, デカルトの卵形線の第3焦点は, 卵形線の特殊な場合の楕円の無限遠点だが, 有限の位置になっていると言える。

また, 定理1における見込み角が, 最大値をとるのは, 第3焦点を通る直線が, それぞれ内分枝, 外分枝に接するときである。

このように, デカルトの卵形線について, 2焦点を見込む角に関する初等的新たな性質が見つかったことになる。

参考文献

1) ロックウッド; “カーブ”; みすず書房, 1964年.

# デカルトの卵形線の離心率による形状（凹凸）について

On the 凹凸 of the outer part of Descartes' Oval defined by both eccentricities

蛭子井 博孝 (Hiroataka Ebisui)

**要約:** 本研究では、デカルトの卵形線の定義方法とその形状把握における関係について、報告する。

今、デカルトの卵形線族は、 $m r_1 \pm n r_2 = k c$  と双極座標により定義される。ここで、任意定数  $k, m, n, c$  の条件 ( $k > m > n > 0$ ) の意味は、空間における2つの円錐面の相貫曲線<sup>1)</sup>を考察すると明らかになる。これにより、卵形線の作図における原点の取り方や、主要点の位置関係が明らかになる。さらに、卵形線の内外分枝の形は、左右の離心率  $e_R, e_L$  により決まる。そして、その外分枝の凹凸は、 $e_R + e_L - 1$  の符号により定まる。以上の事柄を以前報告した内容を振り返りつつ明らかにする。

**キーワード:** 凹凸/卵形線/左右離心率/円錐面相貫曲線/任意定数/主要点

**Abstract:** In this paper, we mention about the arbitrariness of some definitions of Descartes' Oval. And we calculate the distances among some main points of the oval using literal constants. These distances are important to draw the oval using functional graphic soft. Next we consider on the 凹凸 using the radiuses of curvature on the Vertexes, and we obtain the outer part of the oval is 凹 if  $e_R + e_L > 1$ , and 凸 if  $e_R + e_L \leq 1$  where  $e_R, e_L$  are right eccentricity and left eccentricity respectively.

**Keywords:** 凹凸/ oval/ right or left eccentricity / intersection of circular cones/ arbitrary constant / main points

## 1. はじめに

デカルトの卵形線の定義を数多く見つけてきた。しかし、その同値性の証明は、今までは、数学的厳密性に欠けていたかもしれない。それは、これまでの研究が、証明がメインテーマでなく、様々な定義より解る卵形線の性質について、述べたいからであった。また、作図法により、一つの定義の図から他の定義の図が、描けることで、同値性のある程度言えるからである。厳密な証明は、一つの定義の任意性と他の定義の持つ任意性を見極める仕事である。ところが、定義の拡張性を考えたとき、その定義の持つ意味が同じなら、皆同じ拡張性を持ち、1つの事柄が、全然広がらないことになる。たとえば、卵形線の定義、”点と円からの距離の比が一定な曲線”の円を任意な曲線に拡張するのと、双極座標の式を2次式などに拡張するのでは、同じではない。だから、卵形線の定義が、違うと違う曲線を表しているといっているのではない。一つの定義の持つ任意性を見極めることが大事であるといいたいのである。

デカルトの卵形線に関しては、3焦点の関係の理解が、どうしても必要になるが、その説明は、拙論1)の5-2節を繰り返すことになり、ここでは、図2、図3、より、第3焦点の考えるところまでにする。しかし、それでも、デカルトの卵形線の内外分枝の凹凸形状までは、把握できる。

## 2. 卵形線の定義と任意性

デカルトの卵形線は、図形幾何学的定義は、

[1]: ”点と円からの距離の比が一定な曲線”

[2]: ”回転対称軸が平行で頂角の異なった円錐面の相貫曲線を、回転軸に垂直な平面へ正投影したもの”

さらに、双極座標では、次のように定義される。

$$[3]: m r_1 \pm n r_2 = k c \quad \dots (1)$$

ここで、 $+n$ は、内分枝、 $-n$ は、外分枝で、 $c$ は、

双極（焦点[S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub> or F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>]）間距離である。  
 k, m, nは、(k > m > n > 0) を満たす任意定数。  
 -----

さらに、同じ位置の卵形線は、別な式である第二焦点、  
 第三焦点<sup>1)</sup> (S<sub>3</sub> or F<sub>3</sub>) を用いた関係式、

$$-k r_2 + m r_3 = \pm n R_{23} \quad \dots (2)$$

$$\pm n r_3 + k r_1 = m R_{13} \quad \dots (3)$$

で定義される。ここで、

$$R_{23} = c(k^2 - m^2)/(m^2 - n^2)$$

$$R_{13} = c(k^2 - n^2)/(m^2 - n^2) \text{ は}$$

それぞれ、第二第三焦点間、第一第三焦点間の距離である。また、これは、拙論1)のp. 43の式から、±nを強調して書き換えた式である。《また、そこでは、-mR<sub>31</sub>となっていたのを、±mR<sub>31</sub>と訂正して考えた式である。誤りであったので、お詫び訂正したい。》

さて、(2)、(3)においてr<sub>2</sub>, r<sub>3</sub>は、第二焦点(極)、第三焦点からの同じ卵形線上の点までの距離で、同じく、+nが内分枝、-nが外分枝を描く。この式の導出は拙論1) 4節を参照されたい。

[4]: '一方を内包する2つの補助円' による定義<sup>1)</sup>もある。 証明文献4)参照

さらにまた、数種の定義方法を見つけてきた。

さて、これらの定義、それぞれが、卵形線の内外分枝ただ一組を定義しているのではなく、デカルトの卵形線族を定義しているため、その形状を統括的に捕らえることが難しい。つまり、それぞれの定義が、任意性を含んだ定義になっているのである。例えば、定義[1]では、点と円の位置関係やその比を、自由に取りうる任意性がある。さらに[2]では、軸間距離、頂角の大きさの自由に取る任意性がある。[3]では、いわゆる式の文字係数である任意定数k, m, n, cの決定により、卵形線族の中の様々な形を描くことができる。さらにまた、[4]では、二つの円の半径と中心間距離を決めることにより卵形線の形ばかりでなく、外の円に外接する外分枝と中の円に内接する内分枝の位置関係が明らかになる。

いずれにしても、その定義の任意性は、それを個々に決定し、数多くの卵形線を描いてみることにより、認知心理学的には、一步一步把握されるのである。しかし、これで、全体像が把握できたといえるものはないかと思いたくなる。それに、いくらかでも答える方法として、左右の離心率による凹凸の形状把握とその内外分枝の作画法を考えた。また、存在位置の把握として、2つの補助円による作画法を考えた。これらの作画法により、任

意に離心率を与え、デカルトの卵形線の内外分枝を描くことにより、概形把握が、可能になるし、内外分枝の位置関係も明らかになる。5節参照。

### 3. 円錐面による卵形線の定義

” 回転対称軸が平行で頂角の異なった円錐面の相貫曲線を、回転軸に垂直な平面へ正投影したもの ” として定義されるデカルトの卵形線が、双極座標で定義する：  
 $m r_1 \pm n r_2 = k c$  の式の任意定数k, m, n, cとどのような関係があるかを、ここでは、明らかにする。

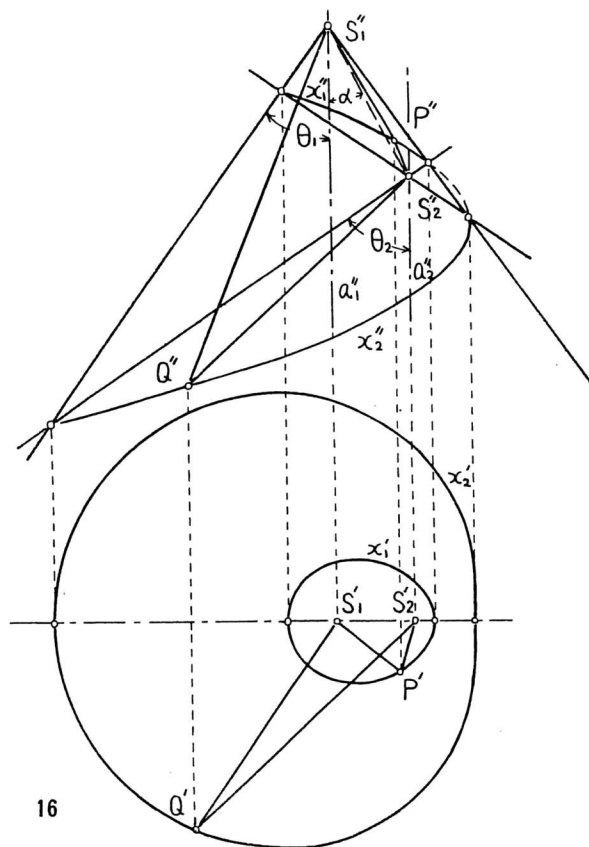


図1 2つの円錐面による卵形線の定義

今、2つの円錐面の平行な回転軸によって決まる平面をπ<sub>2</sub> (立面図)、回転軸に垂直な平面をπ<sub>1</sub> (平面図) とする。さて、図1のように、頂点S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>を持つ円錐面の頂角をそれぞれ、θ<sub>1</sub>, θ<sub>2</sub>とする。ここで、cot θ<sub>1</sub> = m, cot θ<sub>2</sub> = n とおく。すなわち、m, n は、π<sub>1</sub>面に対する円錐面の傾きを表す。また、軸間距離、S<sub>1</sub>' S<sub>2</sub>' を c とする。さらに、回転軸を a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub> とし、a<sub>1</sub>とS<sub>1</sub>' S<sub>2</sub>'の成す角を α とおき、cot α = k とおく。相貫曲線(デカルトの卵形線の空間曲線の上側)を x<sub>1</sub> とする。x<sub>1</sub>上の任意の点PとS<sub>1</sub>' を結ぶ線分(円錐

面  $S_1$  の  $P$  点を通る母線上の線分  $S_1P$  の  $\pi_1$  (平面図) 面への正射影を  $r_1$  とする。同様に、線分  $S_2P$  の正射影を  $r_2$  とする。すると、線分  $S_1P$ 、 $S_2P$  の  $a_1$  軸への正射影は、それぞれ、 $m \cdot r_1$ 、 $n \cdot r_2$  に等しく、これらの和は、 $S_1S_2$  の  $a_1$  軸 への正射影 すなわち  $k \cdot c$  に等しい。ゆえに  $m r_1 + n r_2 = k c$  となり、

$k, m, n, c$  が 空間で意味を持った、双極座標による定義となる。ここで、 $0 < \alpha < \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$  より、 $k > m > n > 0$  (この条件式を得る2つの円錐面の取り方は、妥当である。さらに、厳密に考えるとき、拙論1) 5. 2節のように、3つの円錐面の相貫線を考える必要がある。) また、空間曲線  $x_2$  上の点  $Q$  についても、同様に考えて、 $m r_1 - n r_2 = k c$  となる。

#### 4. 卵形線の主要点の相対位置

卵形線の内分枝の外接円と外分枝の内接円と3つの焦点間の文字定数による相対位置は、図2のようになる。

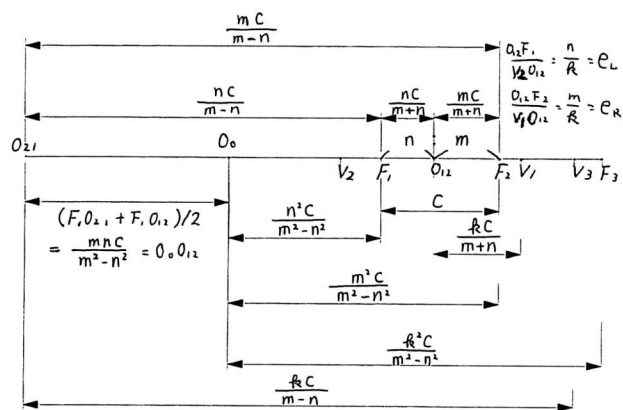


図2 文字定数による主要点間距離

この図では、 $F_1, F_2$  の  $n : m$  の内分点と外分点がそれぞれ  $O_{12}, O_{21}$  であることが、重要である。このことと内分枝の外接円の半径 ( $O_{12}V_1$ ) については次のように、定義式から導出される。

(1) の双極座標  $m r_1 + n r_2 = k c$  で表される点  $P$  について

- ①  $P$  が  $V_1$  (右側対称軸端点) にあるとき、  
 $r_2 = r_1 - c$  だから (1) に代入して  
 $m r_1 + n (r_1 - c) = k c$   
 $\therefore r_1 = (k + n) c / (m + n) \dots (4)$

- ②  $P$  が  $V_2$  (左側対称軸端点) にあるとき、  
 $r_2 = r_1 + c$  だから (1) に代入して  
 $m r_1 + n (r_1 + c) = k c$   
 $\therefore r_1 = (k - n) c / (m + n) \dots (5)$

(4) + (5) より、**外接円の半径**は  

$$V_1V_2/2 = (r_1 + r_1') / 2$$

$$= ((k + n) c / (m + n) + (k - n) c / (m + n)) / 2$$

$$= k c / (m + n) \dots (A)$$

これは、(1) 式の  $r_1 = r_2$  の時の  $r_1$  の値でもある  
 また、 $F_1O_{12} = (4) - (A) = n c / (m + n)$

$F_2O_{12} = c - F_1O_{12} = m c / (m + n)$

$\therefore F_1O_{12} : F_2O_{12} = n : m$

**左離心率**  $e_L = O_{12}F_1 / O_{12}V_2 = n / k$

**右離心率**  $e_R = O_{12}F_2 / O_{12}V_1 = m / k$

この離心率と大きさの尺度  $c$  を定めると、卵形線は、一意的に決まる。

さて、同様に、外分枝  $m r_1 - n r_2 = k c$  について  
 $V_3V_4/2$  つまり、**外分枝の内接円の半径**は、  
 $O_{21}V_3 = k c / (m - n)$  である。

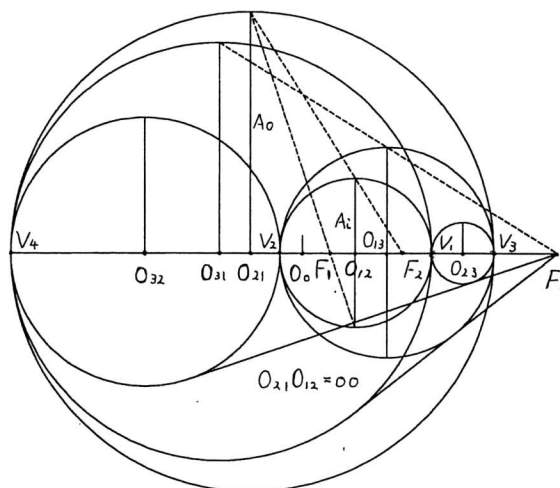


図3 3つの焦点と6つの補助円

また、 $F_3$  に関しては、図3におけるように  
 円  $O_{31}$  と円  $O_{13}$  の相似中心の位置にあり、これから、  
 根気強い計算により

$O_0F_3 = k^2 c / (m^2 - n^2)$  が導出される。

さらに、等距離円<sup>2)</sup> (卵形線の内分枝と外分枝から等距離にある点の集まりである円 (3つある)) の中心  $O_0$  ( $O_{12}O_{21}$  の中点) から  $F_1, F_2, F_3$  までの距離

について

$$n^2 c / (m^2 - n^2) : m^2 c / (m^2 - n^2) : k^2 c / (m^2 - n^2) = n^2 : m^2 : k^2$$

は、記憶しやすい。

### 5. 卵形線の原点と作画法

関数グラフィックソフトで卵形線の図を書くときに、原点として、双極の一点（焦点、 $S_1$  or  $F_1$ ）を取ることが多い。

例えば、原点を  $F_1$  としたときの極座標による卵形線の定義は、(1) の双極を極座標に直すことにより、

$$r_1 = c(km - n^2 \cos(s) - n(n^2 \cos^2(s) - 2km \cos(s) + k^2 + m^2 - n^2)^{1/2}) / (m^2 - n^2) \dots (6)$$

この時、 $c, k, m, n$  を定めると、図4が作画できる。また(2)式では、原点を  $F_2$  として考えるとよい。

次に、二つの補助円の半径( $A_0, A_i$ )と中心(内分枝  $O_{12}$ , 外分枝  $O_{21}$ )間距離( $oo$ )から、図5のように作画できる。

さらに、右離心率と左離心率と双極間距離  $c$  より、卵形線を図6のように作画した。これには、(6)式の分母分子を  $k^2$  で割ってできる離心率の式を用いた。

なお、 $A_0, A_i, oo$  と  $e_R, e_L, c$  とは、相互変換できる。

以上の卵形線の作画法を表1のような Maple V のプログラムで作成した。

```
[> #Rishinritu ER EL yori Oval wo egaku
[> with(plottools):
[> #input[1] and henkan
[> k:=7:m:=4:n:=3:c:=10:
[> ao:=k*c/(m-n);
[> ai:=k*c/(m+n);
[> oo:=2*m*n*c/(m^2-n^2);
[> er:=m/k; el:=n/k;
[> #input[2] and henkan
[> #ao:=200 :ai:=80 :oo:=60:
[> #c:=2*oo*ao*ai/(ao*ao-ai*ai);
[> #er:=oo/(ao-ai);
[> #el:=oo/(ao+ai);
[> #input[3] and henkan
[> #er:=9/10: el:=6/10: c:=10:
[> #oo:=2*er*el*c/(er*er-el*el);
[> #ao:=c/(er-el);
[> #ai:=c/(er+el);
[> #mr1±nr2=kc -- Origin First Forcus Point
[> r1in:=c*(er-(el^2)*cos(s)-el*((el^2)*(cos(s)^2)
-2*er*cos(s)+1+er^2-el^2)^(1/2))/(er^2-el^2);
[> r1out:=c*(er-(el^2)*cos(s)+el*((el^2)*(cos(s)^2)
-2*er*cos(s)+1+er^2-el^2)^(1/2))/(er^2-el^2);
[> #-kr2+mr3=±nR23 [R23=c(k^2-m^2)/(m^2-n^2)]
[> #±nr3+kr1=mR13 [R13=c(k^2-n^2)/(m^2-n^2)]
[> R23:=c*(1-er^2)/(er^2-el^2);
[> R13:=c*(1-el^2)/(er^2-el^2);
[> #circle([center],radius):
[> hojoen12:=circle([el*c/(er+el),0],c/(er+el));
[> hojoen21:=circle([-el*c/(er-el),0],c/(er-el));
[> hojoen23:=circle([er*R23/(1+er)+c,0],er*R23/(1+er));
[> hojoen32:=circle([-er*R23/(1-er)+c,0],er*R23/(1-er));
[> hojoen13:=circle([el*R13/(1+el),0],er*R13/(1+el));
[> hojoen31:=circle([-el*R13/(1-el),0],er*R13/(1-el));
[> hl:=line([-el*c/(er-el)-c/(er-el),0],[R13,0]);
[> F1:=point([0,0],color=blue);
[> F2:=point([c,0],color=blue);
[> F3:=point([R13,0],color=blue);
[> ovalin:=plot([r1in*cos(s),r1in*sin(s),s=0..2*Pi]);
[> ovalout:=plot([r1out*cos(s),r1out*sin(s),s=0..2*Pi]);
[> plots[display]([F1,F2,F3,hl,hojoen12,hojoen21,hojoen23,
hojoen32,hojoen13,hojoen31,ovalin,ovalout]);
[>
```

表1 Maple V プログラム リスト

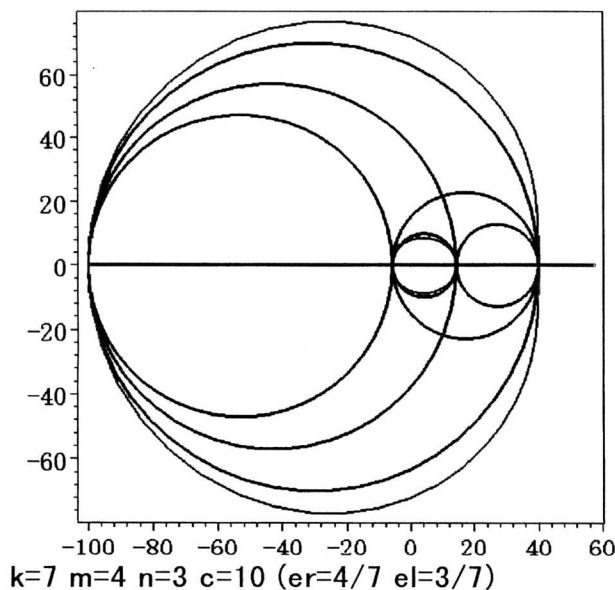


図4  $e_R + e_L = 1$  の卵形線 ( $k, m, n, c$ ) より作画

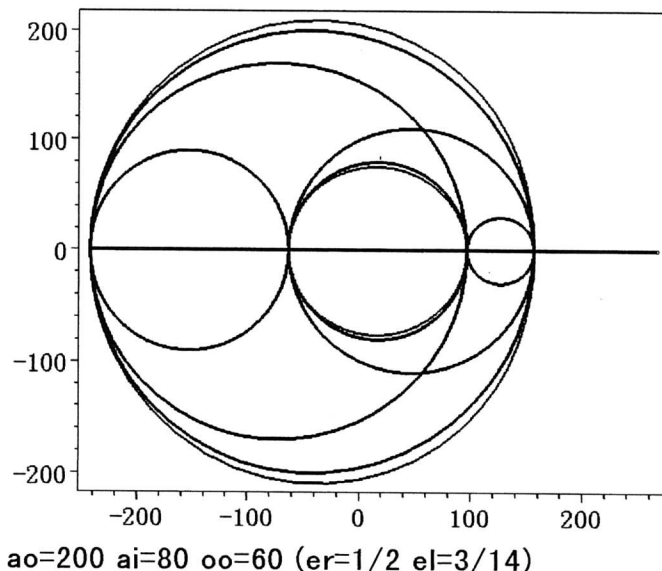


図5 2つの補助円より作画

補助円を2個  
1221=2

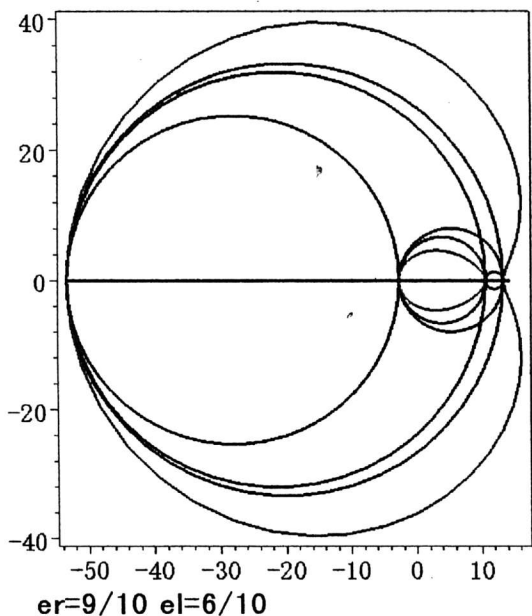


図6 左右離心率より作画

6. 頂点の曲率半径と卵形線の外分枝の凹凸

頂点の曲率半径は、拙論2)にあるように、内分枝においては、軸上頂点を $V_1, V_2$ , 片方の軸上にない頂点を $V_3$ とし、それぞれの曲率中心を $C_1, C_2, C_3$ とすると、

$$C_1V_1 = (k-m)(k+n)c / ((m+n)(k-m+n))$$

の極小値(最小値)から増加し

$$C_3V_3 = (m(k^2-n^2)^{1/2} - n(k^2-m^2)^{1/2})c / (m^2 - n^2)$$

の極大値を取り

$$C_2V_2 = (k+m)(k-n)c / ((m+n)(k+m-n))$$

の極小値を取る

ここで、 $k > m > n > 0$  より すべて正

故に、内分枝は、凸である。

また、 $C_2V_2 - C_1V_1 = 2mn(m-n) / ((m+n)(k-m-n)(k+m-n)) > 0$  である。

ここで、曲率半径の式を分母 $k^2$ で割れば、離心率による表現になる。

外分枝においては、軸上頂点を $V_3, V_4$ , 対称性より片方の軸上にない頂点を $V_5$ とし、それぞれの曲率中心を $C_3, C_4, C_5$ とすると、曲率半径は

$$C_3V_3 = (k-m)(k-n)c / ((m-n)(k-m-n))$$

つまり「1」  $k-m-n > 0$  つまり  $1 - e_R - e_L > 0$  のとき次第に減少し

$$C_5V_5 = (m(k^2-n^2)^{1/2} + n(k^2-m^2)^{1/2})c / (m^2 - n^2)$$

で極小値をとり

$$C_4V_4 = (k+m)(k+n)c / ((m-n)(k+m-n))$$

で極大値を取る。つまり、全体が凸  
 「2」  $k-m-n < 0$  のとき、全体は凹になる。すなわち  
 $V_3$ と $V_5$ の間の外分枝上で曲率=0 曲率半径=負の無限大から、正の無限大にかわる場所がある。  
 曲率半径の大まかなグラフは、図7図8のようになる。

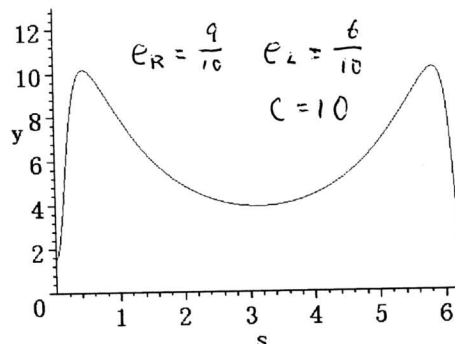
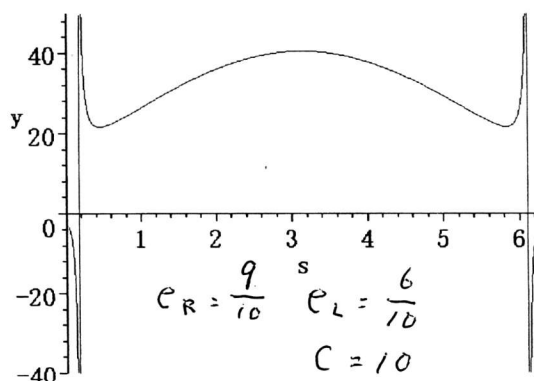
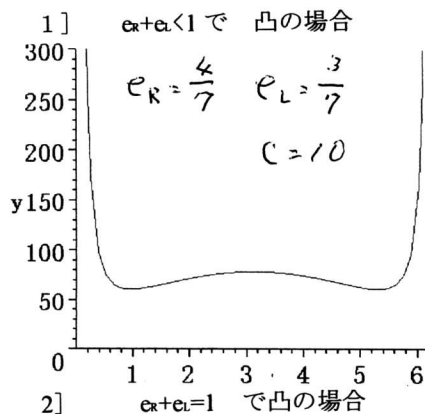
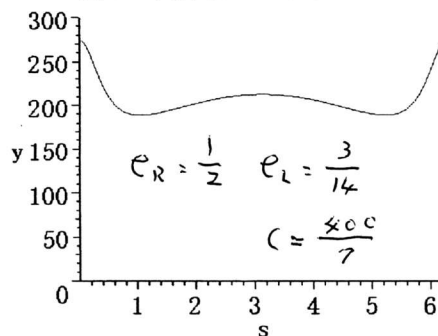


図7 内分枝の曲率半径



3]  $e_R + e_L > 1$  で凹の場合

図8 外分枝の曲率半径

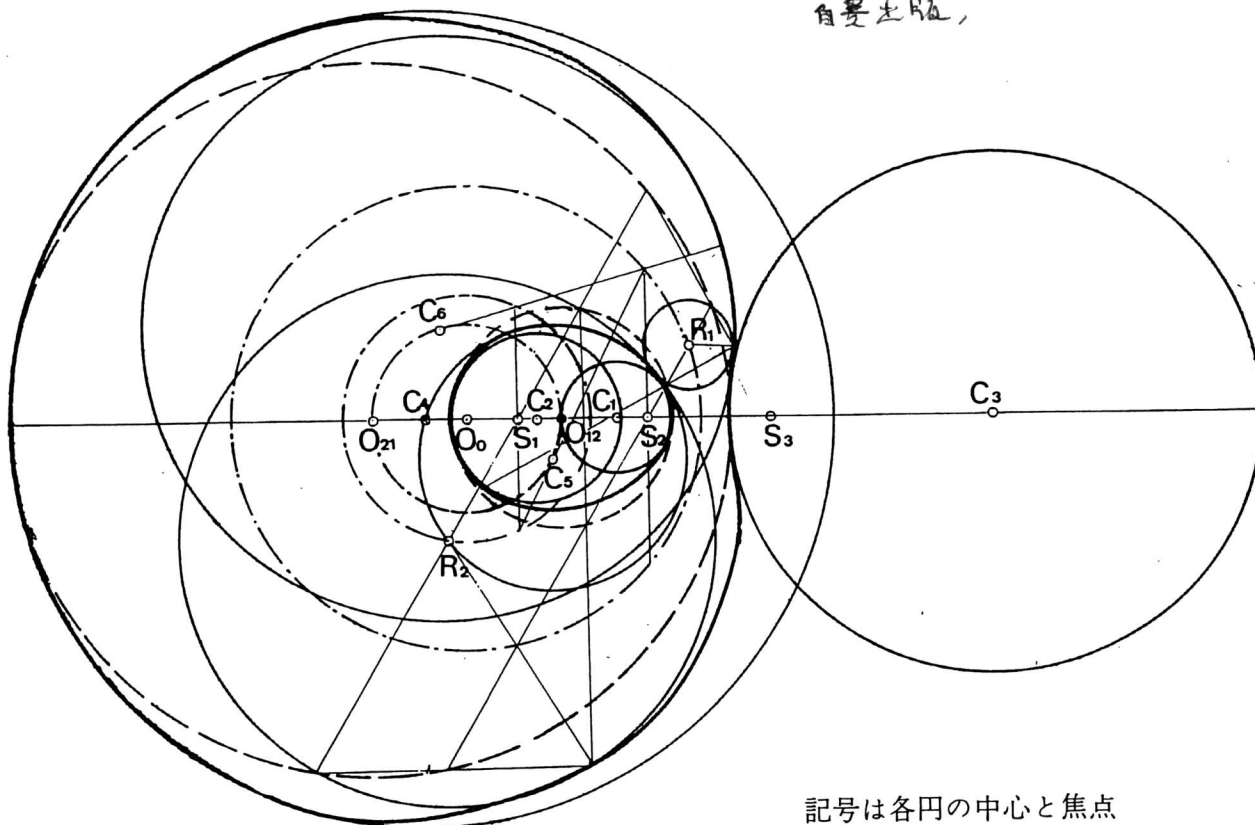
以上 頂点の曲率半径半径の文字式からその正負の符号を考え、卵形線族の凹凸を考えた。また、図8の3つの場合の卵形線を6つの補助円とともに描いたものが図4, 5, 6である。

7. 結び

以上、卵形線の円錐面による定義と任意定数  $k, m, n, c$  の意味および、主要点間距離、6つの補助円と3焦点の関係を大さっぱに見た。さらに、離心率による卵形線の作画プログラムにより、外分枝の凹凸の場合の図を描いた。さらに、その凹凸の条件の理由も述べた。ただ、ここで述べた事柄が、以前の発表文献の引用によるところが多かったことをお許し願いたい。

参考文献

- 1) 蛭子井博孝; "デカルトの卵形線の二・三の性質"; 図学会誌、図学研究、12号、1973年
- 2) 蛭子井博孝; "デカルトの卵形線の曲率円"; 図学研究、19号、1976年9月
- 3) 蛭子井博孝; "3つの反直交(卵形線)を拡張した空間4次曲面(反転曲面)"; *Proceeding of 17th ICGG (new name), 1998*
- えびすい ひろたか  
1950年生 阪大応物修了、高校数学教師、SE、論文賞(デカルトの卵形線に関する一連の研究) 主に、卵形線、卵形面、高次元黄金比などを研究  
現在 Free Email [ahib.cbisui@nifty.ne.jp](mailto:ahib.cbisui@nifty.ne.jp)  
[hibi@nifty.com](mailto:hibi@nifty.com)  
2007年7月27日 [dovaloid@morice.ocn.ne.jp](mailto:dovaloid@morice.ocn.ne.jp)
- 4) 蛭子井博孝; "学位記論文"; 自費出版、



記号は各円の中心と焦点

補 図