●研究論文

# デカルトの卵形線の内外分枝の非対称軸について

On asymmetry axes of the Oval of Descartes

蛭子井 博孝 *Hirotaka Ebisui*

**概要**

デカルトの卵形線の外分枝には対称軸（外短軸×２）と非対称軸（外長軸）の２つがあり，後者の定義は，“対称軸の中点と，そこから外分枝上のもっとも遠い点とを結ぶ線分”である．その長さは，対称軸の長さの半分を ao とし，左右離心率を $e_L$, $e_R$ とすれば，ao（１＋$e_Le_R$）$^{1/2}$である．ところで，デカルトの卵形線の極限がカルジオイドであり，その外長軸を考えることができる．また，内分枝の対称軸（内長軸×２）と非対称軸（内短軸）と外分枝の外短軸，外長軸の４つの軸の長さについて

(内短軸／内長軸)$^2$＋(外長軸／外短軸)$^2$＝２

である計量不変式が成り立つ．

**キーワード**：卵形線／外分枝／長軸／短軸／計量不変式

***Abstract***

We define the inner (+) and the outer (−) part of the Cartesian Oval as $mr_1 \pm nr_2 = kc$ on bipolar coordinates.

We can consider on Minor axis (asymmetry axis) of the inner part of the Oval, and can define Major axis (asymmetry axis) of the outer part of the Oval. This major axis is a segment which connects the middle point O of symmetry axis and the point Fp on the oval, which is at the longest distance from the point O. Then, the length of major axis is ao $(1 + e_L e_R)^{1/2}$ (where ao is a half of the length of the symmetry-axis, $e_L$, $e_R$ are left and right eccentricity of the Oval, respectively.) And, we can say that Cardioid is the special case of Cartesian Oval. In this case, $e_L$ and $e_R$ are equal to 1 and the length of the major axis is ao $2^{1/2}$.

Moreover, we have found the following Lemma.

[Lemma] Let bi be the length of Minor axis of the inner part of the Oval, let ai and ao be the half length of symmetry-axis of the inner and outer part, respectively. Let bo be the length of the Major axis of the outer part. Then, the following invariant holds. $(bi / ai)^2+(bo / ao)^2=2$

***Keywords :*** Oval / Outer part / Major axis and its length / Invariant

## １．はじめに

デカルトの卵形線は，楕円の拡張であり，その性質は，他の凸閉曲線としての卵形線[1]に比べ，はるかに様々な，古典幾何学的性質を持っている。その中で，楕円の短軸に相当する概念を見つけ以前報告[2]してきた。そのとき，デカルトの卵形線がいわゆる凸の卵形線となる内分枝に話を限って考察した。しかし，デカルトの卵形線は，ｘｙ座標系では，４次曲線であり，二重の閉曲線であり，その内分枝，外分枝を合わせたものとしての性質もあり，今回は，その外分枝にも短軸に相当する概念を定義し，その性質を考察した。また，外分枝は，特別の場合に，カルジオイドという曲線になる。この特殊例についても，若干の考察を行った。最後に，この卵形線という４次曲線の内分枝と外分枝の両方の軸の長さに関する計量的な不変式を見いだしたのでここに報告する。

## ２．外分枝の定義

卵形線の外分枝の定義は，拙論２）の内分枝の定義と同様のものであると言えるが，再度，外分枝のみに着目して以下に述べる。

**「外分枝の定義１」**

図１のように，『定円と定点（定円内）からの距離の比が一定な曲線で，定円外にある閉曲線』をいう。ここで，定円からの距離とは，１点と円周上の点とを結ぶ，定円から最短の距離をいう。このとき，一点から定円までの距離である線分は，定円の法線上（中心線上）にある。

**「外分枝の定義２」**

双極座標では，次の式で表される。

$$mr_1 - nr_2 = kc \quad (k>m>n>0) \tag{1}$$

ここで，$r_1$，$r_2$は，２つの極から曲線上までの距離で，ｃは，双極間の距離である。

**「外分枝の定義３」**

図２のように『定円Ｏの１つの半径上に２定点をと

る．その2定点（$F_1$，$F_2$）を通る互いに平行な直線$l_1$，$l_2$と円周との交点をM, M', N, N'とする．ここで，直線MNの延長上に$ON \parallel F_1Q$となる点Qをとる．（このとき，パップスの定理より，$OM \parallel F_2Q$である．）つぎに，直線$l_1$，$l_2$を$F_1$，$F_2$を中心に回転させ，同様な作図より，Qの点列を求めると，それは，デカルトの卵形線の外分枝を描く．』

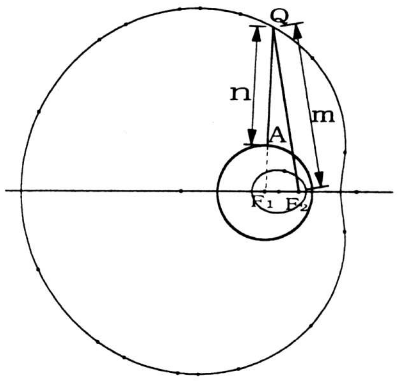



図1　定義1

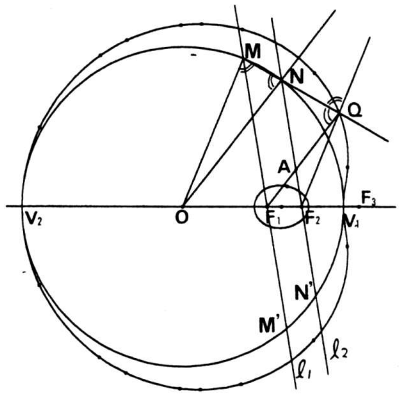



図2　定義3

**「定義1が定義2と同値であることの証明」**

定義1より，$F_1A+AQ=QF_1$，よって，$R+(n/m)r_2=r_1$

$mr_1-nr_2=mR=kc$となる．$R=(kc)/m$とおけばよい．

**「定義3が定義2と同値であることの証明」**

図2において，$F_1F_2=c$, $OF_1:OF_2=n:m$とすると，任意定数kを含むので$m \neq n$のとき

$ON=OM=kc/(m-n)$とおける．すると，△OMNは，二等辺三角形であり$ON \parallel F_1Q$と，$OM \parallel F_2Q$より$F_1Q$と$F_2N$の交点をAとすると△$AQF_2$のQにおける外角の二等分線が，QNである．

よって，$F_2Q:QA = F_2N:NA = OF_2:OF_1=m:n$

$$\therefore QA=(n/m)\ F_2Q \quad (2)$$

また$F_1A = ON(m-n)/m = kc/m$　(3)

$F_1Q = r_1$，$F_2Q = r_2$. . . (4)とすると

$F_1Q - QA = F_1A$および(2), (3), (4)より

$r_1-(n/m)r_2=kc/m \quad \therefore mr_1-nr_2=kc$

さて，円Oの外部に点Qがあり，外分枝は，直線$F_1F_2$に関して対称であることも明らかである．さらに，外分枝は，円Oと直線$F_1F_2$の交点$V_1$，$V_2$で円Oと接することも，$l_1$，$l_2$が直線$F_1F_2$と重なるように動くことからも明らかである．逆に，円Oは，卵形線の外分枝の内接円である．

さて，円Oの半径$OM=kc/(m-n)$とおけることから，この長さで外分枝を規格化する，デカルトの卵形線の外分枝族は，図3のようになる．ここで，円Oに対して，

$OF_1/OV_1=(cn/(m-n))/(kc/(m-n))=n/k=e_L<1$

同様にして$OF_2/OV_1=m/k=e_R<1$となり，内分枝の場合と同様，$e_L$，$e_R$が外分枝における左離心率，右離心率である．図3のカッコ内数値は，($e_L$，$e_R$)である．

さて，対称軸の線分$V_1V_2$を卵形線の外分枝の外短軸と呼ぶことにする．これは，内分枝の長軸に相当する．

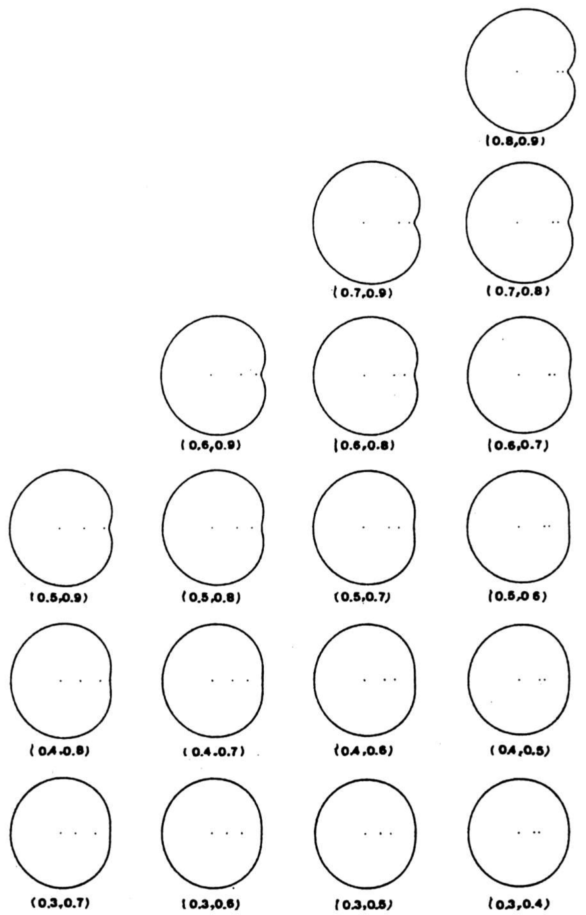



図3　外分枝のいろいろ

## 3．外分枝の長軸

### 3-1．外分枝の長軸の定義

2節で外分枝の外短軸が分かった．そこで，外分枝に内分枝の短軸と同様の概念を定義する．図4のように『卵形線の外分枝の長軸は，その対称軸の中点と外分枝上の点Qを結ぶ線分の内最も長いもの』と定義する．

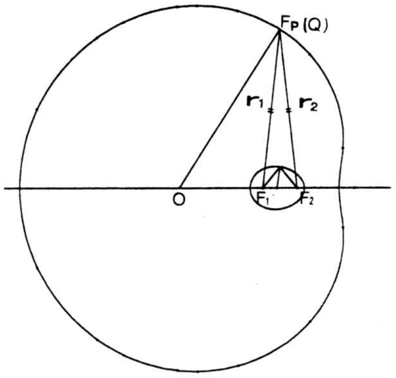



図4　長軸（外長軸）の定義

### 3-2．外分枝の長軸の位置とその導出

外分枝が，$mr_1 - nr_2 = kc$ で定義されているとき，図4におけるように，対称軸をx軸，その中点を原点O（0, 0），外分枝上の点をQ（X, Y）とする．$\angle QF_1F_2 = \theta$ とすると，$OF_1 = nc/(m-n)$ より，余弦定理を用いて

$$X^2 + Y^2 = r_1^2 + (nc/(m-n))^2 - 2r_1(nc/(m-n))\cos(\pi-\theta) \qquad (5)$$

また，$\triangle QF_1F_2$ において，余弦定理より，

$$r_2^2 = r_1^2 + c^2 - 2r_1c\cos\theta \qquad (6)$$

(1)，(5)，(6)式より，$r_2$，$\theta$ を消去すると

$$OQ^2 = X^2 + Y^2 = -m/n(r_1 - kc/(m-n))^2 + (k^2 + mn)c^2/(m-n)^2$$

OQは，上式が，$r_1$ の2次式より，$r_1 = kc/(m-n)$ のとき，最大値 $\sqrt{((k^2+mn)\ c^2/(m-n)^2)}$ をとる．これは，前節の円OのOM ＝ ao ＝ $kc/(m-n)$ と $e_L$，$e_R$ を用いて表せば，bo ＝ $ao\sqrt{(1+e_L e_R)}$ となる．ところで，$ao = kc/(m-n)$ は，外分枝の定義式 $mr_1 - nr_2 = kc$ において $r_1 = r_2$ のときの $r_1 = kc/(m-n)$ と一致する．

ゆえに，『卵形線の外分枝の長軸（外長軸と呼ぶことにする．）は，焦点 $F_1$，$F_2$ から等距離にある卵形線上の点（遠点FPと呼ぶ）と，対称軸の中心を結ぶ線分である．その長さは，bo ＝ $ao\sqrt{(1+e_L e_R)}$ である．』

### 3-3．外分枝の外長軸の性質

ここでは，の卵形線の内分枝の短軸の性質[2]と同様の性質について，その性質と図のみを列記する．なお，前節から明らかに，外長軸は，非対称軸である．

**性質**［1］卵形線の外分枝の外長軸は，遠点（$F_P$）における卵形線の法線上にある．図5－1は，一般の位置の法線の作図法[3]，図5－2は，外長軸の位置と法線である．

**性質**［2］外長軸上の端点（遠点）は，微分幾何学上の頂点ではない．つまり，頂点の定義3による作図法は，図6のようになる．すなわち，直線 $l_1$ と $F_1F_2$ が垂直で $\cos\theta = m/k$ の時である．なお，頂点での接線は，第3焦点を通る．証明は，拙論[4]参照．

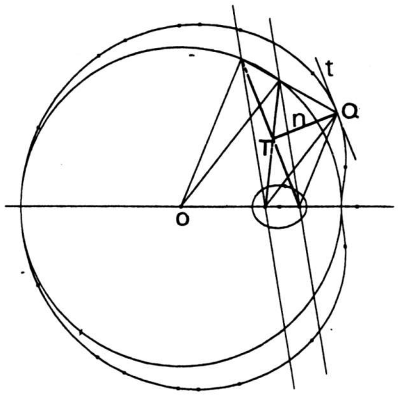



図5－1　外分枝の法線

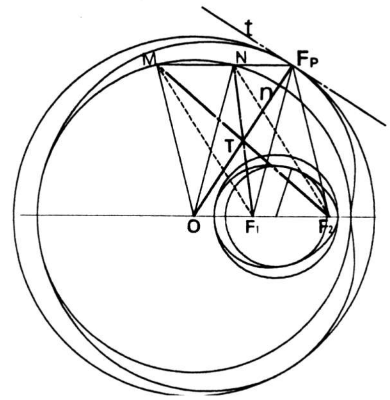



図5－2　外長軸は法線

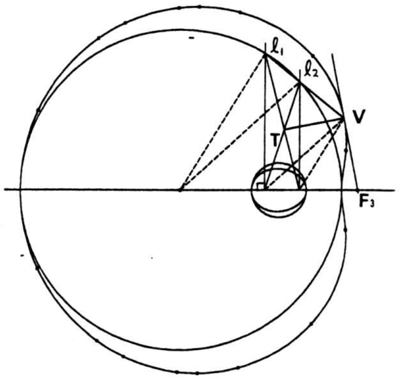



図6　外分枝の頂点

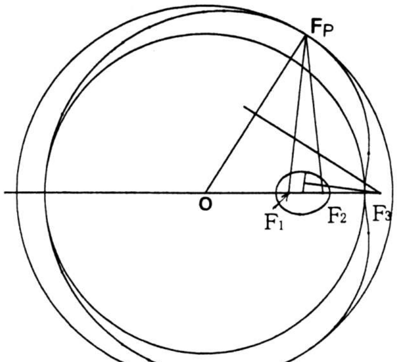



図７　同心円間の外分枝

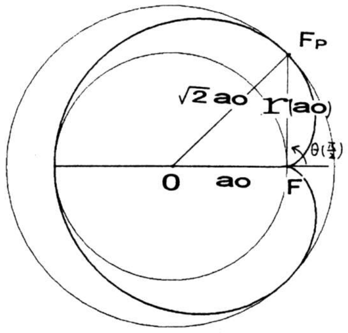



図８　カルジオイドの外長軸

**性質［３］** 図７のように，外分枝は，その内接補助円と外接補助円の２つの同心円の間の空間に存在する．

**性質［４］** 内短軸の場合[5]と同様に，図７のように，外長軸の垂直二等分線は，第３焦点を通る．

### ３－４．卵形線の外分枝としてのカルジオイドの外長軸

カルジオイド[6]は，古くから心臓形として知られている．その式は，図８のように，極座標の原点，始線をとると，$r = ao(1 - \cos\theta)$ (7)
で表される．

ところで，デカルトの卵形線の外分枝の極座標表示は，

$$r = c\{km - n^2\cos\theta + n\sqrt{(n^2\cos^2\theta - 2km\cos\theta + k^2 + m^2 - n^2)}\}/(m^2 - n^2). . . \quad (8)$$

ここで，$ao = kc/(m-n)$ であり，$n/k = e_L$, $m/k = e_R$ を１に近づける操作をすると，

$$r = \{1 - (n/k)^2\cos\theta + (n/k)\sqrt{(((n/k)\cos\theta)^2 - 2(m/k)\cos\theta + 1 + (m/k)^2 - (n/k)^2)}\} \cdot kc/(m-n) \cdot 1/((m/k)+(n/k))$$

より，この式は，(7)式に一致する．

さて，$ao = kc/(m-n)$，$e_L$，$e_R \to 1$ のとき，３－２節における外分枝の外長軸の長さは，

$bo = ao\sqrt{(1 + e_L e_R)} \to \sqrt{2}\,ao$ となる．

つまり，外分枝の内接補助円の$\sqrt{2}$倍が，外接補助円の半径になるのである．

これは，(7)における $\theta = \pi/2$ のとき，$r = ao$ で図８のようにカルジオイドの対称軸の中点からの距離が最も長い長さが$\sqrt{2}\,ao$ になることを意味している．

このように，外分枝の長軸の長さは，$e_L = 1$,　$e_R = 1$ の極限のとき，最大でも対称軸の長さの$\sqrt{2}$倍であることを意味している．

## ４．卵形線の内分枝の短軸（内短軸）と外分枝の長軸（外長軸）の関係

デカルトの卵形線は，２節の定義１で表されるとき，円内と円外に同じ比をもつ内分枝と外分枝が，描ける．つまり，定義２では，$mr_1 \pm nr_2 = kc$ となり，±の符号をもつ２つの式で表されることになる．

この内分枝と外分枝の関係は，小論[7]における作図法『任意の２つの円 $O_{12}$，円 $O_{21}$ が補助円として与えられているとき，この卵形線を描くこと．』における図９－１のような関係をもつ．つまり，内分枝の外接円としての円 $O_{12}$ と外分枝の内接円としての円 $O_{21}$ があるとき，その２つの相似中心が，$F_1$，$F_2$ である．ここで，円 $O_{12}$ は，円 $O_{21}$ に含まれる．その時，$F_1$，$F_2$ と円 $O_{12}$ に定義３を適用し，$F_1$，$F_2$ と円 $O_{21}$ に定義３を適用しても，内，外分枝が得られる．また，図９は，内分枝の内接円（内短軸補助円）と外分枝の外接円（外長軸補助円）を描いている．この４つの円の半径は，内分枝の短軸と長軸の関係，外分枝の短軸（外対称軸）と長軸（外長軸）の関係より，短い順に次の４つである．

$ai\sqrt{(1 - e_L e_R)} = bi$, $ai$, $ao$, $ao\sqrt{(1 + e_L e_R)} = bo$

となる．

ここで，$(bi/ai)^2 = 1 - e_L e_R$

$(bo/ao)^2 = 1 + e_L e_R$ より

**「定理」$(bi/ai)^2 + (bo/ao)^2 = 2$**

が成立する．ただし，$0 < bi < ai$, $ao < bo < \sqrt{2}\,ao$.

これは，二重閉曲線である卵形線の内接または，外接する４つの円の半径に関する式であり，式は，離心率というパラメータを含んでなく，その離心率よらないデカルトの卵形線族全体に共通の性質である．それ故，この式を，デカルトの卵形線の内外分枝の存在範囲の計量的不変式ということができる．

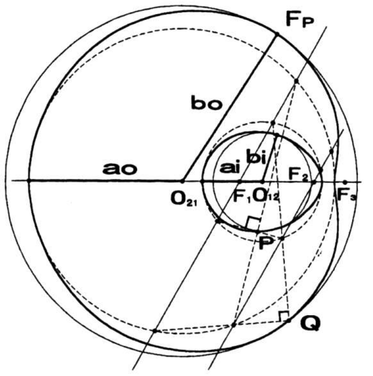



図９－１　２円による卵形線(内包)

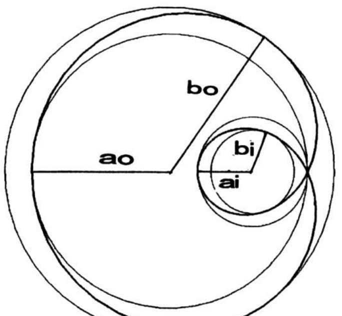



図９－２　(内接)

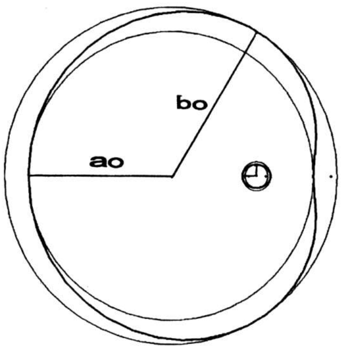



図９－３　(内円が点に近い時)

## ５．むすび

これまでに見てきたように，デカルトの卵形線には，外分枝があり，その非対称軸である外長軸について，３節のような様々な性質が，分かってきた．さらに，デカルトの卵形線という４次曲線『$mr_1 \pm nr_2 = kc$ をｘｙ座標に直すと $[m^2(x^2+y^2)+n^2\{(x-c)^2+y^2\}-k^2c^2]^2=4m^2n^2\{(x-c)^2+y^2\}(x^2+y^2)$』は，内分枝と外分枝があり，その曲線の存在範囲が，任意定数のパラメータ k, m, n, c（$k > m > n > 0$）の値に関わらず，軸の長さについて，

**(内短軸／内対称軸)$^2$＋（外長軸／外対称軸)$^2$＝１／２**

という，古典幾何の計量的不変な性質をもつことが分かった．

さらに，内短軸と外長軸の性質について，その軸の交点は，何を意味するのか，内分枝の外接円と外分枝の内接円，つまり，２つの補助円から卵形線は，作図（定義）できるが，内分枝の内接円（内短軸を半径とする円）と外分枝の外接円（外長軸を半径とする円）の２つの補助円から卵形線を定義する方法はないのか等，これから内，外分枝の間の性質を調べる必要がある．これは，楕円にはない，４次曲線としての卵形線固有の幾何学的性質だからである．

**参考文献**

［１］　蛭子井博孝：Basic と CAD による卵形線の幾何学．1997年度大会（東京）学術講演論文集，(1997)．
［２］　蛭子井博孝：デカルトの卵形線の短軸および卵形面．図学研究，68，p. 3－p. 8，(1995)．
［３］　蛭子井博孝：デカルトの卵形線の性質に関する考察―その幾何学的構図―．図学研究，49，p. 13，(1990)．
［４］　蛭子井博孝：デカルトの卵形線の曲率円．図学研究，19，(1976)．
［５］　蛭子井博孝：デカルトの卵形線の短軸に関する一定理．図学研究，70，p. 13－p. 15，(1995)．
［６］　ロックウッド：カーブ．みすず書房，(1964)．
［７］　蛭子井博孝：デカルトの卵形線の二，三の定理．図学研究，12，p. 39－p. 40，(1973)．

●1999年９月16日受付

**えびすい　ひろたか**
阪大　応用物理修了後　高校数学教師　SE
現在　卵形線，卵形面研究中
論文賞（デカルトの卵形線の一連の研究）
古典幾何，CAD，Maple V に興味
E-mail hirotaka.ebisui@nifty.ne.jp
現在 dovaloid@movie.ocn.ne.jp

# 卵形線の構図を膨らませた反転４次曲面

Inversion-4th order surface bulged the composition of the oval

蛭子井博孝　(Hirotaka　EBISUI)

**要約**：卵形線の空間への拡張として、平面図形内の線分を平面に垂直に円でふくらませることを考えた。その具体例として、トーラスもあるが、ここでは、卵形線の構図の中の線分をふくらませた。そして、その媒介表示式から、擬似トーラス、自己交差曲面、２重閉曲面の画描を行った。これらの曲面族が、４次曲面であることを確かめた。さらに、それらの線分膨らみ曲面が、反転中心を持つことが解った。

**キィワード：空間幾何；線分膨らみ曲面/　４次曲面/　擬似トーラス/ 自己交差曲面/ ２重閉曲面/ 反転**

Abstract: Recently, according to the advancement of functional graphic software programs, we can draw beautiful graphics with mathematical structure. This paper reports 4th order sufaces those are constructed bulging segments on a plane with the circle. When we use a plane-composition of the oval to bulge segments, the surfaces are named as Pseudotorus, Self-crossing surface, and Double closed surface. These surfaces are 4th order surface and have a center of inversion. We show the graphics of them defined by parametric equations. These graphics will make clear their structures and help the research of 4th order surface, I hope.

Keywords: 3D-Geometry : Segment-Bulged Surface/ 4th order surface/ Pseudotorus/ Self-crossing surface/ Double closed surface/ Inversion.

## １．はじめに

曲面の歴史は古い。しかし、その画描の歴史は、ここ２０年ぐらいの関数グラフィックの歴史と言ってもいいだろう。この中で、代数実４次曲面が画描されたのは，Ｄｕｐｉｎのサイクライデが初めてではないだろうか。その定義方法の一つに、”サイクライデとは、与えられた平面に中心を持ち、与えられた２つの球に接する動球の包絡面である”(Chandru. etc, 1989)。この曲面は、４次曲面である。そして、その式は、

$$(x^2+y^2+z^2-m^2+b^2)^2=4(ax-cm)^2+4b^2y^2$$

$$(x^2+y^2+z^2-m^2-b^2)^2=4(ax-cm)^2+4b^2z^2$$

である。

さて、この拙論の膨らみ曲面は、サイクライデとは違い、平面図形にある線分を円で空間にふくらませるのである。ここで述べる卵形膨らみ曲面は、やはり、４次曲面になるが、係数が違い、サイクライデとは、異なった族であり、それは、5節の式と上の式を比較したら解る。

さて、この曲面は、反転中心を持っている。その一つは、擬似トーラスであり、もう一つは、自己交差曲面である。さらに、卵形面を内包する２重閉曲面である。これらの曲面の基本平面図形とその媒介変数表示の導出と４次式および性質の１つをここで述べる。実四次曲面の初等的分類は、サイクライデや卵形膨らみ曲面やさらなる４次曲面の発見を待たねばならないと思うが、平面四次曲線である卵形線から空間に拡張した３つの曲面族の初等的構造とそのＣＧを味わっていただきたい。

## 2．線分ふくらみ曲面

１点Ｆを原点とし、平面上をまわる動径１上に、２点、Ｐ，Ｑがある時、線分ＰＱの中点を中心、ＰＱの長さを直径とする円板を平面上に垂直に立てて、動径を動かすときに出来る立体の表面は、ある曲面である。図１のように、こうして出来る曲面を線分ふくらみ曲面と言うことにする。明らかに、動径上に固定された一定の長さの線分から得られるふくらみ曲面は、トーラスであり、また、ＰＱの中点がＦで、ＰＱの長さが不変の時、ＰＱを直径とする球面が出来る。

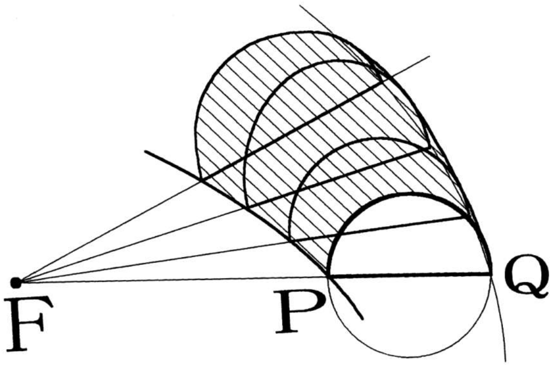



図１　線分ふくらみ曲面

## 3．卵形線を描く動径と線分の関係

ここでは、前節の線分ＰＱを卵形線の図形の中に選ぶ準備をする。そのため、卵形線の定義から始める。

楕円を拡張した卵形線は、１点と定円からの距離の比が一定な曲線として定義できる。しかし、ここでは、２定円より定まる卵形線の内外分枝を定義する図を考える。その図のなかに、動径と線分を定め、その動きにより、空間曲面を定義する。

### 3．1　　卵形線の定義（作図法）

**［作図法］**　楕円を拡張した卵形線は、一方を内包する２つの円を定めることにより一意的に定義できる。図２において、２円が中心$O_{12}$，$O_{21}$をもつものとして与えられているとする。その２円の相似中心を，$F_1$，$F_2$とする。$F_1$，$F_2$を通り、互いに平行な直線を、$l_1$，$l_2$とする。　$l_1$，$l_2$と円 $O_{12}$ の交点をそれぞれ、$M_1$，$M_1'$；$N_1$，$N_1'$とし円$O_{21}$との交点をそれぞれ、$M_2$，$M_2'$；$N_2$，$N_2'$とする。　　円$O_{12}$の半径$O_{12}M_1$，$O_{12}N_1$の２直線にそれぞれ平行な，$F_2$，$F_1$を通る直線$F_2P$，$F_1P$の交点をＰとする。図２の一部を抽出した図、図 (a) のように、Ｐはなる。同様に、図２の（ｂ）のＱを求める。このとき、Ｐ，Ｑは、$l_1$，$l_2$が、$F_1$，$F_2$を回転中心に一回転すると、卵形線の内分枝と外分枝を描く。

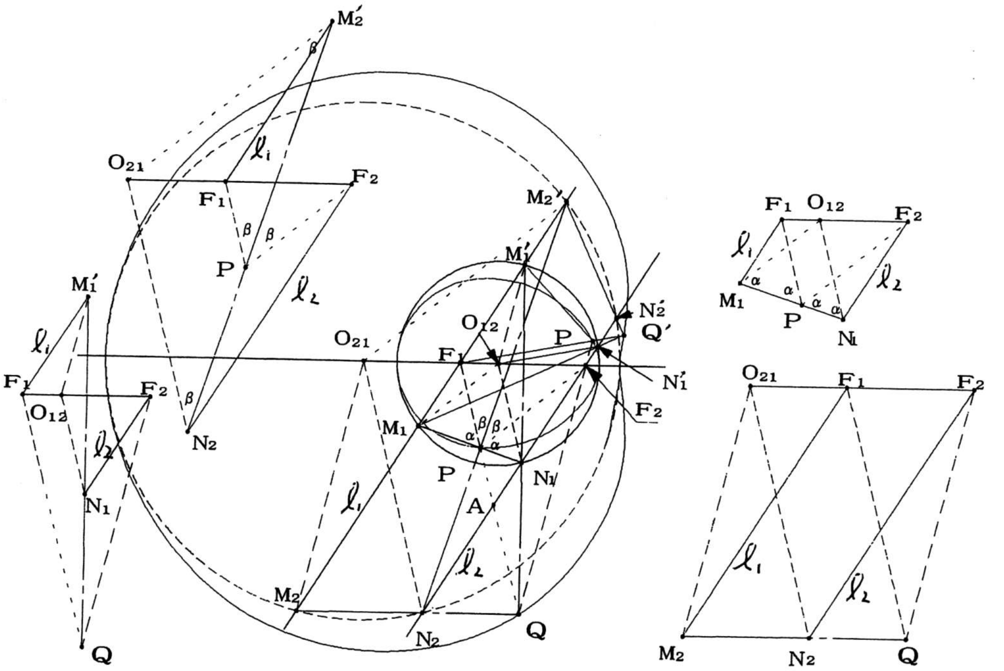



図２　２円より定義した卵形線とその補助円

### 3．2　　作図補助線の持つ性質1

**性質［1］**

パップスの定理より、$M_1$, $P$、$N_1$は共線であり、$M_2$, $N_2$, $Q$も共線である。

**性質［2］**

直線$M_1N_1$と$M_2'N_2$は、点Pで直交する。なぜなら、

$2(\alpha+\beta)=180^\circ$ より　$\alpha+\beta=90^\circ$

直線$M_2N_2$と$M_1'N_1$もQで直交する。

**性質［3］**

3点$F_1$, $P$, $Q$は、共線である。∵　$F_2$が相似中心より、$O_{12}N_1 /\!/ O_{21}N_2$、

条件より、$O_{12}N_1 /\!/ F_1P$, $O_{21}N_2 /\!/ F_1Q$

∴$F_1P /\!/ F_1Q$　ゆえに、$F_1$, $P$, $Q$は、共線

同様に3点 $F_1$, $P'$, $Q'$も共線である。

### 3．3　　P，Qが卵形線を描くことの証明

図2において、$F_1P$と$l_2$の交点をAとすると、$F_1A /\!/ O_{12}N_1$より、円$O_{12}$の半径一定より、$F_1A$は、一定になる。つまり、Aは、$l_2$が$F_2$を中心に一回転すると、定円（中心$F_1$、半径$F_1A$）を描く。ここで、$F_2N_1:N_1A=F_2O_{12}:O_{12}F_1=m:n$とすると、また$\triangle F_2PA$において、直線$PN_1$は、$\angle F_2PA$の二等分線、　ゆえに、$PF_2:PA=F_2N_1:N_1A=F_2O_{12}:O_{12}F_1=m:n$

故に，$PF_2:PA=m:n$一定より、Pは、定円（$F_1$；$F_1A$）と点$F_2$からの距離の比が一定な点である。このとき、$J=F_1A=F_1P+PA=F_1P+(n/m)F_2P$

故に、双極（$F_1$, $F_2$）座標（$F_1P=r_1$, $F_2P=r_2$）で　$r_1+(n/m)r_2=J$　Jは定数

∴　$mr_1+nr_2=mJ$

これより　Pは、デカルトの卵形線上にある。

Qについても同様にして$mr_1-nr_2=mJ$

### 3．4　作図補助線の性質2

さて、図3は、図2を直線$F_1F_2$を対称軸に部分的に対称移動させたものである。つまり、直線$F_1PQ$と直線$F_1\tilde{P}\tilde{Q}$は、直線$F_1F_2$に関して対称である。また、図3左部分図の5つの円について、証明を行う。

**性質［4］**

4点$F_1$, $\tilde{P}$, $P'$, $F_2$は、同一円周上にある。　なぜなら、図2と図3のPと$\tilde{P}$の対称性より　$\angle F_1PF_2=\angle M_1O_{12}N_1=\angle M_1'O_{12}N_1'=\angle F_1P'F_2$

∴　$\angle F_1\tilde{P}F_2=\angle F_1P'F_2$　よって、円周角の定理より同一円周上にある。

**性質［5］**

上記の性質より、$\tilde{P}$, $P'$から2点$F_1$, $F_2$を見込む角は等しい。∴　ノート（蛭子井，1996）より図3において、直線$\tilde{P}P'$は、第三焦点F3を通る。

**性質［6］**

4点$F_1$, $\tilde{Q}$, $Q'$, $F_2$は、同一円周上にある。　∵

$\angle F_1\tilde{Q}F_2=\angle F_1QF_2=\angle M_2O_{21}N_2=\angle M_2'O_{21}N_2'=\angle F_1Q'F_2$

∴　$\angle F_1\tilde{Q}F_2=\angle F_1Q'F_2$より、円周角の定理より同一円周上にある。

**性質［7］**

［5］と同様に直線$\tilde{Q}Q'$は、第三焦点$F_3$を通る。

**性質［8］**

3点Q，$F_2$, $P'$は、共線である。

∵　図2において、$F_1$が相似中心であることより，$O_{21}M_2 /\!/ O_{12}M_1'$条件より$O_{21}M_2 /\!/ F_2Q$, $O_{12}M_1' /\!/ F_2P'$ ∴ $F_2Q /\!/ F_2P'$ ∴　Q, $F_2$, $P'$は、共線

**性質［9］**

四角形$\tilde{Q}\tilde{P}P'Q'$は、同一円周上にある。

∵　［8］の性質と，Q；$\tilde{Q}$、$P'$；$\tilde{P}'$の$F_1F_2$に関する対称性より　∴ $\angle\tilde{Q}F_2F_1=\angle P'F_2F_3$　…①

［4］の性質より、内接四角形$\tilde{P}F_1F_2P'$についての角を考え　$\angle F_1\tilde{P}P'=\angle P'F_2F_3$…②

［6］の性質より

$\angle\tilde{Q}Q'F_1=\angle\tilde{Q}F_2F_1$…③

①②③より　　$\angle F_1\tilde{P}P'=\angle\tilde{Q}Q'F_1$

∴　四角形$\tilde{Q}\tilde{P}P'Q'$の内対角の和が$180^\circ$になり、四角形は、同一円周上にある。

**性質［10］**

四角形$P'F_2F_3Q'$は、同一円周上にある

∵　［9］より、　$\angle\tilde{Q}Q'P'=\angle P'\tilde{P}F_1$

［4］より　　$\angle P'\tilde{P}F_1=\angle P'F_2F_3$

∴　$\angle\tilde{Q}Q'P'=\angle P'F_2F_3$

ゆえに、四角形$\tilde{Q}'P'F_2F_3$は、同一円周上にある。

**性質［11］**　四角形$\tilde{P}'F_1\tilde{Q}F_3$は、同一円周上にある。

∵P、$\tilde{P}$の対称性より $\angle F_1F_3\tilde{P}'=\angle\tilde{P}F_3F_1$

性質［10］より $\angle F_2F_3P'=\angle F_2Q'P'$

性質［6］より$\angle F_2Q'F_1=\angle F_1\tilde{Q}F_2$

$\tilde{Q}$、$F_2$、$\tilde{P}'$共線より$\angle F_1F_3\tilde{P}'=\angle F_1\tilde{Q}\tilde{P}'$

さて、3，1，3．4節で、P、Q、P'、Q'、P、

Q、P'、Q'、F1, F2, F3の共線共円関係を調べたが、それにより、図3の左部分図の関係が成立する。すなわち、P、P'、Q'、Qは、同一円周上にあり、Q、$F_1$, P'、$F_3$は、同一円周上にあることである。

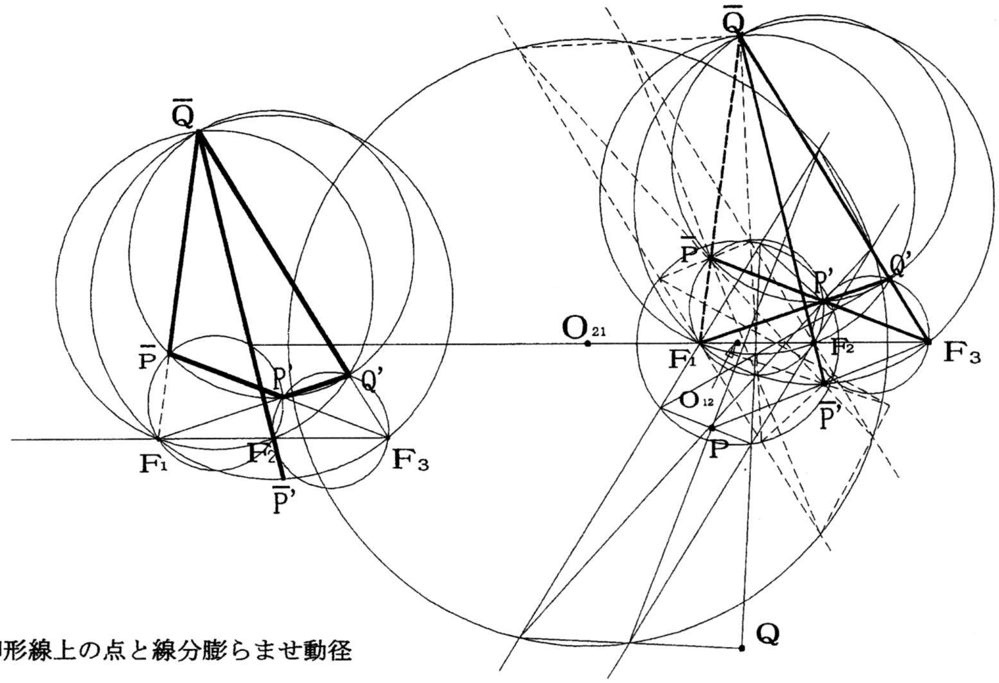



図3　卵形線上の点と線分膨らませ動径

## 4.　卵形線の構図より派生する線分膨らみ曲面

3節より、図3のような，P，Q，P'，Q'，$F_1$，$F_2$，$F_3$の共円共線関係の図形から線分膨らみ曲面を考える。

### 4．1　第一焦点$F_1$を通る動径上の線分P'Q'から派生する曲面

$F_1$を原点とし、動径$F_1$P'Q'の上の線分P'Q'の長さと位置に関して、点P'，Q'は、図4のように座標が（$r_1$，$\theta$）、（$r_1'$，$\theta$）として定まる卵形線上の点である。そして、第一焦点を通る動径上の線分P'Q'（またはPQ）より出来る曲面は、次のようになる。

$m r_1 \pm n r_2 = k c$ …①　卵形線の定義式

$r_2{}^2 = c^2 + r_1{}^2 - 2 r_1 c \cos\theta$ …②　余弦定理①②を満たす動径$r_1$，$r_1'$が作る線分（2×F1R（CP'））と、原点からその中点Cまでの距離F1Cは、

次のように求まる。①より$n^2 r_2{}^2 = (kc - m r_1)^2$

この式に②の$r_2{}^2$を代入して、$r_1$について整理すると

$$(m^2 - n^2) r_1{}^2 - 2c(km - n^2\cos\theta) r_1 + (k^2 - n^2) c^2 = 0 \cdots ③$$

③の2つの解$r_1$，$r_1'$は、2次方程式の解と係数の関係より、和と積に関して

$$F1C = (r_1 + r_1')/2$$
$$= c(km - n^2\cos\theta)/(m^2 - n^2)$$
$$r_1 r_1' = (k^2 - n^2)c^2/(m^2 - n^2)$$
$$F1R = |r_1 - r_1'|/2$$
$$= (F1C^2 - r_1 r_1')^{1/2} \cancel{1/2}$$

ここで、線分膨らみ曲面は、線分の中心が、中心C（原点からF1Cの距離）で、半径C1Rの円周上の点だから　原点　F1

$x = F1C\cos\theta - F1R\cos t\cos\theta$

$y = F1R\sin t$

$z = F1C\sin\theta - F1R\cos t\sin\theta$

これは、F1C、F1Rを上述の式を使うと、x、y、zが、tと$\theta$の媒介変数表示であることを意味する。Maple Vで（x，y，z）を図示すると、図5のようになる。擬似トーラスである。

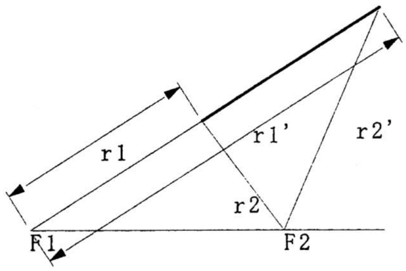



図4　動径と膨らませ線分

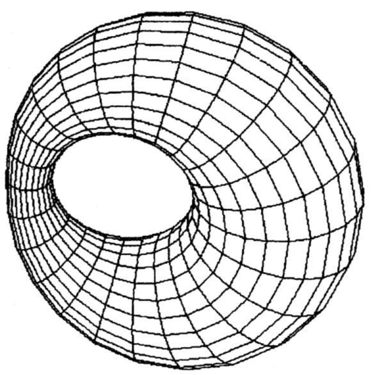


図５　擬似トーラス

**４．２　第二焦点$F_2$を通る動径上の線分ＱＰ’から派生する曲面**

点Ｑ，Ｐ’は、座標が、図６のように定まる卵形線上の点である。４．１と同様にして

$F_2P'$ は $mr_1+nr_2=kc$

$r_1^2=c^2+r_2^2-2r_2c\cos\theta$　　より

$r_1$を消去して　　$k>m>n>0$　より

$(m^2-n^2)r_2^2-2(m^2\cos\theta-kn)cr_2+(m^2-k^2)c^2=0$

この正の解を$P'r_2^+$　　…①

$F_2Q$は　$mr_1-nr_2=kc$

$r_1^2=c^2+r_2^2-2r_2c\cos\theta'$　　より

ｒ１を消去して　$\theta'=\pi-\theta$，$k>m>n>0$　より

$(m^2-n^2)r_2^2-2(-m^2\cos\theta+kn)cr_2+(m^2-k^2)c^2=0$

この正の解を$Qr_2^+$とする。

Ｑ、Ｐ’の中点Ｃに関してＦ２Ｃは、

$F2C=|Qr_2^+-P'r_2^+|/2$

$=(-m^2\cos\theta+kn)c/(m^2-n^2)$

ＱＰ’／２＝Ｆ２Ｒに関して、

$F2R=(Qr_2^++P'r_2^+)/2$

$=c((-m^2\cos\theta+kn)^2-(m^2-n^2)(m^2-k^2))^{1/2}/(m^2-n^2)$

ゆえに$F_2$，Ｑ、Ｐ’による線分膨らみ曲面は、

$x=F2C\cos\theta-F2R\cos t\cos\theta$

$y=F2R\sin t$

$z=F2C\sin\theta-F2R\cos t\sin\theta$

これを、Maple Ｖで（ｘ，ｙ，ｚ）を図示すると、図７のようになる。これは、自己交差曲面である。

内部の交差の様子を見るため、曲面の一部を省略し窓を開けている。

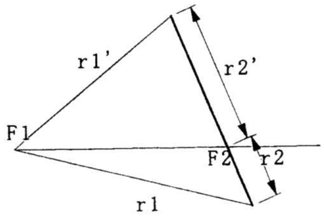



図６　動径と膨らませ線分

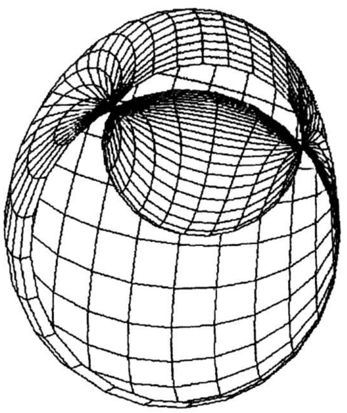


図７　自己交差曲面

**４．３　第３焦点を通る動径上の線分Ｐ’ＰおよびＱ’$\bar{Q}$から派生する曲面**

Ｐ’、$\bar{P}$に関して４．１と同様にして　図８より

$kr_1+nr_3=mc'$ …①

$r_1^2=r_3^2+c'^2-2r_3c'\cos\theta$　　…②

$c'=(k^2-n^2)c/(m^2-n^2)$

ここで、①式は文献（蛭子井，1996）を参照。

$r_1$を消去して

$r_3$の２次方程式から、４．１と同様にして

$F3C=(k^2\cos\theta-mn)c'/(k^2-n^2)$

$F3R=c'((k^2\cos\theta-mn)^2-(k^2-n^2)(k^2-m_2))^{1/2}/(k^2-n^2)$

$x = F3C\cos\theta - F3R\cos t\cos\theta$

$y = F3R\sin t$

$z = F3C\sin\theta - F3R\cos t\sin\theta$

原点　F3

上式は、$\overline{P}$、P’の内分枝についてであったが、$\overline{Q}$、Q’の外分枝については、上式でnを－nとすればよい。

さて、上式の（x、y、z）に関する $\theta$ の値は、

$k r_1 \pm n r_3 = m c'$

$r_1^2 = r_3^2 + c'^2 - 2 r_3 c' \cos\theta$

$c' = (k^2 - n^2)\,c / (m^2 - n^2)$

$r_3^2 = r_1^2 + c'^2 - 2 r_1 c' \cos\theta'$

$\theta' = c / (kc/m) = m/k$　より

$r_1$, $r_3$, $\theta'$　を消去して

$\cos\theta = (((k^2 - m^2)(k^2 - n^2))^{1/2} \pm mn) / k^2$

$\theta 1 = \cos^{-1}\{(((k^2 - m^2)(k^2 - n^2))^{1/2} \pm mn) / k^2\}$

$-\theta 1 < \theta < \theta 1$

ここで、内分枝の式は，mnで、
外分枝の式は、－mnである。

$\theta 1$は、”卵形線の頂点の接線は、第3焦点を通る”と言う性質（蛭子井, 1976）を用いた。

図9は、2重閉曲面で、中の**卵形面**を見るため、外部の曲面の一部を省略し、窓を開けている。

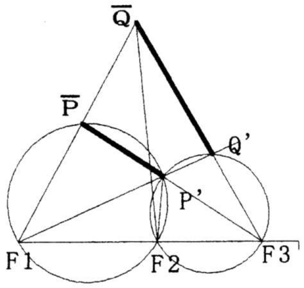
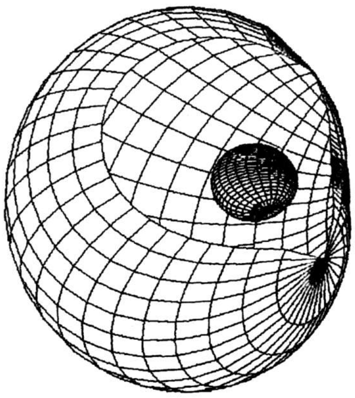



図8　　動径と膨らませ線分



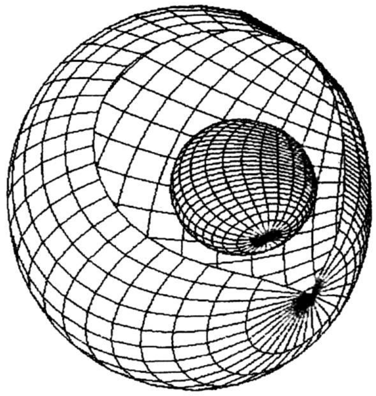


図9　2重閉曲面

## 5　卵形線膨らみ曲面の性質

### 5．1　4次曲面であること

4節は、一般に、次の形をした媒介変数表示である。

$x = C\cos\theta - R\cos t\cos\theta$

$y = R\sin t$

$z = C\sin\theta - R\cos t\sin\theta$

$R^2 = C^2 - K$

Cは $\cos\theta$ の1次式（$C = A\cos\theta + B$）、Kは定数。

$\cos\theta = X / (X^2 + Z^2)^{1/2}$

$\tan\theta = Z / X$

上式より $\theta$、tを消去すると

$(R\cos t\cos\theta)^2 + (R\cos t\sin\theta)^2 + (R\sin t)^2$

$= (C\cos\theta - X)^2 + y^2 + (C\sin\theta - Z)^2$

$R^2 = C^2 - 2C(X\cos\theta + Z\sin\theta) + X^2 + Y^2 + Z^2$

$2C(X^2 + Z^2)^{1/2} = K + X^2 + Y^2 + Z^2$

$2B(X^2 + Z^2)^{1/2} = K + X^2 - 2AX + Y^2 + Z^2$

以上より　次の四次式を得る

$4B^2(X^2 + Z^2) = (X^2 - 2AX + Y^2 + Z^2 + K)^2$

**A：擬似トーラス**　　$-n^2 c / (m^2 - n^2)$

**A：自己交差曲面**　　$-m^2 c / (m^2 - n^2)$

**A：2重閉曲面**　　$k^2 c / (m^2 - n^2)$

**B：擬似トーラス**　　$kmc / (m^2 - n^2)$

**B：自己交差曲面**　　$knc / (m^2 - n^2)$

**B：2重閉曲面**　　$\pm mnc / (m^2 - n^2)$

**K：擬似トーラス**　$(k^2 - n^2)\,c^2 / (m^2 - n^2)$

**K：自己交差曲面**　$(m^2 - k^2)\,c^2 / (m^2 - n^2)$

**K：2重閉曲面**　$(k^2 - m^2)(k^2 - n^2)\,c^2 / (m^2 - n^2)^2$

なお、$\theta$は、右回り左回りに関して$\theta' = \pi - \theta$を利用

### 5．2　卵形線膨らみ曲面は、反転の中心を持つ

一般に平面図形において図１０の方べきの定理
$r_1 r_1' = r_2 r_2' = d^2$　dは定数　を満たすとき
　Ｒ１とＲ１'は、互いに反転の関係にある。　卵形線膨らみ曲面は、対称断面が、３節の卵形線の内外分枝の構図を含み、それから派生した曲面である。
その構図は、卵形線の内外分枝と、その焦点$F_1$（$F_2$, $F_3$も同様）を通る動径との２交点は、焦点を反転の中心とする反転の関係（ロックウッド, 1964）にある。
図１１において　$F_1P \cdot F_1Q = F_1F_2 \cdot F_1F_3$で定数となるからである。また、焦点$F_1$を通る直線１と膨らみ円板の円周上の点Ｓ，Ｔについて
$F_1S \cdot F_1T = F_1P \cdot F_1Q = F_1F_2 \cdot F_1F_3 =$定数
となり　Ｓ，Ｔは、$F_1$に関して反転である。故に、４節の擬似トーラスは、$F_1$を通る任意の直線とこの曲面との交点は、反転の関係にあり反転中心$F_1$をもつ。自己交差曲面については、$F_2$が、反転中心であり、２重閉曲面は、$F_3$が反転の中心である。

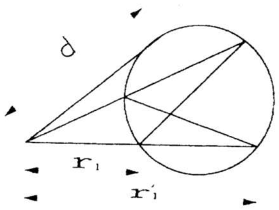



図１０　　方べきの定理

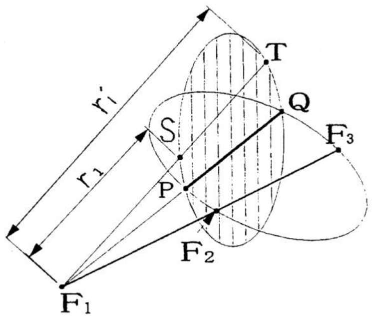



図１１　反転中心

### 6　その他の膨らみ曲面

　その他の膨らみ曲面として、平面図形の螺旋曲線上の線分を膨らます。図１２　また、２重円を動径で切断した線分を膨らませる。図１３

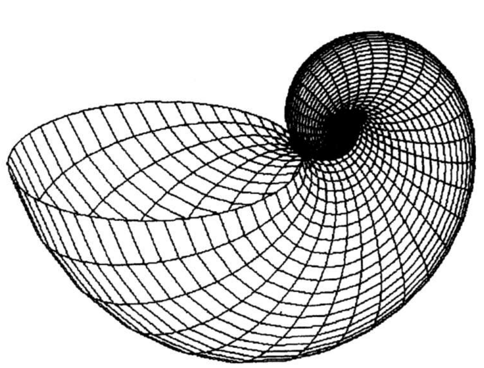


図１２　螺旋の膨らませ

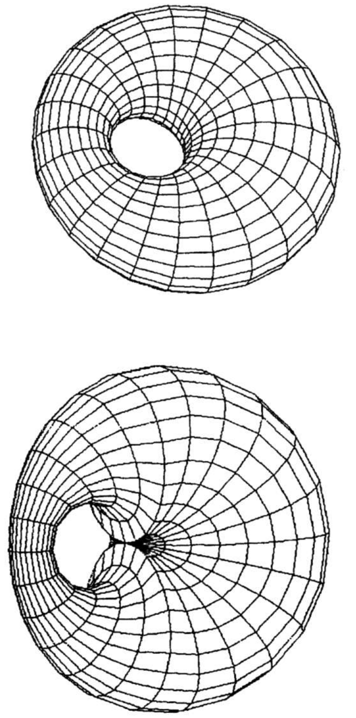


図１３　２重円の膨らませ

### 7　むすび

　以上、線分膨らみ曲面を定義し、卵形線の２つの補助円による作図法の図に適用し、擬似トーラス、自己交差曲面、２重閉曲面を得た。それらが、４次曲面であり、また、反転曲面であることが解った。さらに、３つの曲面は、それ自身、それぞれ、２つずつ対称面を持つ。
また、螺旋や２重円を膨らませた。なお、拙論（蛭子井、1995）で定義した卵形面は、この２重閉曲面の内側の膨らみ曲面である。
　ここで、この拙論が，8th ICECGDG で、発表した原稿を手直ししたものであることをご了承願いたい。

さて、これらの曲面の画描は、現代のコンピュータの発達のおかげであり、科学技術ソフトの開発者に感謝したい。また、線分膨らみ曲面は、４次曲面の研究ばかりでなく、工学の分野にも役立つ曲面だと思われる。曲面論の発展の一助となれば幸いである。

### 参考文献

[1]ロックウッド著、松井政太郎訳：カーブ．みすず書房，(1964)

[2]蛭子井博孝：デカルトの卵形線の二、三の性質．図学研究，12，p.39-p.40，(1973)

[3]蛭子井博孝：デカルトの卵形線の曲率円．図学研究，19，p.7-p.11，(1976)

[4]Chandru,V.，Dutta, D.,and Hoffmann, C. M.:On the Geometry of Dupin Cyclides, Visual Computer, Vol.5, No.5, pp.277-290 (1989)

[5]Srinivas,Y.L、Dutta, D：Cyclides in Geometric Modeling: Computational Tools for an Algorithmic Infrastructure, J of Mechanical Design, Vol.117, p.363-p.373, SEPT (1995)

[6]蛭子井博孝：デカルトの卵形線の短軸および卵形面．図学研究，68，p.3-p.8 (1995)

[7]蛭子井博孝：デカルトの卵形線の２焦点を見込む角について．図学研究，74，p.19-p.21 (1996)

```
[ > # FUKURAMI kyokumen(2000-7-14) :
[ > #mr1±nr2=kc
[ > #Rishinritu ER EL yori Oval wo egaku
[ > with(plottools):
[ > #input[1]  and henkan
[ > #k:=7:m:=4:n:=3:c:=10:
[ > #ao:=k*c/(m-n);
[ > #ai:=k*c/(m+n);
[ > #oo:=2*m*n*c/(m^2-n^2);
[ > #er:=m/k; el:=n/k;
[ > #input[2] and henkan
[ > ao:=200 :ai:=50 :oo:=100:
[ > c:=2*oo*ao*ai/(ao*ao-ai*ai);
[ > er:=oo/(ao-ai);
[ > el:=oo/(ao+ai);
[ > # input[3] and henkan
[ > #er:=9/10: el:=6/10: c:=10:
[ > #oo:=2*er*el*c/(er*er-el*el);
[ > #ao:=c/(er-el);
[ > #ai:=c/(er+el);
[ > r1c:=(er-el^2*cos(s))*c/(er^2-el^2):
[ > r1r:=sqrt(r1c^2-(1-el^2)*(c^2)/(er^2-el^2)):
[ > xt:=r1c*cos(s)-r1r*cos(t)*cos(s):
[ > yt:=r1r*sin(t):
[ > zt:=r1c*sin(s)-r1r*cos(t)*sin(s):
[ > plot3d([xt,yt,zt],t=0..2*Pi,s=0..2*Pi);
[ > ct:=plot3d([-(xt-(1-el^2)*c/(er^2-el^2)),yt,zt],t=0..2*Pi,s=0..1.5*Pi):
[ > r2c:=(el-er^2*cos(s))*c/(er^2-el^2):
[ > r2r:=sqrt(r2c^2-(er^2-1^2)*(c^2)/(er^2-el^2)):
[ > xs:=r2c*cos(s)-r2r*cos(t)*cos(s):
[ > ys:=r2r*sin(t):
[ > zs:=r2c*sin(s)-r2r*cos(t)*sin(s):
[ > plot3d([xs,ys,zs],t=0.8*Pi..2*Pi,s=0..2*Pi);
[ > plot3d([xs,ys,zs],t=0..2*Pi,s=0..1.2*Pi);
[ > cs:=plot3d([-(xs-(1^2-er^2)*c/(er^2-el^2)),ys,zs],t=0..1.2*Pi,s=0..1.2*Pi):
[ > c3:=(1^2-el^2)*c/(er^2-el^2):
[ > r3c:=(cos(s)-er*el)*c3/(1^2-el^2):
[ > r3r:=sqrt(r3c^2-(1^2-er^2)*(c3^2)/(1^2-el^2)):
[ > ss:=arccos((sqrt((1^2-er^2)*(1^2-el^2))+er*el)):
[ >
[ > xn:=r3c*cos(s)-r3r*cos(t)*cos(s):
[ > yn:=r3r*sin(t):
[ > zn:=r3c*sin(s)-r3r*cos(t)*sin(s):
[ > cgn:=plot3d([xn,yn,zn],t=0..2*Pi,s=-ss..ss):
[ > c3:=(1^2-el^2)*c/(er^2-el^2):
[ > r3cg:=(1^2*cos(s)+er*el)*c3/(1^2-el^2):
[ > r3rg:=sqrt(r3cg^2-(1^2-er^2)*(c3^2)/(1^2-el^2)):
[ > ssg:=arccos((sqrt((1^2-er^2)*(1^2-el^2))-er*el)/1^2):
[ > xg:=r3cg*cos(s)-r3rg*cos(t)*cos(s):
[ > yg:=r3rg*sin(t):
[ > zg:=r3cg*sin(s)-r3rg*cos(t)*sin(s):
[ > cg:=plot3d([xg,yg,zg],t=0..2*Pi,s=-ssg..ssg):
[ > cgw1:=plot3d([xg,yg,zg],t=0.5*Pi..2*Pi,s=-ssg..ssg):
[ > cgw2:=plot3d([xg,yg,zg],t=0.5*Pi..2*Pi,s=-ssg..0.7*ssg):
[ > plots[display3d]({cgn});
[ > plots[display3d]({cg});
[ > plots[display3d]({cgn,cgw2});
[ > plots[display3d]({cgn,cgw1});
[ > plots[display3d]({cs,ct,cgn,cgw2});
```

**えびすい ひろたか**

1950 生 阪大工学部応用物理学専攻修了後　高校数学教師、コンピュータ研究員　現在　FREE

卵形線、卵形面など、構成、数理幾何学に興味

●研究資料

# 直極点による卵形線の拡張としての多極多重曲線

Multiple, Multi−polar Curve extended from the Oval using the infinity chain of orthopole

蛭子井 博孝 *Hirotaka Ebisui*

**要旨**

楕円を拡張した卵形線には，焦点が3つあり，さらに，4つ以上焦点を持つ曲線を探していた．それは，直極点を用いた卵形線の定義と直極点の一般化（無限連鎖化）の方法を組み合わせることにより卵形線の定義を拡張したものとしてあらわせることがわかった．そうして，卵形線の焦点の多数化（多極化）ができた．そこで，この小論では，直極点の一般化（拡張）を述べ，次に，以前報告した，直極点による卵形線の定義を述べ，さらに，一般化された直極点による卵形線の拡張を考える．そして，その考えの基に，拡張された卵形線（多極曲線（愛称 chocoid））の図をコンピュータで描いた．この多極曲線は，4直線に関する直極点を用いるとき，その極は，直線上に6点あり，そのうち5点の座標で形が決まる．さらに，数例の数値例を描くと，自己交差した多重閉曲線であることがわかった．5直線に関する直極点を用いる場合も，MapleV と言う数式処理，関数グラフィックソフトで，媒介変数表示を求め，CG 化した．その性質は，まだ未知なるものが多いが，一応の形を報告する．

**キーワード：** 平面幾何／焦点／極／直極点／無限連鎖化／多極曲線／多重曲線

***Abstract***

In this paper, an extension of the Oval is shown using generalized Orthopole. This extended curve has a structure on the definition. And according to the structure, we may say that the curve has Multiplicity and Multi−foci. First, We will show the definition of the Oval using Orthopole and its three foci, and next, we will show the infinity chain of Orthopole, and more show Multi−polar structure and the definition of Multiple Multi−polar Curve . At last, we show their CGs which are ploted by Maple V.

***Keywords:*** Oval / Orthopole / Multi−polar / Focus point / Multiple Curve

## 1．はじめに

曲線を拡張一般化する方法は，数多く知られている．その中で，多極曲線は，J.C.Maxwell が，若干14歳で1846年にその書き方を見つけている[1]．しかし，それは，たとえば3極からの距離を $r_1$，$r_2$，$r_3$として，$5r_1+3r_2+2r_3=15$などで表したもので，ひもを用いた描き方は示しているが，その媒介変数表示を導くのは難しい．ところで，デカルトの卵形線は，楕円の拡張であり，一直線上に3焦点を持っている[2],[3]．この3焦点と直極点を定義する三角形の3頂点は，図形的に結びついている．また，直極点は，完全4辺形についても拡張でき，それにより，4焦点以上に多極化した曲線が定義できる．そして，下記の順に，定義より解析幾何で媒介変数表示式を求め，CG を描いた．なお，これは，第33回 JSGS 大会の発表に基づいている．

1．卵形線には，3焦点あること

1．直極点の定義の拡張（無限連鎖化）[4]

1．直極点を用いた卵形線の定義[5]

1．直極点の一般化による卵形線の定義の拡張

1．CG によるその表現

## 2．卵形線と3焦点

古くは，卵形線について，ケプラーなどが，惑星の軌道を卵形と考えていたことがある．この卵形の曲線や，カシニの卵形線，その他多くの卵形線がその式とともに知られている[6]．また，微分幾何学では，凸図形として卵形線を定義したりする．この中で，デカルトの卵形線は，”点と円からの距離の比が一定な曲線である”と定義できることを以前見つけ[3]，それが，楕円の拡張であることを示してきた．このとき，楕円には，焦点が2つあり，またその拡張である卵形線には，焦点が3つあることも知られている．その卵形線を式で定義するとき，双極座標による方法がある．このとき，同じ卵形線が，異なる3つの式で表せることを以前報告した．つまり，一直線上に，3つの固定点（焦点）$F_1$，$F_2$，$F_3$があり，

そこから卵形線上までの距離 $r_1$, $r_2$, $r_3$が，次の関係式を満たす．それは，以前報告した式[3]を少し変形した，次の３つである．

$$mr_1 \pm nr_2 = kc$$

$$-kr_2 + mr_3 = \pm n\ (k^2 - m^2)\ c/\ (m^2 - n^2)$$

$$\pm nr_3 + kr_1 = m\ (k^2 - n^2)\ c/\ (m^2 - n^2)$$

複号の＋は，内分枝，－は，外分枝を表す．

焦点間距離　$F_1F_2$の長さが c であり，$F_2F_3$の長さが $(k^2 - m^2)\ c/\ (m^2 - n^2)$ であり，$F_1F_3$の長さが $(k^2 - n^2)\ c/\ (m^2 - n^2)$ である．

また，任意定数 k，m，n は，$k>m>n>0$を満たす定数である．

たとえば，$k=10, m=9, n=6, c=10$の時，３つの式は，次の数値式となる．

$$9\,r_1 \pm 6\,r_2 = 10 \cdot 10$$

$$-10\,r_2 + 9\,r_3 = \pm 6 \cdot (38/9)$$

$$\pm 6\,r_3 + 10\,r_1 = 9 \cdot (128/9)$$

さて，この３つの式が示すように卵形線は，３極のうちどの二つの極からの距離によっても表されると言える．

故に，３極（３焦点）は，同等の役割を演じている．さて，３点 $F_1$, $F_2$, $F_3$から，$r_1$, $r_2$, $r_3$の距離にある上式（＋のみ）を満たす点は，その距離の値を少しずつ変えると，図１のような３つの同心円群とその交点を通る卵形線を描く．

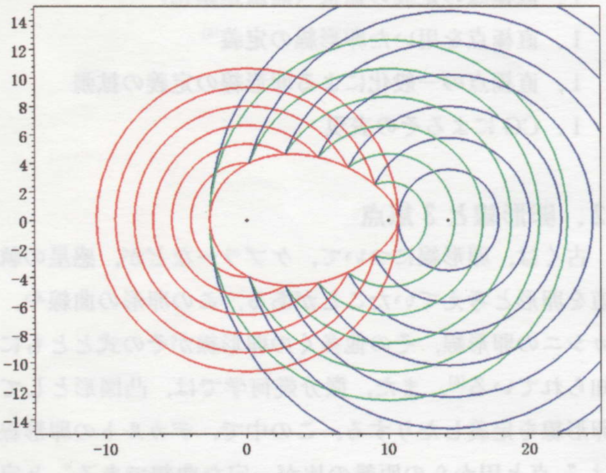


図１　３つの同心円群による卵形線

このとき，円の間隔の比は，６：９：10である．

これは，ちょうど3点 $F_1$, $F_2$, $F_3$から，６秒，９秒，10秒間隔で，それぞれ水滴が水面に落ち，水の輪が重なって出来る図形といえる．このどの２つだけからでも卵形線は描け，同等な3つの焦点があることが解る．さらに，3焦点あることの意味は，３つの軸の平行な円錐面の相貫曲線を考えると明らかになる[3]．

## ３．拡張の準備：直極点の無限連鎖化

ここでは，卵形線の拡張の手段となる直極点の無限連鎖化を考える．直極点とは，三角形と１つの直線の間に成立する簡単な定理であり，以下のように表される．そして，その拡張が，以下のように定義できる．なお，この定理の証明は，文献［７］を参照されたい．

【直極点の定理】

一本の定直線 g と一般の位置の３本の直線を与えたとき，次のように，直極点が定まる．すなわち，３本の直線の２本の交点からできる三角形 ABC の頂点から，定直線 g へ垂線を下し，その３つの垂線の足から，２本を選んだ残りの直線へ垂線をそれぞれ下すと，３本の直線ができるが，これらは，１点で交わる．図２のように，この点を△ABC に関する（または，３直線に関する）直線 g の直極点という．

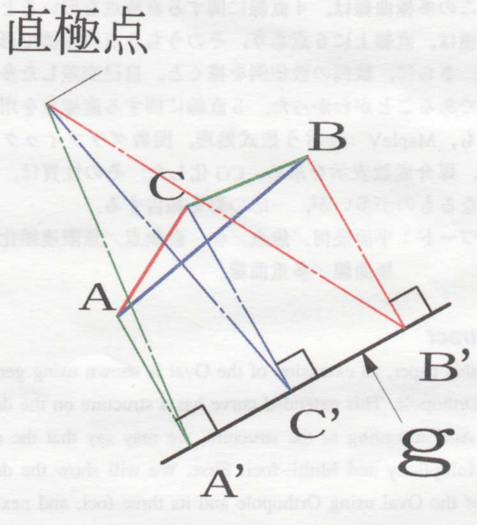



図２　　直極点

【直極点の定理の無限連鎖化】

さて，一般の位置にある直線を１本増やし４本にする．すると，４本から３本を任意に選ぶ毎に，その三角形に関する直線 g の直極点が，定まる．これらは，４点あり，同一直線上にある．さらに，この４点より，それぞれ直線 g に垂線を下し，その足より，３本を選んだ残りの１本にそれぞれ垂線を下す．すると，このときできた４本の垂線は，１点で交わる．この点を４直線のつくる完全四辺形に関する直線 g の直極点という．さらに，５本，６本，７本，．．．，n 本，と直線を増やし，一般に，n 直線のつくる完全 n 辺形に関する直線 g の直極点を定義できる．これを直極点の無限連鎖化という．

図3，図4は，それぞれ，4直線，5直線に関する直線gの直極点である．このとき，連鎖4，連鎖5の直極点という．図中，丸の数字は，連鎖3，4，5を意味する．

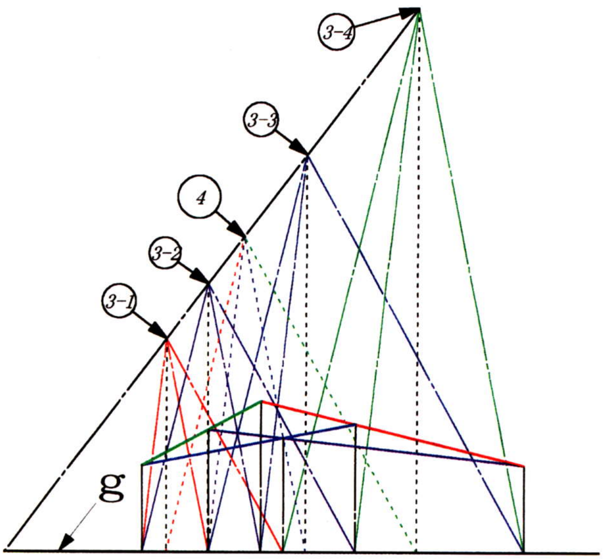



図3　連鎖4の直極点

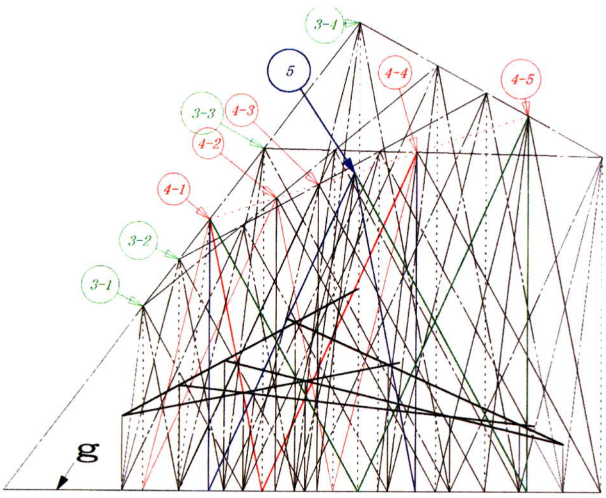



図4　連鎖5の直極点

## 4．直極点による卵形線の定義

直極点を用いた卵形線の定義または作図法とその証明は，以前，拙論[5]で報告したので，ここでは，その作図法のみ，もう一度述べ，さらに若干の事柄を補足する．

【作図法／定義】

今，図5において，直線g上に，異なる4点を取り，それを順に，左から，O，$F_1$，$F_2$，$F_3$とすると，これらから，卵形線の内分枝外分枝を，次のようにして作図できることが，わかっている．今，$F_1$，$F_2$，$F_3$を通り，直線gに垂直な直線$h_1$，$h_2$，$h_3$を引く．次に，直線g上に，動点Tをとり，OTが直径となる円を描く．ただし，OT>=$OF_3$である．そして，この円と，直線$h_1$，$h_2$，$h_3$との交点をそれぞれ$U_1$，$U_2$，$U_3$とする．すると，$\triangle U_1U_2U_3$に関する直線gの直極点は，卵形線上にあり，動点Tが，$F_3$の右側を動くとき，直極点は卵形線を描く．

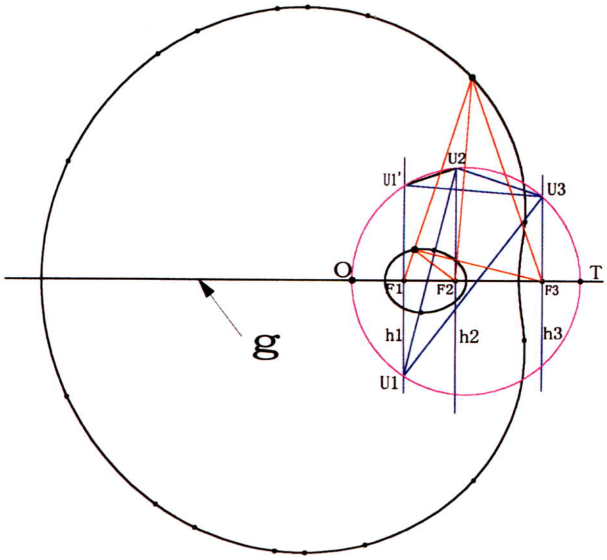



図5　直極点を用いた卵形線の定義

このとき，Oを卵形線の等距離円[8]の中心，$F_1$を第一焦点，$F_2$を第二焦点，$F_3$を第三焦点とする卵形線の内外分枝を描く．

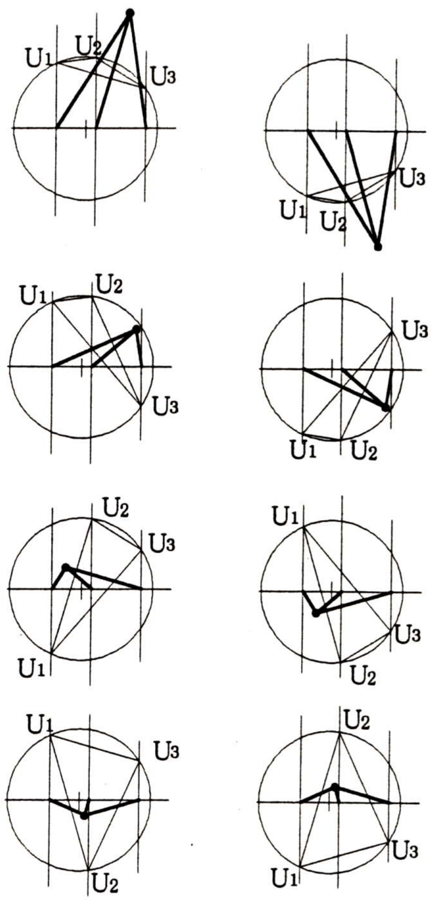



図6　　8つの直極点

さて，ここで，$\triangle U_1U_2U_3$は，円と直線の交点から，図6のように8個できるが，それに関する直極点も，8個できるが，すべて1つの卵形線上にある．逆に言えば，図7のように卵形線の内分枝外分枝が，色を変えた8個の部分に分解されることを意味する．

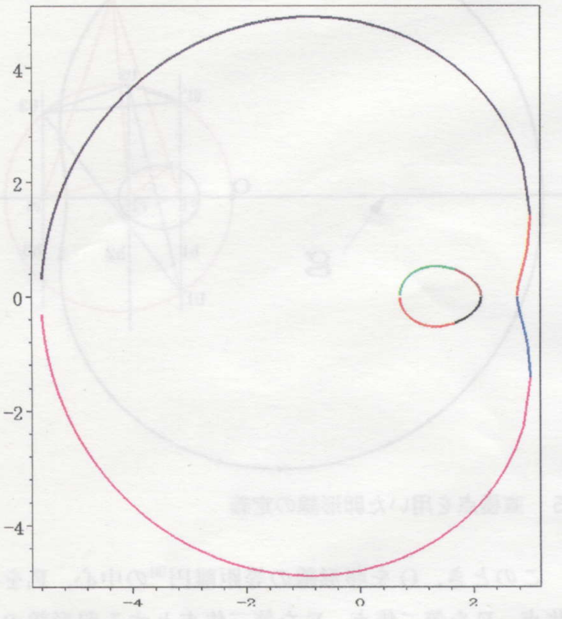



図7　8つの部分からなる卵形線

## 5．拡張した直極点による卵形線の拡張

ここでは，卵形線の拡張を考える．それには，2節の直極点の無限連鎖のうち，連鎖4, 連鎖5を用いるが，連鎖6, 7を用いても同様に拡張でき，無限に拡張できる．ただし，連鎖nに対し，$2^n$のオーダーで図や式の計算が複雑になるので，現在のCGによる連鎖7以上の表現は難しい．さて，拡張に関して，その定義が卵形線そのものの定義ほど簡潔明瞭でない．多少技巧的になっている．しかし，その図が卵形線の拡張にふさわしいので，ここであえて報告する．

### 5.1.　4直線の直極点による卵形線の拡張

#### 5.1.1.　「定義」1＋5定点を与えて定義すること

4節と同様に，図8のように卵形線を拡張定義する．つまり，1直線g上に1定点Oとそれとは異なる5定点$F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, $F_5$を定める．そして，直線g上に$F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, $F_5$を通る垂線$h_1$, $h_2$, $h_3$, $h_4$, $h_5$を立てる．つぎに，$F_3$より右側に1点Tを定め線分OTを直径とする円を描く．この円と，直線$h_1$, $h_2$, $h_3$との交点を$U_1$, $U_2$, $U_3$とする．今仮に，平面を2つに分ける直線gの一方側にある交点を考える．

$U_1$と$U_2$を結ぶ直線$m_1$と直線$h_4$との交点を$U_4$とし，$U_1$と$U_3$を結ぶ直線$m_2$と直線$h_5$との交点を$U_5$とする．

そして，$U_2$と$U_3$を結ぶ直線を$m_3$とし，$U_4$と$U_5$を結ぶ直線を$m_4$とする．このとき，直線$m_3$と$m_4$の交点を$U_6$とし，$U_6$より直線gに下した垂線の足を$F_6$とする．ところで，円OTを変え，同様の図を描いても$F_6$は，不変である．図9には，3つの動円OTと，そのときの4直線と直線$h_1$から$h_6$を描いている．$U_6$が同じ$h_6$上にあることが解る．この図は1つの定理を表す．

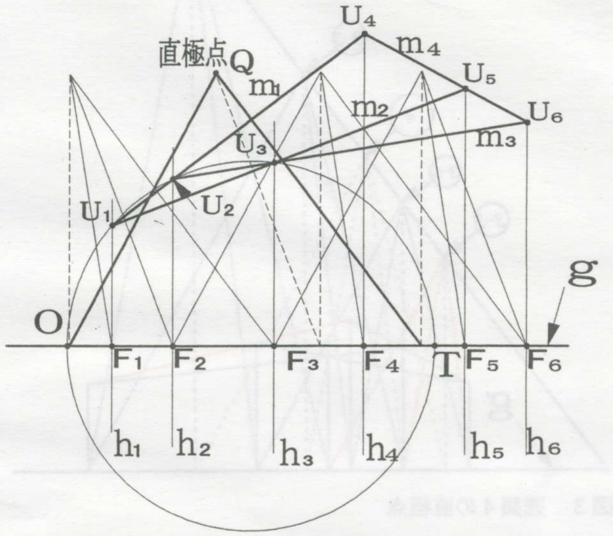



図8　4直線の直極点による卵形線の拡張

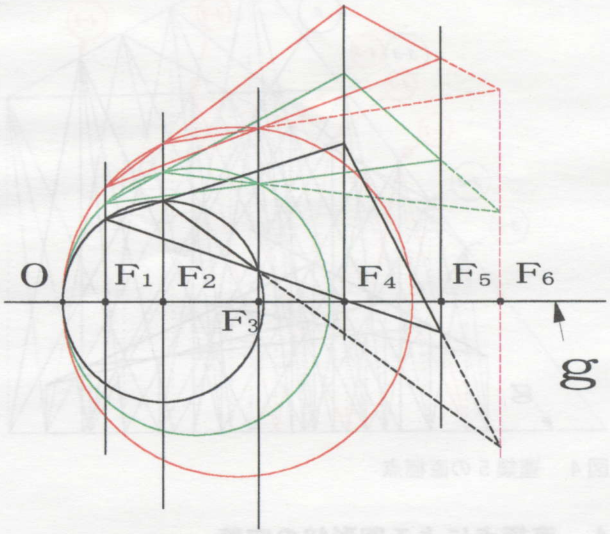



図9　動円と4直線

さて，以上のようにして定まった4本の直線$m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$に関する直線gの拡張された直極点は，動点Tがg上を動くとき，拡張された卵形線（多極曲線）を定める．

#### 5.1.2.　焦点について

ここで，焦点について，今まで述べてきたことを図を変えて述べる．図10におけるように焦点の任意性として，O, $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, $F_5$より$F_6$を定めたものと，O, $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_5$, $F_6$より$F_4$を定めたものがある．このとき，O, $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, $F_5$, $F_6$は，同じ位置にあるこ

P.81

とが解る．このことの証明として，MapleVの数式処理で，Oを原点とし，$F_1$，$F_2$，．．．，$F_5$の座標を文字変数とすれば，その5つの文字式で，$F_6$が一意的に定まる．故に，4直線による多極曲線は，原点以外のx軸上の5定点より定まることが言える．つまり，5つのパラメーターのより定義できるのである．
ただし，焦点は，$F_1$から$F_6$の6点である．

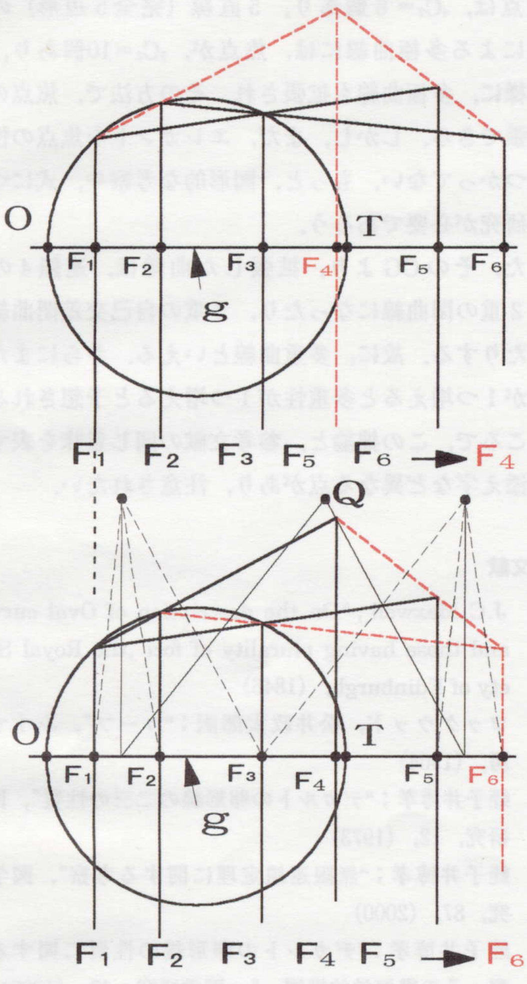



図10　焦点の任意性について

### 5.2　5直線の直極点による卵形線の拡張

〔定義〕この図11におけるように，直線上に定点Oと7定点，$F_1$，$F_2$，$F_3$，$F_4$，$F_5$，$F_7$，$F_8$を定める．そして，この7つの定点を通る直線gとの垂線をそれぞれ，$h_1$，$h_2$，$h_3$，$h_4$，$h_5$，$h_7$，$h_8$とする．さらに，定点Oを通りg上に直径OTを持つ動円を考える．その円と，$h_1$，$h_2$，$h_3$との交点$U_1$，$U_2$，$U_3$から，図のように5直線$m_1$，$m_2$，$m_3$，$m_4$，$m_5$に関する直線gの直極点を考える．その直極点が，動円が動いて変化するとき，拡張された卵形線である焦点$F_1$から$F_{10}$を持つ多極曲線を描く．ここで，$F_6$，$F_9$，$F_{10}$は，その他の初めに定めた7焦点より一意的に定まる．

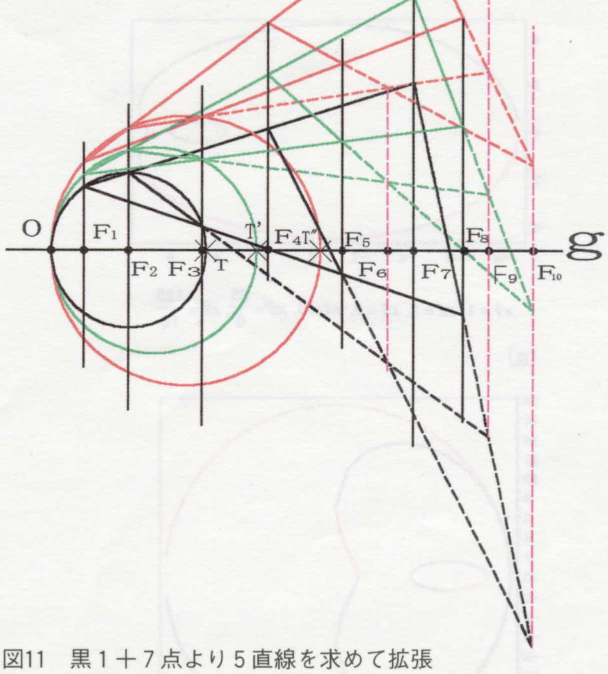



図11　黒1＋7点より5直線を求めて拡張

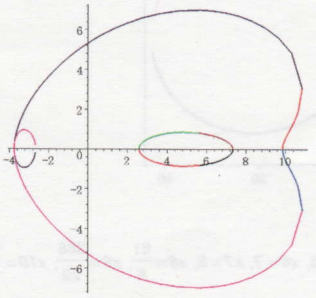
### 6．4直線，5直線による多極曲線のCG

多極曲線は，その作図法より，曲線上の点をいくつでも作図できるが，そう簡単ではない．そこで，解析幾何を用いて交点を求める方法を，　Maple Vのプログラム上で行い，その数式処理によって得た図12の媒介変数表示式（1つの曲線に8組ある）をもとに，plotコマンドを用いて図を描いた．この際，直極点の定義では，連鎖4の場合4直線が1点で交わるが，プログラムは，そのうちの2直線で交点を求めて，コンピュータの負荷を軽くした．さて，前述のように，連鎖4の多極曲線には，パラメーターが5つあり，その変化により多極曲線

\>

$$X=\frac{\frac{1980}{23}\sqrt{2t-4}\sqrt{3t-9}-\frac{118980}{529}t+\frac{276060}{529}-\frac{17100}{529}\sqrt{t-1}\sqrt{3t-9}+\frac{1140}{23}\sqrt{t-1}\sqrt{2t-4}}{(\sqrt{3t-9}+\sqrt{t-1}-2\sqrt{2t-4})\left(\frac{114}{23}\sqrt{2t-4}-\frac{57}{23}\sqrt{3t-9}-\frac{57}{23}\sqrt{t-1}\right)}$$

$$Y=-\frac{\frac{5670}{529}\sqrt{3t-9}+\frac{3990}{529}\sqrt{t-1}-\frac{420}{23}\sqrt{2t-4}}{-\frac{684}{23}t+\frac{1482}{23}+\frac{228}{23}\sqrt{2t-4}\sqrt{3t-9}-\frac{114}{23}\sqrt{t-1}\sqrt{3t-9}+\frac{228}{23}\sqrt{t-1}\sqrt{2t-4}}$$




$x1=1,\ x2=2,\ x3=3,\ x4=5,\ x5=\frac{150}{23},\ x6=\frac{165}{19}$

図12　多極曲線の媒介変数表示とCG

は変わった図になる．また，連鎖５の多極曲線には，パラメーターが７個あり，それによるCGの変化の様子も図13に示した．なお，曲線の図で線が離れているのは，プログラム上，変数の値を無限大に出来ないためで，別の方法で，極限値をとれば線が閉じることを確認している．

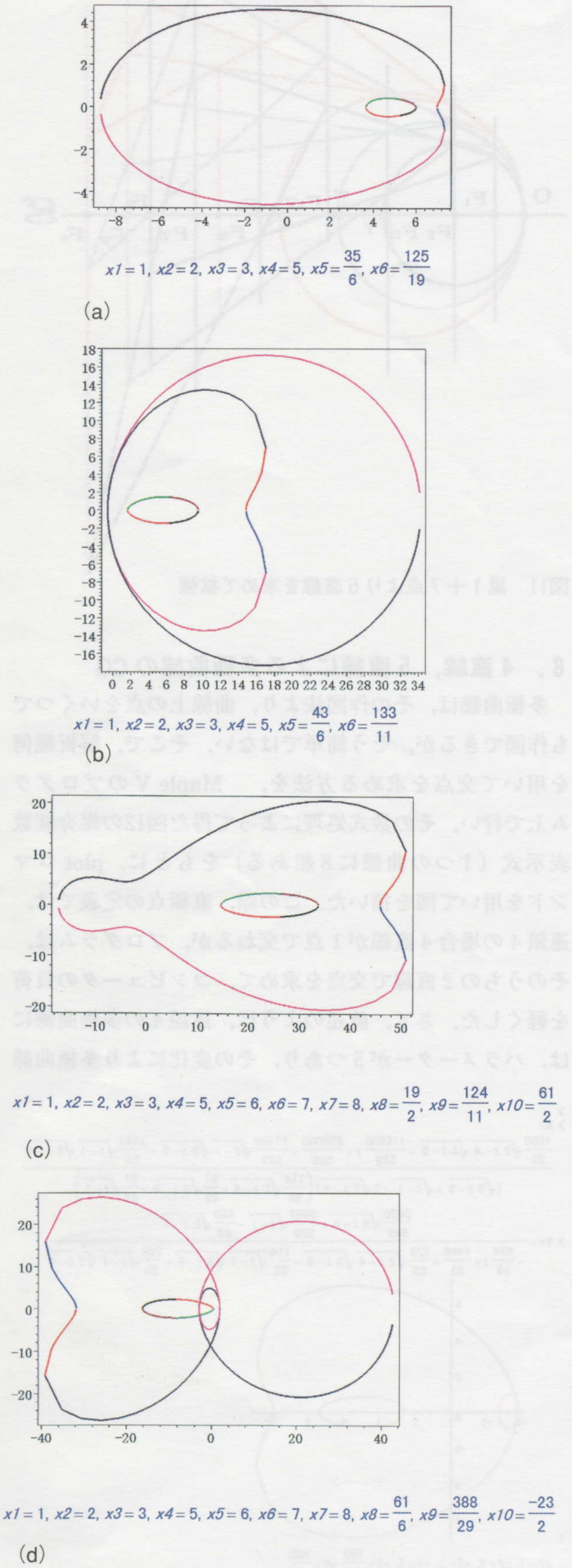



図13　多極曲線；連鎖４（a），（b）；連鎖５（c），（d）

## ７．結び

ここでは，卵形線の拡張を，直極点を用いて行った．つまり，４直線（完全４辺形）の直極点による多極曲線の焦点は，${}_4C_2=6$個あり，５直線（完全５辺形）の直極点による多極曲線には，焦点が，${}_5C_2=10$個あり，以下同様に，多極曲線も拡張され，その方法で，焦点の数も拡張できる．しかし，まだ，エレガントな焦点の性質は見つかってない．もっと，図形的な考察や，式についての研究が必要であろう．

また，そのCGより，拡張した曲線は，連鎖４の場合，２重の閉曲線になったり，３重の自己交差閉曲線になったりする．故に，多重曲線といえる．さらにまた，連鎖が１つ増えると多重性が１つ増えると予想される．

ところで，この拙論と，参考文献の同じ意味を表す文字や添え字など異なる点があり，注意されたい．

**参考文献**

［1］ J.C.Maxwell；"On the description of Oval curves, and those having plurality of foci",the Royal Society of Edinburgh,（1846）

［2］ ロックウッド，松井政太郎訳；"カーブ"，みすず書房，（1964）

［3］ 蛭子井博孝；"デカルトの卵形線の二三の性質"，図学研究，12，（1973）

［4］ 蛭子井博孝；"無限連鎖定理に関する考察"，図学研究，87，（2000）

［5］ 蛭子井博孝；"デカルトの卵形線の性質に関する考察ーその幾何学的構図ー"，図学研究，49，（1990）

［6］ 蛭子井博孝；"BasicとCADによる卵形線の幾何学"，日本図学会，1997年度大会（東京）学術講演論文集

［7］ 岩田至康編；"幾何学大辞典１「67」，３"，槇書店，（1976）

［8］ 蛭子井博孝；"デカルトの卵形線の曲率円"，図学研究，19，（1976）

●2000年６月23日受付

えびすい　ひろたか
卵形線研究センター
1950年生　大阪大学工学部応用物理修了後　高校数学教師，RERF研究員
現在　Freeで卵形線，卵形面，共点図形等　図形の幾何学　研究中
Email hirotaka.ebisui@nifty.ne.jp

# 楕円を拡張した共２焦点、共３焦点な卵形線群

《Ovals（Doval） with Same two or three focus points extended from ellipse》

蛭子井博孝
卵形線研究センター
740-0012　岩国市元町４丁目 12-10
hirotaka.ebisui@crux.ocn.ne.jp

..¥..¥confocal-共焦点¥共焦点動曲線４種-cg-nomi.mws

**Keyword：楕円、卵形線、共焦点、直極点、短軸、三焦点、ドーバル**

## １．はじめに

微分幾何では凸閉曲線を卵形線と呼んでいる。歴史的にはケプラーやカシニなどが、卵形線の初等的定義方法を見つけている。ここでは、我々が再発見した楕円の拡張である**卵形線**（デカルトの卵形線[1]）について考える。**楕円が焦点を二個持ち**、その２つの焦点を共有する共焦点楕円が存在する。ところで卵形線は、３つの焦点を持つ[1]。その**３つの焦点を共有する卵形線族**があることが予想され、その作図法を見つけた。それは、直極点による卵形線の定義方法を利用するものである。ここでは、共焦点である卵形線群の描き方、**共焦点**であることの確認を行う。

## ２　楕円を拡張した卵形線（Doval）の定義

### 2.1　双極座標による卵形線の定義

**卵形線は、双極座標** $mr_1 \pm nr_2 = k \cdot c$ **で定義される。**（k>m>n>0,k,m,n は任意定数,c は極（焦点）間距離、$r_1$，$r_2$は、それぞれ第一、第二極から曲線上の点までの距離）、

第二、第三焦点を極とする定義式は、

$$-kr_2 + mr_3 = \pm n \cdot \frac{(k^2 - m^2)}{(m^2 - n^2)} \cdot c$$

第三、第一焦点を極とする定義式は

$$\pm nr_3 + kr_1 = m \cdot \frac{(k^2 - n^2)}{(m^2 - n^2)} \cdot c$$

である。

それぞれ、どれも同じ一対（複号上：内分枝、複号下：外分枝）の卵形線を描く。一対の内外分枝を併せて**ドーバル（Doval）**と呼ぶことにする。

### 2.2　点と円と比からの新定義

図１のように**１点と円からの距離の比が一定な曲線として卵形線は定義される。**

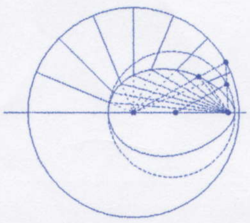


**図１**　点、円、比による卵形線（内分枝）

### 2.3　直極点による新定義[2]

《【１直線 g 上のことなる４点を取る。左から O, $F_1$, $F_2$, $F_3$ とする。これにより、図２のように**ドーバル**は、一意的に決まる。】

**作図法**【$F_1$, $F_2$, $F_3$ を通り直線 g に垂直な直線 $h_1$，$h_2$, $h_3$ をたてる。次に g 上の $F_3$ の右側に１点 T をとる。線分 OT を直径とする円を描く。この円（動円）と $h_1$, $h_2$, $h_3$ の交点を作る。それを $U_1$,$U_1$'，$U_2$,$U_2$'，$U_3$,$U_3$' とする。ここで△ $U_1U_2U_3$（△ $U_1U_2U_3$'….８個ある）の直線 g に関する直極点を P とする。この P は $F_1$,$F_2$,$F_3$ を焦点、O を等距離円の中心（$F_1$,$F_2$ を n:m に内分する点と外分する点の中点：卵形線の内外分枝から等距離にある点が円になる）とする卵形線上にある。（T が、$F_3$ の右側を動くとき卵形線を描く）】》

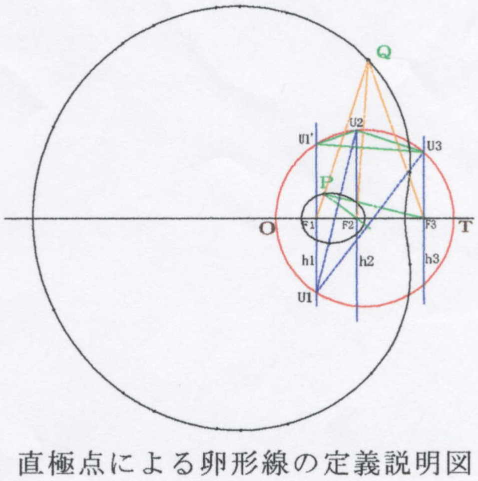



**図2**　直極点による卵形線の定義説明図

## 3　Dovalの性質

### 3.1　第三焦点の文献１による定義

卵形線のおいて、$F_1$を通る半直線が、卵形線の内分枝、外分枝と交わる点をP,Qとすると、$F_1P\cdot F_1Q$ ＝一定である
また、ｇ上に $F_1P\cdot F_1Q = F_1F_2\cdot F_1F_3$ となる点$F_3$を第三焦点という。

### 3.2　短軸と、第三焦点の新定義

卵形線の内分枝の対称軸の中点と、その点から卵形線上の最も近い点を結ぶ線分を短軸をいう。この短軸の垂直二等分線は、第三焦点を通る[3)]。

### 3.3　等距離円の中心から F1、F2, F3 までの距離と任意定数の関係

卵形線が$mr_1\pm nr_2=kc$と定義されたとき

$OF_1 = n^2\cdot c／(m^2-n^2)$

$OF_2 = m^2\cdot c／(m^2-n^2)$

$OF_3 = k^2\cdot c／(m^2-n^2)$である。

### 3.4　離心率と卵形線

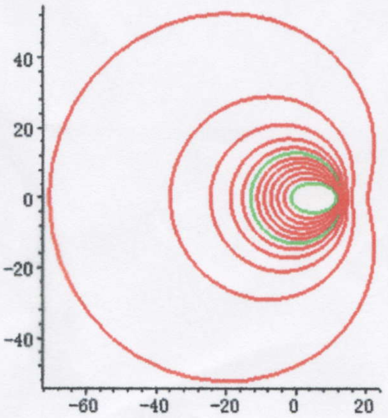
卵形線の対称軸上で接する円を補助円という。この円の半径を１としたとき、円の中心の左右に、距離 n/k, m/k（＜１）の位置に$F_1$, $F_2$がそれぞれある。この n/k, m/k を左離心率$e_L$、右離心率$e_R$をいう。卵形線は、この左右の離心率により、形が一意的に決まる

## 4　共焦点「4」なDoval群

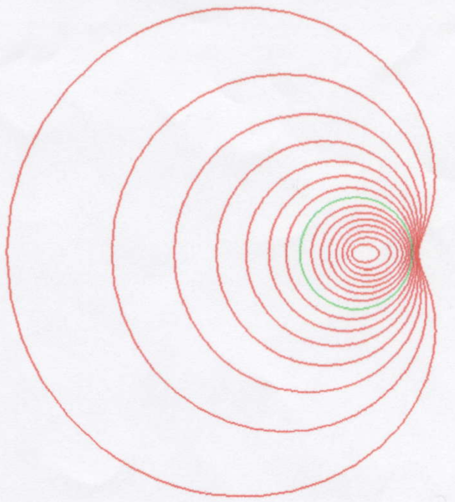
卵形線には、３つの焦点があり、そのうち任意の２つを共有する卵形線群と、３焦点を共有する卵形線群が考えられる。

### 4.1　２つの焦点を共有する Doval 群

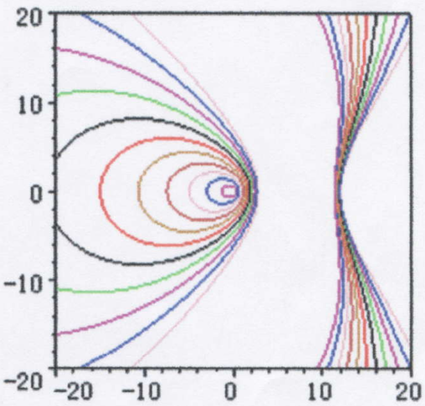
①　２焦点　F1、F2　が共有な卵形線群




②　　２焦点　F1、F3　が共有な卵形線群



③２焦点　F2、F3　が共有な卵形線群




### 4.2　３つの焦点を共有する Doval 群

卵形線の直極点の定義（図２）において$F_1,F_2,F_3$を固定し,O を移動させて、卵形線を求めれば、共焦点であることは明らかである。式では、　$x=OF_1=n^2\cdot c/(m^2-n^2)$

$F_1F_2 = a = c$、$F_2F_3 = b$　　とすると

$OF_2 = x+a = m^2\cdot c/(m^2-n^2)$

$OF_3 = x+a+b = k^2\cdot c/(m^2-n^2)$

すると、上の３式から

$e_L = n/k = \mathrm{sqrt}(x/(x+a+b))$

$e_R = m/k = \mathrm{sqrt}((x+a)/(x+a+b))$

ここで、a, b を固定し

ｘを変えると、共焦点な卵形線の離心率が求まる。Maple で$e_L$、$e_R$から描いた。
さて、図３では、共焦点な卵形線の**内分枝の短軸の垂直二等分線が第三焦点を通る**ことを示している。図４は、共焦点な卵形線群の内外分枝である。x=0　の時　内外分枝は、一致し円になる。

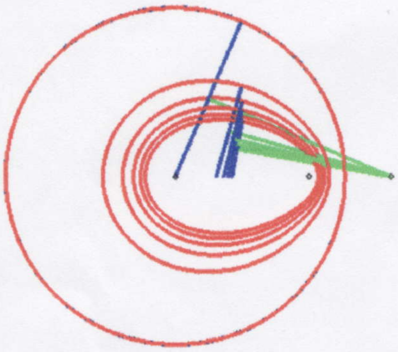


**図３　３焦点共有な卵形線群**（内分枝）
とその短軸および垂直２等分線

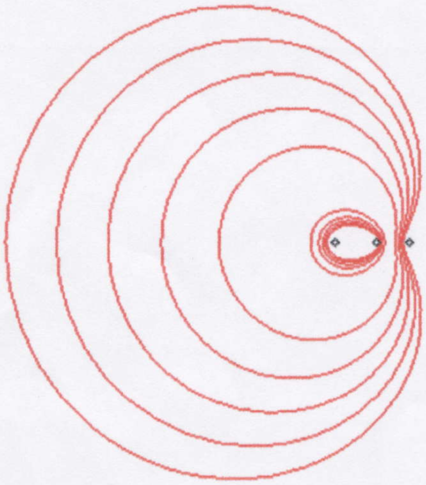


**図４　共３焦点な卵形線の内外分枝**５ペア

## ５　むすび

楕円の焦点の共焦点という性質が、それを一般化した卵形線の焦点にも付随しており、それを図示できた。これによりデカルトの卵形線（４次曲線）が身近なものになった。点、直線、三角形、円など、基本図形を用い、その運動として、卵形線が定義できるが、今回の内容は、卵形線の光学レンズ系への応用や、卵形線の物理的応用をへの糸口になるのではなかろうか。

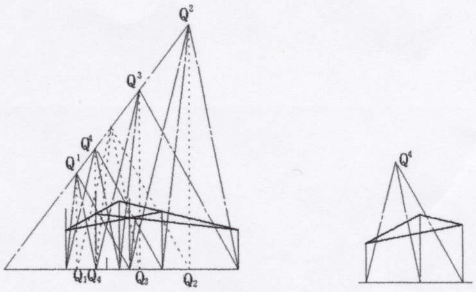
参考文献

[1]ロックウッド、松井政太郎訳”カーブ”、みすず書房（１９６４）
[2]蛭子井博孝；”デカルトの卵形線の性質に関する考察ーその幾何学的構図ー”、図学研究, 49,(1990)
[3]蛭子井博孝；”デカルトの卵形線の短軸に関する一定理”；図学研究、70 号,1995、12 月
[ 4] 蛭子井博孝；"TWO KINDS (Chocoid,Tajicoid) OF CURVES EXTENDED FROM THE OVAL” ;10th ICGG Proc, p.94~98,2003

## Appendix

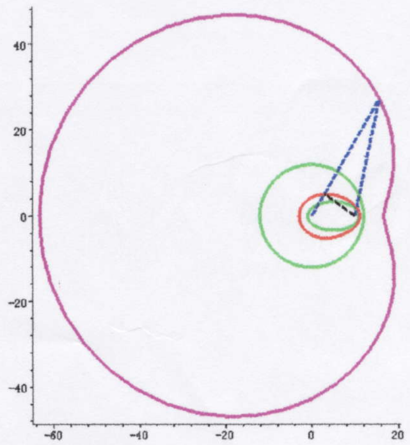
① 直極点とその拡張

直極点（下図右）とは、３角形の３頂点から、ある直線に垂線を下し、その足から、頂点の対辺に、下した垂線３本が交わった点をいう。

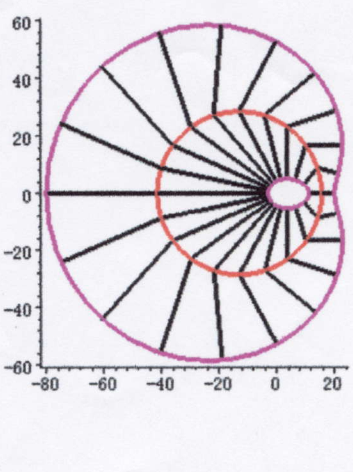


連鎖4　　連鎖3
直極点　H.EBISUI

② Doval の内分枝（卵形線）、外分枝



③ 等距離円



# 卵形線とコンフィギュラチオン

蛭子井博孝
卵形線研究センター＊

**要旨：** 楕円の構図を拡張すると、卵形線になることを以前見つけた。その卵形線は、作図法や、その性質、右離心率、左離心率、短軸、接線、法線、等距離円等、多くの図示できる性質を持つ。今回は、そのような構図の中で、射影幾何的性質、コンフィギュラチオンの構図を含むことを見つけた。ここで、卵形線の作図法を、作図定理として再度示し、また、コンフィギュラチオンとは何か、パップスの定理、デザルグの定理の構図等で復習し、卵形線の構図とコンフィギュラチオンの関係等、図形の不思議さを味わいたい。

**キーワード**：平面幾何学：卵形線、作図定理、射影幾何：パスカルの定理、デザルグの定理、コンフィギュラチオン

## １．はじめに

卵形線は、点と円からの距離の比が一定な曲線と定義される。これは、デカルトが発見した卵形線と同じもので、楕円を拡張した曲線といえる。この曲線の作図法定理は、【１】定円（準円）と点（焦点）と比を与えて、そこから、作図するもの、【２】２円（準円）を与えて、作図するもの、【３】円（補助円）と中心線上の２点を与えて、作図するもの、【４】２補助円を与えて、作図するものがある。この４つの作図法は、拙論［１］で報告している。そして、作図法【４】の証明は、拙論［２］で報告している。

さて、今回、作図法と言う構図の中のある補助線と点が、射影幾何学的性質であるコンフィギュラチオン(3)をなしていることを見つけた。コンフィギュラチオンとは、ｐ個の点をｑ本の線が通り、逆に、ｓ本の線上にｔ個の点があり、ｐｑ＝ｓｔの関係を満たしている構図を言う。
ここでは、卵形線の定義、コンフィギュラチオンの基本的例、作図法の構図とコンフィグラチオンを、図示する。その構図が成り立つことは、構図が作図できること、つまり、共線や共点が、ＣＡＤ的確認が取れる。つまり、数値入力を使わず、円や線や平行線を描き、範囲拡大を１０００倍ぐらいしてみて、共点性を確かめることが出来たことを持って、その図の確からしさを確認した。しかし、これで、十分でないと思う人に、構図の成立の初等幾何学による証明も示す。

とにかく、卵形線の構図を、コンフィギュラチオンと言う構図を通して、その射影幾何学的側面や、図の持つおもしろさを味わっていただきたい。

## ２。　卵形線の定義、作図定理

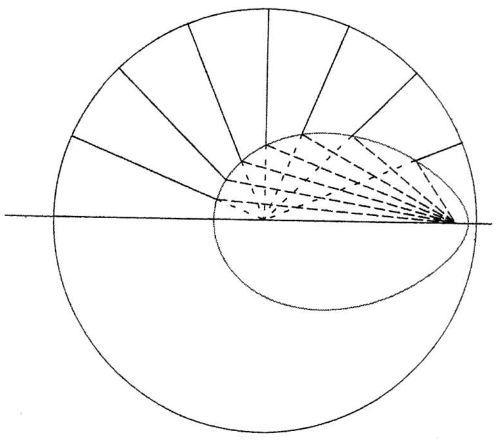


図１　卵形線の定義

740-0012　岩国市元町４丁目 12-10

卵形線は、点と円からの距離の比が一定な曲線と定義される。図１に、この定義による卵形線を示す。

次に，準円，補助円などが与えられたときの卵形線の作図定理を述べる。

作図定理において、卵形線は描かれていないが、点Ｐ、および点Ｑを動点として、考えてほしい。図１、および４節において、卵形線の具体例を示している。

**【作図定理１】．任意の１つの円S１を準円とし，他に１つの焦点S２（S１≠S２）と定比　が与えられたとき，この卵形線を描くこと。**

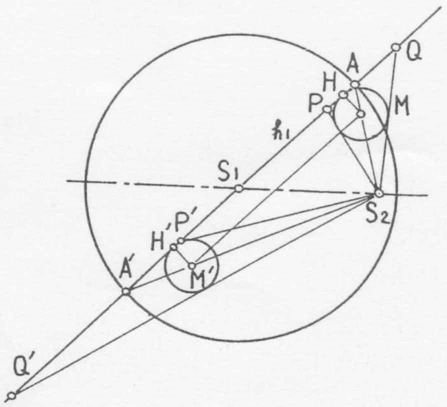



図２　　作図定理１による卵形線の構図

図２にいて，円Ｓ１と１点Ｓ２が与えられている。今，中心Ｓ１を通る任意な直線ｈ１と円Ｓ１との交点をＡとする。ＡとＳ２を結ぶ直線上にＳ２Ｍ：MA＝ｍ：ｎとなるようにＭをとる。次に，Ｍから直線ｈ１を下し，その足をＨとする。Ｍを中心とし，MHを半径とする円を描き，Ｓ２を通り，その円に接する直線ｈ１との交点をP、Qとする。Ｓ１を中心にｈ１を１回転させるとき，P，Ｑは，卵形線を描く。ここで，P，Ｑは同じ性質をもつが，Ｐは内分枝を，Ｑは外分枝を満たすものを表わす。以下の図においても同様である。

**【作図定理２】．任意の２つの円を準円として与えられたとき，この卵形線を描くこと。**

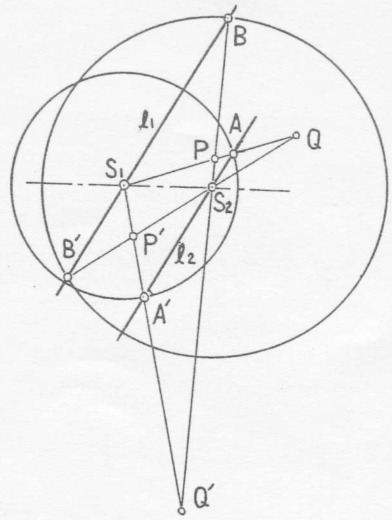



図３　作図定理２による卵形線の構図

図３において，円Ｓ１と円Ｓ２が与えられている。まず，Ｓ１，Ｓ２を通り，互いに平行な直線ｌ１，ｌ２を引く．ｌ１が円Ｓ２と交わる点B，ｌ２が円Ｓ１と交わる点をＡとする。このとき，直線Ｓ１ＡとＳ２Ｂの交点P，Ｑは，ＡあるいはＢが，円Ｓ２上あるいは円Ｓ１上をそれぞれ動くとき，卵形線を描く。

**【作図定理３】．任意の１つの円0を補助円とし，他に２つの焦点S1，S２（S１≠S２）が0と共線であるように与えられたとき，この卵形線を描くこと。**

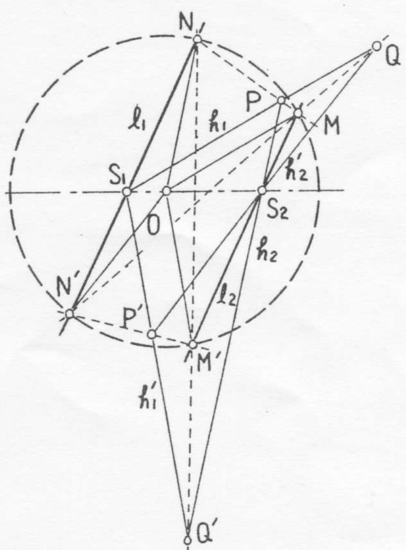



図４　作図定理３による卵形線の構図

図４において，円Ｏと、その中心線上に任意に

二点Ｓ１，Ｓ２が与えられている。　まず，Ｓ１Ｓ２を通り，互いに平行な直線を１１，１２とする。１１，１２が円 O と交わる点をそれぞれ N, M とする。次に、ON に平行にＳ２を通る直線ｈ２を引く。同様に OM に平行にＳ１を通る直線ｈ１を引く。すると，ｈ１，ｈ２の交点 P，ｈ1,ｈ２’の交点Ｑは，Ｎあるいは M が円 O 上を動くとき，卵形線を描く。ここで，N, P, M あるいは N’, Q, M が共線であることは，パップスの定理より明らか。

**【作図定理４】. 任意の２つの円01，円02が補助円として与えられたとき，この卵形線を描くこと。**

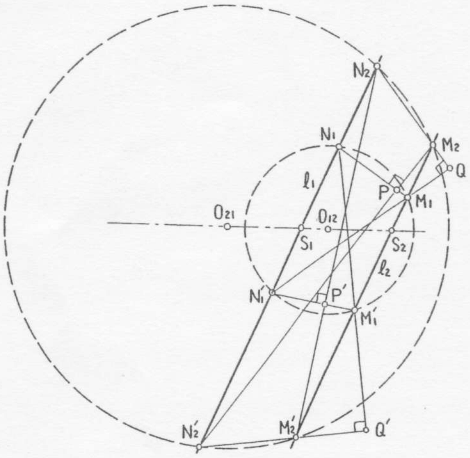



図５　作図定理４による卵形線の構図

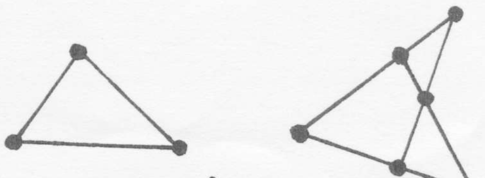
図５において，円Ｏ１，円Ｏ２（Ｏ１≠Ｏ２）が与えられている。前節の準円と補助円の関係より，焦点Ｓ１，Ｓ２を求め，Ｓ１，Ｓ２を通り，互いに平行な直線１１，１２を引く。Ｉ１と円Ｏ１，Ｏ２が交わる点をそれぞれＮ１，Ｎ２とし，同様にＭ１，Ｍ２をとる。次に直線Ｎ１Ｍ１と直線Ｎ２Ｍ２が垂直に交わる点をＰあるいはＱとする。すると，Ｐ，Ｑは，Ｎ１あるいはＭ１が円 Ｏ １上を動くとき，卵形線を描く。

**３．コンフィギュラチオンの例**

この節では、１節で述べたコンフィグラチオンｐｑ＝ｓｔの例を数例示す

点の数（線の数）＝線の数（点の数）

ｐ（ｑ）＝ｓ（ｔ）で表す



3(2) = 3(2)

図６　三角形 ~~3(3)=3(3)~~、 四辺形６（２）＝４（３）

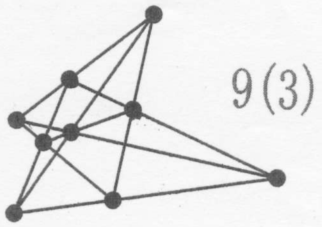



図７　パップスの定理　９（３）

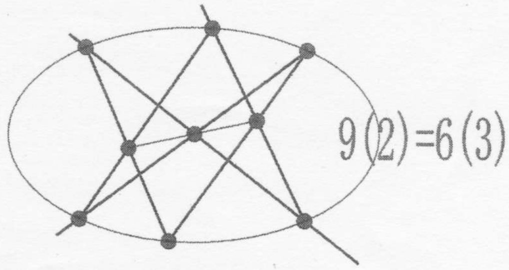



図８　パスカルの定理　９（２）＝６（３）

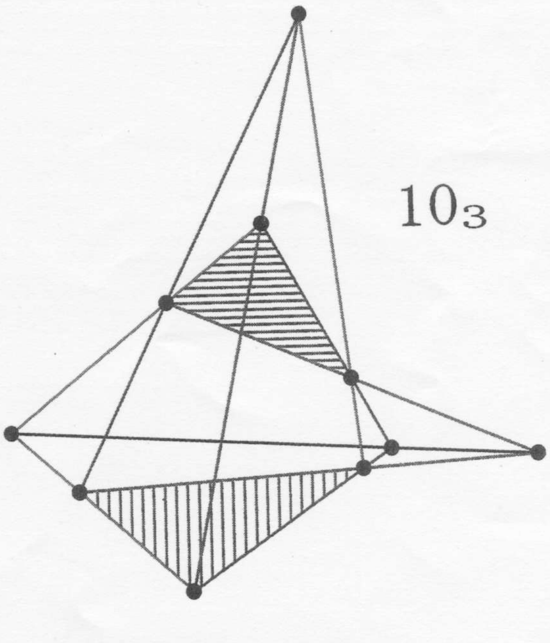



図９　デザルグの定理　　１０（３）

P.89

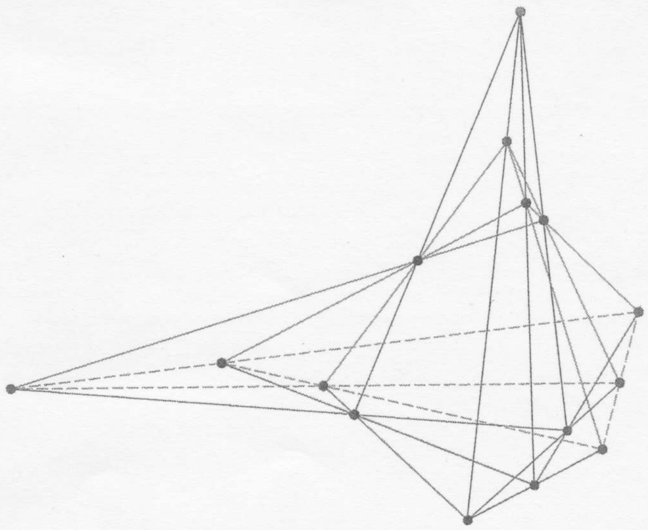


図１０　４次元のデザルグの定理　　15(4)=20(3)

### ４．卵形線の構図の中のコンフィギュラチオン

今回のテーマである図を２，３示す。
図１１，図１２、図１３に、卵形線と黒丸のコンフィギュラチオンの点の示す。図１４は、卵形線の構図の中の等距離円上の点を考えた。この作図法は、拙論［４］を参照されたい。

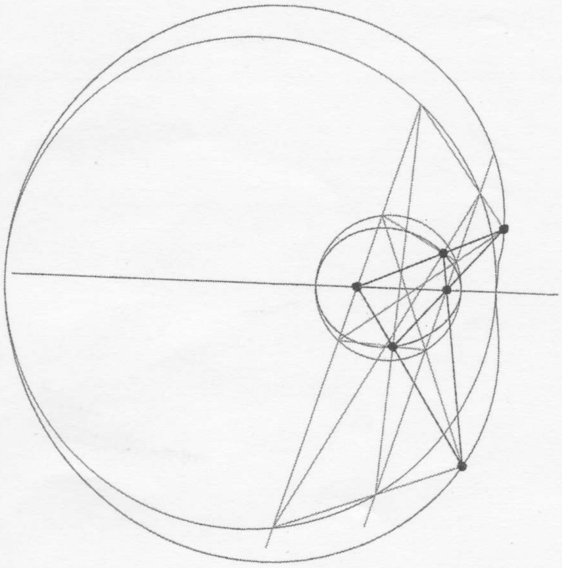


図 11　２焦点と卵形線上の４点　　6(2)=4(3)

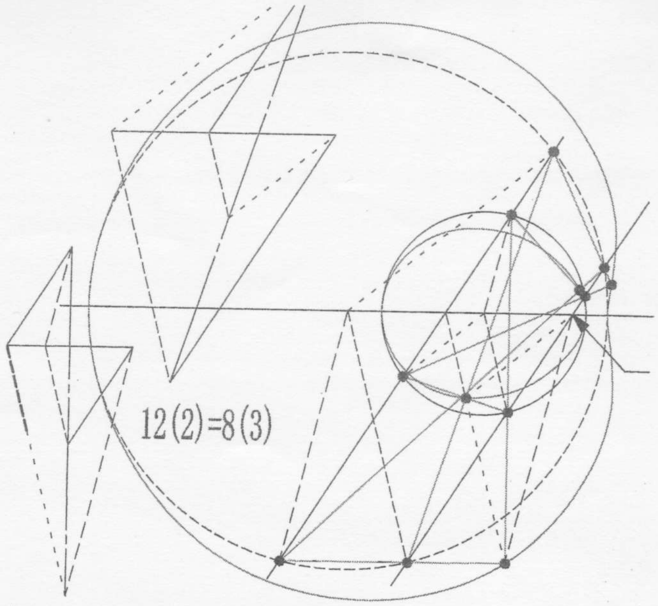
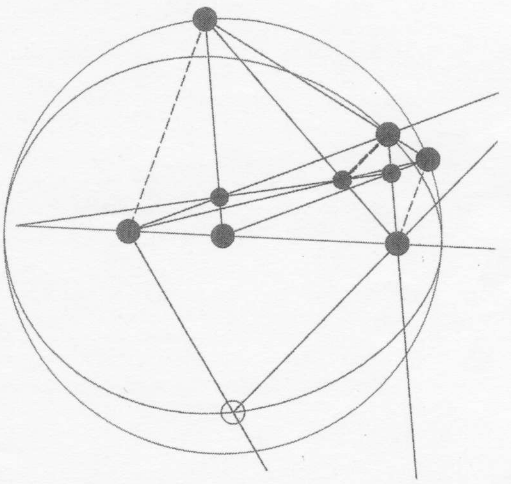



図 12　補助円上の８点と卵形線上の４点



9(3) = 9(3)

図１３　　卵形線の構図とコンフィグラチオン　~~9(3) 9(3)~~

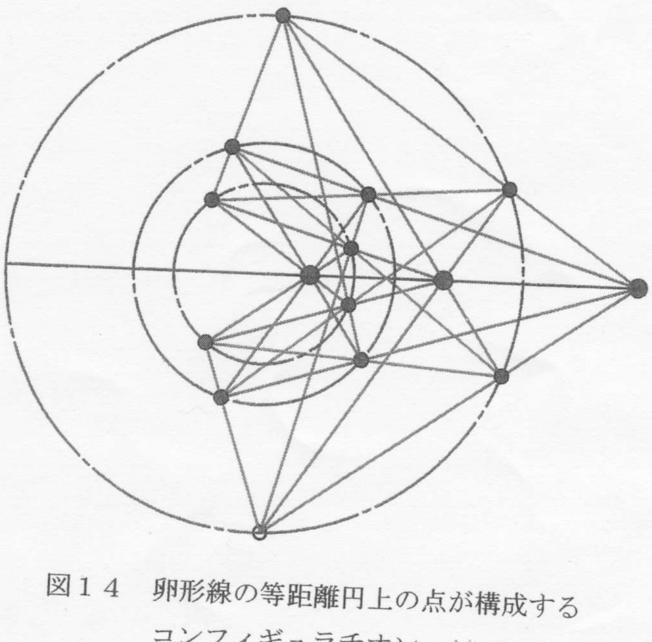


図１４　卵形線の等距離円上の点が構成する
コンフィギュラチオン　15(4) = 20(3)

図１５において、その構成順序を、仮定、帰結で示す構図の①、F、②は焦点、③、④、⑤、⑥が卵形線上の点である。この証明は、紙面の関係上、口頭報告のみにする

『仮定１』

1．１直線上に３点①、F、②、および直線外の点③をとる。

1．△ ①F③の外接円を円 a とする。

1．△ ②F③の外接円を円 b とする。

1．直線②③と円 a との交点を④とする。

1．直線①③と円 b との交点を⑤とする。

1．直線①④と直線②⑤との交点を⑥とする。

【帰結１】

４点③、④、⑥、⑤は、同一円周 c 上にある。

【帰結２】

４点⑥、④，F、②は、同一円周 d 上にある。

４点⑥、⑤、F、①は、同一円周 e 上にある。

『仮定２』

1．線分③④ の垂直二等分線と円 a との交点を⑦、⑧とする。

（明らかな帰結） 線分⑦⑧は、円 a の直径

∠⑦④⑧＝∠R

∠⑦③⑧＝∠R

線分⑦④＝線分⑦③

∠⑦④③＝∠⑦③④

『仮定３』

1．直線⑧④ と円 d との交点を⑨とする。

1．直線④⑦ と円 d との交点を⑩とする。

（明らかな帰結） 線分⑨⑩は、円 d の直径

∠⑨④⑩＝∠R

∠⑨⑥⑩＝∠R

【帰結３】

直線⑨⑩は、線分④⑥の垂直二等分線である。

『仮定４』

1．直線⑧③ と円 b との交点を⑪とする。

1．直線⑦③ と円 b との交点を⑫とする。

1．直線⑥⑨と直線⑤⑪との交点を⑬とする。

（明らかな帰結） 線分⑪⑫は円 b の直径

【帰結４】点⑬は、円 e 上にある。

『仮定５』 1．点⑫と点②を結ぶ

1．点②と点⑩を結ぶ

【帰結５】

点⑫、②、⑩は、同一直線上にある。

『仮定６』

1．直線⑫⑤と直線⑥⑩との交点を⑭とする。

【帰結６】点⑭は、円 e 上にある。

【帰結７】

直線⑪⑫は、線分③⑤の垂直二等分線である。

【帰結８】

直線⑬⑭は、線分⑤⑥の垂直二等分線である。

『仮定７』 1．点①と点⑬を結ぶ

1．点①と点⑧を結ぶ

【帰結９】

点⑧、①、⑬は、同一直線上にある。

【帰結１０】

３点②、⑪、⑨は、同一直線上にある。

【帰結１１】

３点①、⑦、⑭は、同一直線上にある。

『仮定８』

1．線分⑨⑩と線分⑬⑭との交点を⑮とする。

【帰結１２】

５点⑭、⑮、⑦、⑫、⑩は、同一円周 f 上にある。

【帰結１３】

３点⑧、⑦、⑮は、同一直線上にある。

【帰結１４】

５点⑮、⑨、⑬、⑧、⑪は、同一円周 g 上にある。

『仮定９』 1．点⑪と点⑮とを結ぶ。

【帰結１５】

３点⑫、⑪、⑮は、同一直線上にある。

以上より

【帰結１６】

点①から点⑮において、それらを結ぶ線分は、図のように４本ずつあり、逆に２０本の線分の上に３点ずつ点がある。

故に 点①から点⑮ とその点を通る２０本の線分は、１５（４）＝，２０（３）のコンフィギュラチオンをなす。

付【帰結１７】

点⑮を通る点線分は、円ｆ、ｇの直径である。

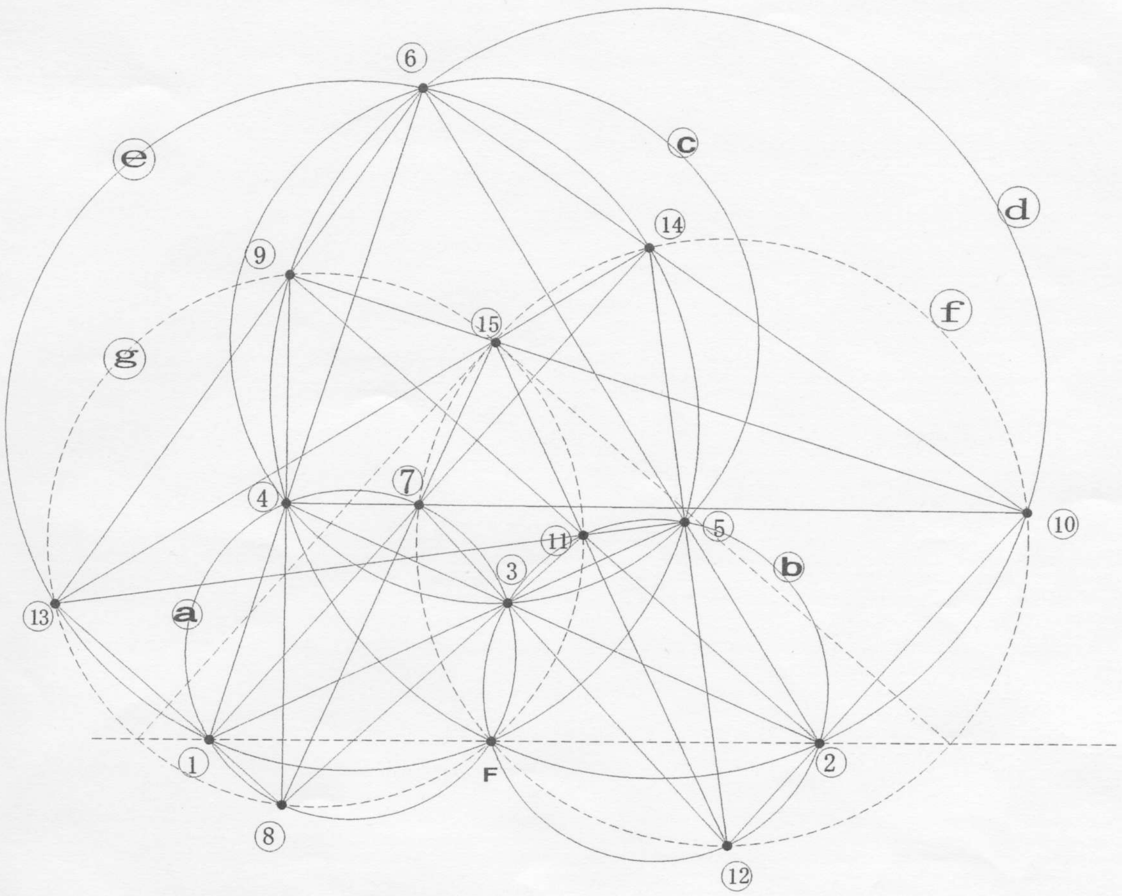



図１５　卵形線の構図とコンフィギュラチオン

## ５．結び

卵形線の構図の中のコンフィギュラチオンを示してきた．ところで、卵形線が、楕円を拡張したものであり、楕円のパスカルの定理に相当する、卵形線のパスカルの定理のようなものを、見つけることが、これからの課題である。なお、図学的には、ここで示した図は、作図順序持った構図であり、幾何学の図であるため、数値でない正確な作図を書く練習に、この報告が、役立てば幸いである。

## 参考文献


［１］蛭子井博孝；”デカルトの卵形線の２，３の性質”、日本図学会誌、図学研究、12 号、1973 年

［２］EBISUI、H；” An Extension To Fourth Order Surface by the Oval with 3 Inversion Points”, Proc, 8th ICGG, Austin、1998、

［３］ヒルベルト、コーン・フォッセン；”直観幾何学”、みすず書房、1970.

［４］蛭子井博孝；”デカルトの卵形線の曲率円”日本図学会誌、図学研究、19 号、1976 年

# Dovalの法接交点

## (コンフィギュラチオン(１５₄，２０₃)のある作図法)

蛭子井博孝
卵形線研究センター

このノートでは、コンフィギュラチオン[1](１５₄，２０₃)を構成する１５点と２０本の線分、および、補助となる１点、１直線、２線分、７つの円からなる図形について語る。　それは、図形(１５₄，２０₃)の作図手順と、それに伴う初等幾何学の帰結である。

その図形は、図１の中の１直線上の３点①、F、②、および直線外の点③より、以下のように定まるものである。このノートでは、仮定、帰結、仮定、帰結　帰結の証明と述べてゆく。その仮定の順序が、作図手順である。

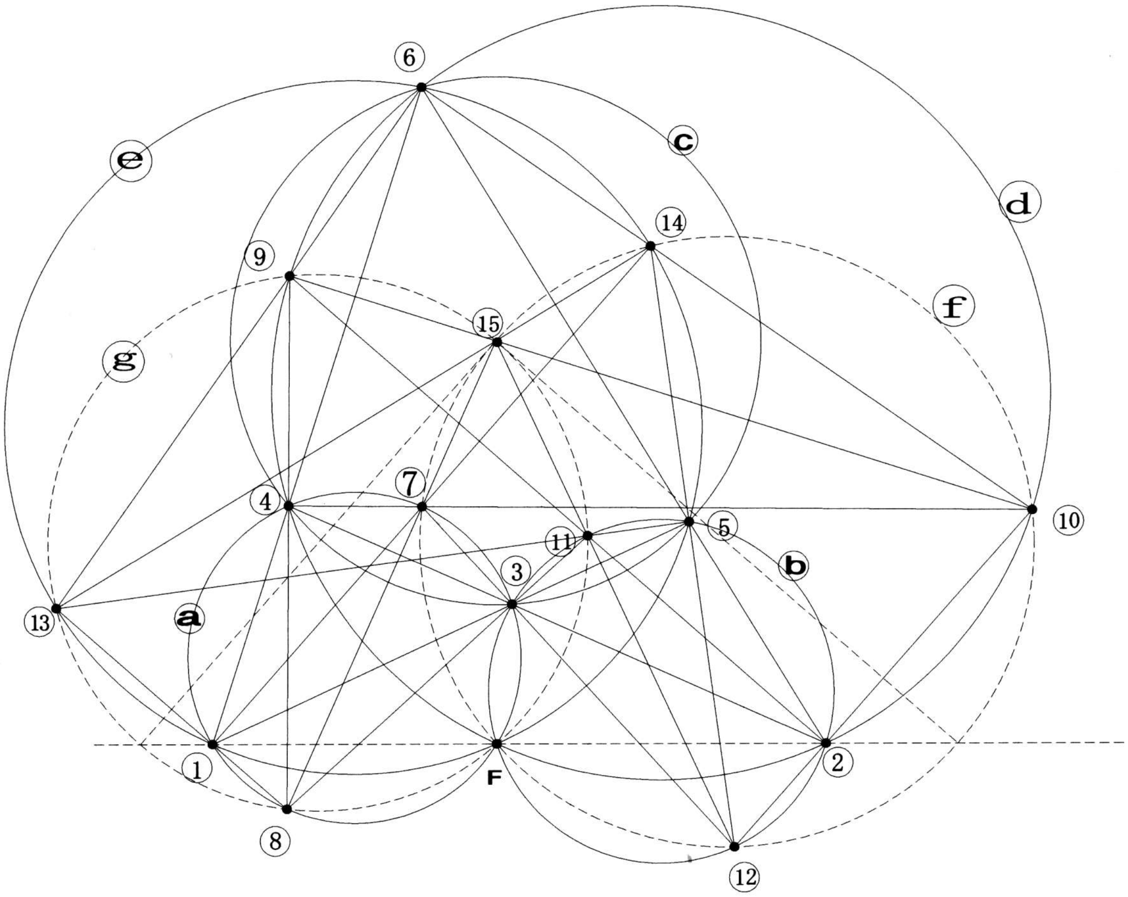



図 A

図Aにおいて、

『仮定１』

１．１直線上に３点①、F、②、および直線外の点③をとる。

１．△　①F③の外接円を円aとする。

１．△　②F③の外接円を円bとする。

1．直線②③と円ａとの交点を④とする。
1．直線①③と円ｂとの交点を⑤とする。
1．直線①④と直線②⑤との交点を⑥とする。

【帰結１】
４点③、④、⑥、⑤は、同一円周ｃ上にある。　【帰結２】
４点⑥、④，Ｆ、②は、同一円周ｄ上にある。
４点⑥、⑤、Ｆ、①は、同一円周ｅ上にある。

【帰結１の証明】図１において、円に内接する４角形の性質より　α１＝α２＝α３
故にα１＝α３
故に４角形③④⑥⑤の内対角の和が
180度で【結論】4点③、④、⑥、⑤は、同一円周ｃ上にある。

【帰結２の証明】図２において、円に内接する４角形と円周角の定理より赤字β１＝β２＝β３
故にβ１＝β３
故に４角形⑥④Ｆ②の内対角の和は180度、故に４点⑥、④，Ｆ、②は、同一円周ｄ上にある。
同様に赤字β１＝青字β３より
【結論】４点⑥、⑤、Ｆ、①は、同一円周ｅ上にある。

『仮定２』
1．線分③④の垂直二等分線と円ａとの交点を⑦、⑧とする。

（明らかな帰結）線分⑦⑧は、円ａの直径
∠⑦④⑧＝∠Ｒ
∠⑦③⑧＝∠Ｒ
線分⑦④＝線分⑦③
∠⑦④③＝∠⑦③④

『仮定３』
1．直線⑧④と円ｄとの交点を⑨とする。
1．直線④⑦と円ｄとの交点を⑩とする。

（明らかな帰結）線分⑨⑩は、円ｄの直径
∠⑨④⑩＝∠Ｒ
∠⑨⑥⑩＝∠Ｒ

【帰結３】
直線⑨⑩は、線分④⑥の垂直二等分線である。

【帰結３の証明】図３において、円周角の定理よりα１＝α２、また円に内接する４角形の定理より
β１＝β２ゆえにδ３＝α1+β１＝α2+β２＝δ４　円に内接する４角形よりδ４＝δ２　円周角の定理よりδ２＝δ１また、∠⑨⑥⑩＝∠Ｒ
故にγ１＝γ２＝γ３　故に３角形⑨⑥④は二等辺３角形また、δ１＋γ２＝∠Ｒ
故に∠⑨Ｇ⑥は、∠Ｒ。
ゆえに【結論】直線⑨⑩は、線分④⑥の垂直二等分線である。

『仮定４』
1．直線⑧③と円ｂとの交点を⑪とする。
1．直線⑦③と円ｂとの交点を⑫とする。

1．直線⑥⑨と直線⑤⑪との交点を⑬とする。

（明らかな帰結）線分⑪⑫は円ｂの直径
【帰結４】点⑬は、円ｅ上にある。

【帰結４の証明】図４において、仮定２よ

りε 2が等しい。また円に内接する4角形よりε 1＝ε 2
さらに、ε 3＝ε 4対頂角よりε 2＝ε 3
また、2α 2＝180度－2ε 2
2α 1＝180度－ε 1－ε 2
ゆえに　2α 2＝2α 1
円周角の定理より2α 3＝2α 2
ゆえに2α 1＝2α 2
円周角の逆定理より
ゆえに【結論】4点⑥⑬①⑤は同一円周e上にある

『仮定5』1．点⑫と点②を結ぶ
1．点②と点⑩を結ぶ

【帰結5】
点⑫、②、⑩は、同一直線上にある。

【帰結5の証明】図5において、対頂角、内接する4角形、円周角の定理よりδ 1＝δ 2＝δ 3＝δ 4
またδ 1+ε ＝180度
ゆえにδ 4+ε ＝180度
ゆえに【結論】点⑫、②、⑩は、同一直線上にある

『仮定6』
1．直線⑫⑤と直線⑥⑩との交点を⑭とする。

【帰結6】点⑭は、円e上にある。

【帰結6の証明】
図6においてβは、仮定、円周角、対頂角、円に内接する四角形の性質より、皆等しい。同様に、γも皆等しい。
故に∠⑫⑭⑩＝2∠R－2β
∠⑥⑬⑤＝2∠R－2β
ゆえに、4点⑬⑤⑭⑥は、同一円周上
ゆえに【結論】点⑭は、円e上にある

【帰結7】
直線⑪⑫は、線分③⑤の垂直二等分線である。

【帰結7の証明】図7において
円周角の定理と仮定2と対頂角よりαは皆等しい。対頂角、円周角、円に内接する4角形の性質よりβは、皆等しい。α＋β＝γとすれば、
内接する四角形の定理よりγ＝∠⑤③⑫＝∠⑤③⑫、故に3角形⑫⑤③は2等辺三角形。
また、仮定2の明らかな帰結より∠⑪③⑫は、∠R　故にδ 1＝∠R－γ＝δ 2
故にα＋β＋δ＝∠R
故に③⑤と⑪⑫は直交する。
2等辺三角形と直交することより
【結論】直線⑪⑫は、線分③⑤の垂直二等分線である。

【帰結8】
直線⑬⑭は、線分⑤⑥の垂直二等分線である。

【帰結8の証明】図8において
仮定2の帰結、円周角、円に内接する四角形、対頂角の性質よりγは皆等しい
仮定4の明らかな帰結より∠⑧③⑫＝∠⑭⑤⑬＝∠R
ゆえに、∠R－γでαは、等しい。
三角形⑥⑬⑤は、底角が等しく2等辺
また、γ＋α＝∠Rで、⑬⑭と⑥⑤直交
ゆえに【結論】直線⑬⑭は、線分⑤⑥の垂直二等分線である。

『仮定7』1．点①と点⑬を結ぶ
1．点①と点⑧を結ぶ

【帰結９】
点⑧、①、⑬は、同一直線上にある。

【帰結９の証明】図９において
$\varepsilon 1 = \varepsilon 2 = \varepsilon 3 = \varepsilon 4$ は、対頂角、円周角の定理、円に内接する４角形の内対角の和が 180 度、より、皆等しい。また、$\varepsilon 1 + \delta = 180$ 度　ゆえに $\varepsilon 4 + \delta = 180$ 度
【結論】点⑧、①、⑬は、同一直線上にある。

【帰結１０】
３点②、⑪、⑨は、同一直線上にある。
【帰結 10 の証明】図 10 において
帰結３より辺⑨⑥と⑨④は等しい。故にそれらの円周角も等しく、ゆえに線分②⑨は、∠⑥②④の２等分線、同様に帰結７より線分②⑪は、∠⑥②④の２等分線、故に、【結論】②⑪⑨は、同一直線上にある

【帰結１１】
３点①、⑦、⑭は、同一直線上にある。
【帰結 11 の証明】図 11 において
仮定２と帰結８より、線分①⑦、および、1⑭がともに∠⑥①⑤２等分線、
故に【結論】３点①、⑦、⑭は、同一直線上にある。

『仮定８』
１．線分⑨⑩と線分⑬⑭との交点を⑮とする。

【帰結１２】
５点⑭、⑮、⑦、⑫、⑩は、同一円周 f 上にある。
【帰結 12 の証明】図 12 において
４点⑥、⑭、⑤、①は、帰結４と帰結６より同一円周上にある。また、帰結 11 より、①⑦⑭は、同一直線上、故に、$\varepsilon 1 = \varepsilon 2$
また、４点⑤③⑫②は、円 b 上にある
故に $\varepsilon 2 = \varepsilon 3$、故に、$\varepsilon 1 = \varepsilon 2$ で、
【結論１】４点⑭⑦⑫⑩は同一円周上 f にある。
図 13 において、円周角の定理より α は皆等しい。
故に、【結論２】４点⑭⑮⑦⑩は、同一円周上にある。【結論 1】,【結論２】より
【結論】５点⑭、⑮、⑦、⑫、⑩は、同一円周 f 上にある。

【帰結１３】
３点⑧、⑦、⑮は、同一直線上にある。
【帰結 13 の証明】図 14 において
【帰結 12】より $\delta 1 = \delta 2$
また、円周角と対頂角より $\delta 2 = \delta 3 = \delta 4 = \delta 5$　故に $\delta 1 = \delta 5$
また、①⑦⑭は、【帰結 11】より直線
ゆえに、【結論】３点⑧、⑦、⑮は、同一直線上にある。

【帰結１４】
５点⑮、⑨、⑬、⑧、⑪は、同一円周 g 上にある。
【帰結 14 の証明】図１５において、
円周角の定理より $\alpha 1 = \alpha 2 = \alpha 3 = \alpha 4$
故に、$\alpha 2 = \alpha 4$
また、【帰結 6】より $\alpha 1 = \alpha 5$、故に $\alpha 2 = \alpha 5 = \alpha 4$
故に【結論】５点⑮、⑨、⑬、⑧、⑪は、同一円周 g 上にある。
『仮定９』１．点⑪と点⑮とを結ぶ。

【帰結１５】３点⑫、⑪、⑮は、同一直線上にある。
【帰結１５の証明】図 16 において
円周角の定理より

α 1 = α 2
対頂角より α 2 = α 3、さらに円周角より
α 3 = α 4 = α 5 = α 6
故に α 1 = α 6　これと【帰結１０】より
【結論】３点⑫、⑪、⑮は、同一直線上にある。

以上より
【帰結１６】
点①から点⑮において、それらを結ぶ線分は、図のように４本ずつあり、逆に２０本の線分の上に３点ずつ点がある。
故に 点①から点⑮ とその点を通る２０本の線分は、$(15_4,\ 20_3)$ のコンフィギュラチオンをなす。
付【帰結１７】
点⑮と、円 g と破線①②の交点を結ぶ線分は、円 g の直径である。
点⑮と、円 f と破線①②の交点を結ぶ線分は、円 f の直径である。

【帰結 17 の証明】
図 17 において、円周角と、円に内接する 4 角形より α は、皆等しい。ゆえに、同位角が等しく、【結論１】⑮を通る破線と直線①⑭は平行　同様に、β は皆等しい。⑦⑧直径　ゆえに　α + β =∠ R、ゆえに、【結論２】線分⑨②と線分①⑭は、直交する。
結論１，２より【結論３】⑮を通る破線は、線分⑨⑪に垂直、
また、三角形⑦④③は仮定より 2 等辺三角形、帰結 13 より⑧⑦⑮は直線
故に、三角形⑮⑨⑪も、2 等辺三角形
これと、【結論 3】より、⑮を通る破線は円 g の直径、
円 f についても同様

参考文献

[1]ヒルベルト、コーン・フォッセン；”直観幾何学”、みすず書房、1970.

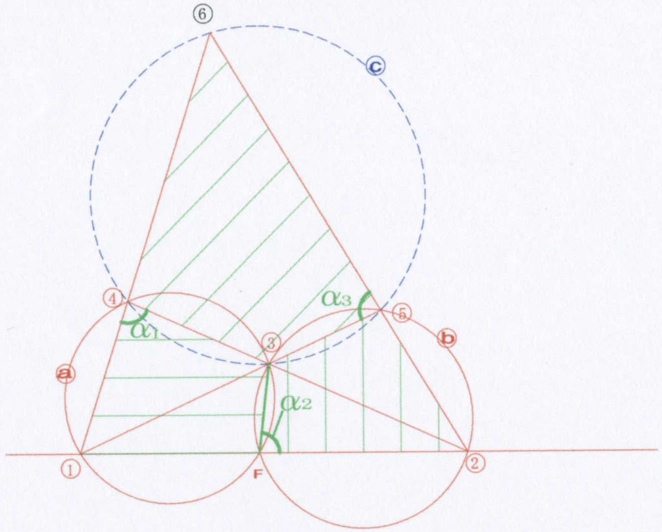



図1

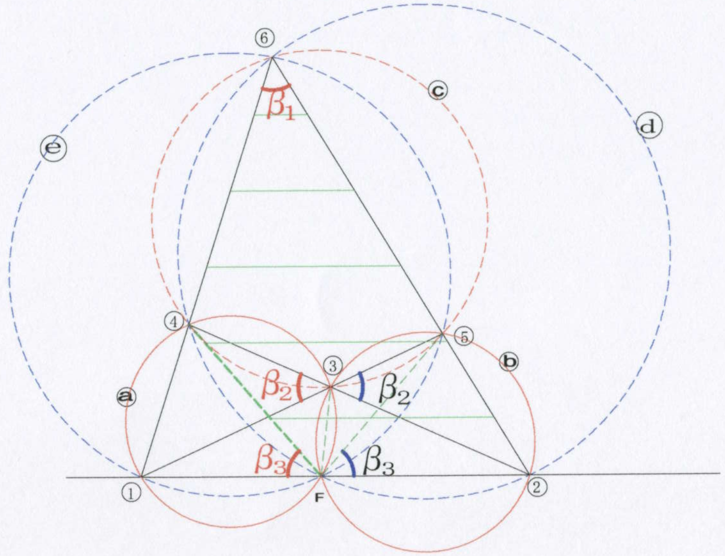



図2

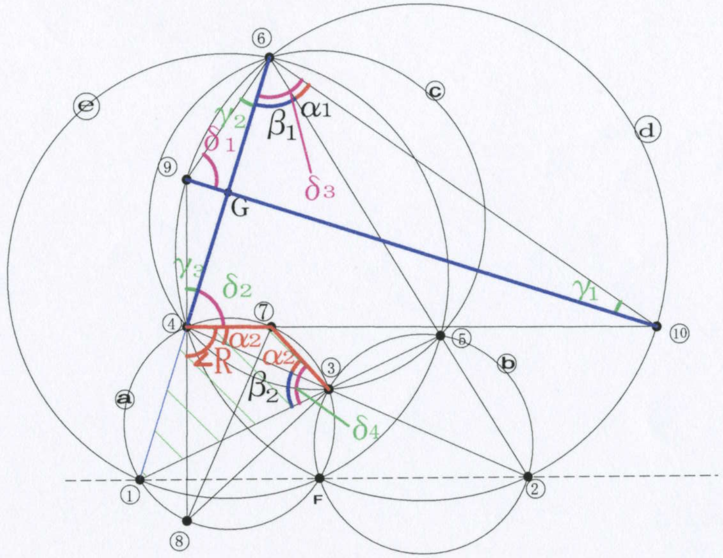



図3

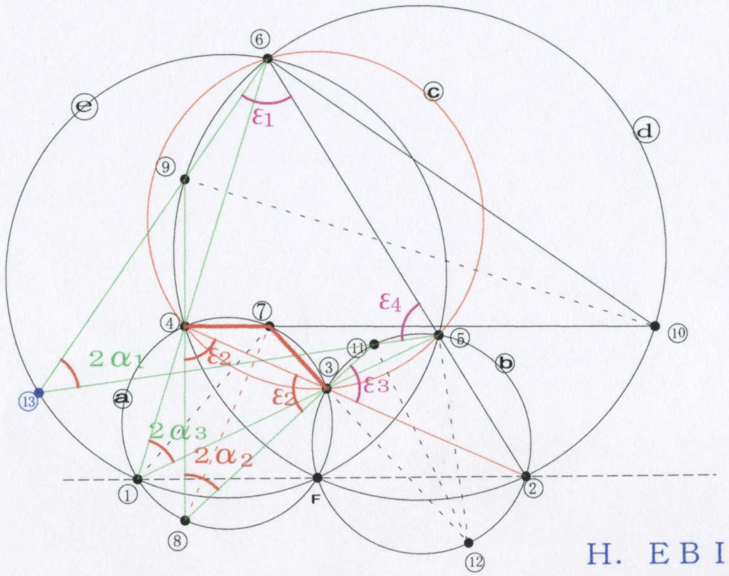



図4

H. EBIS

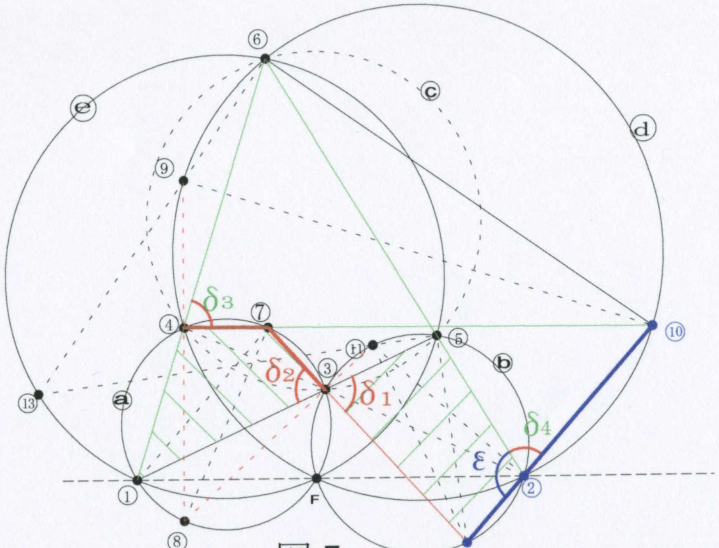



図５

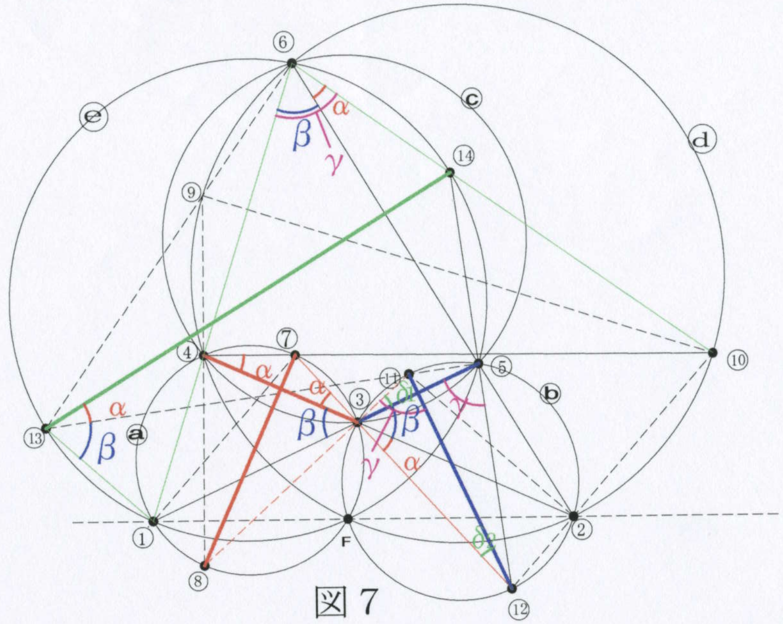



図７

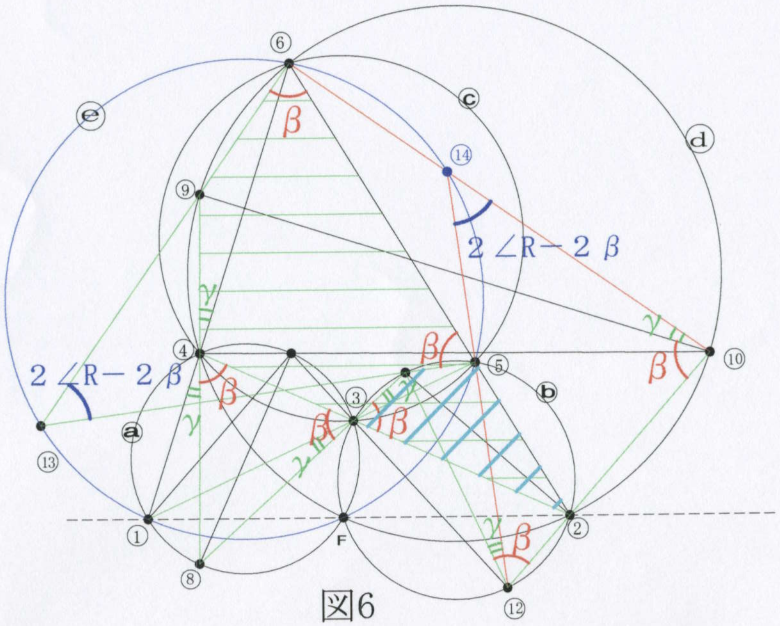



図6

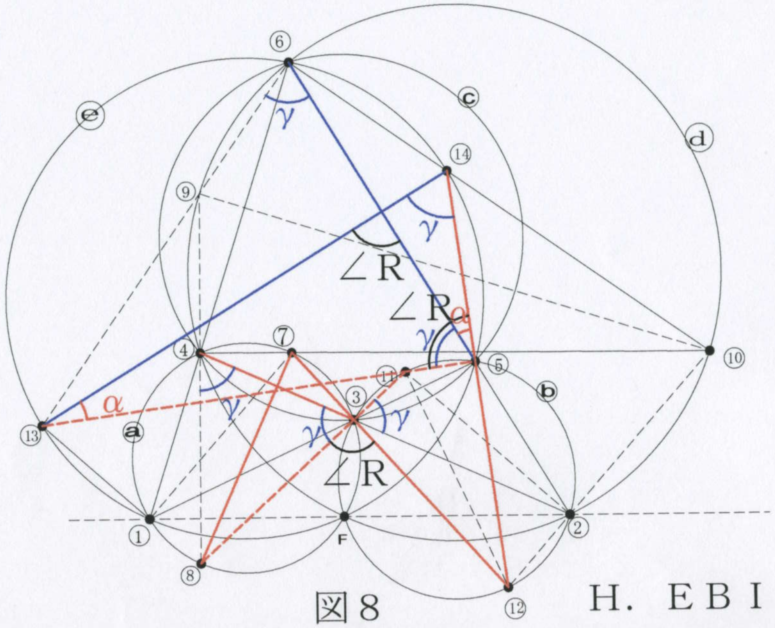



図８

H. E B I

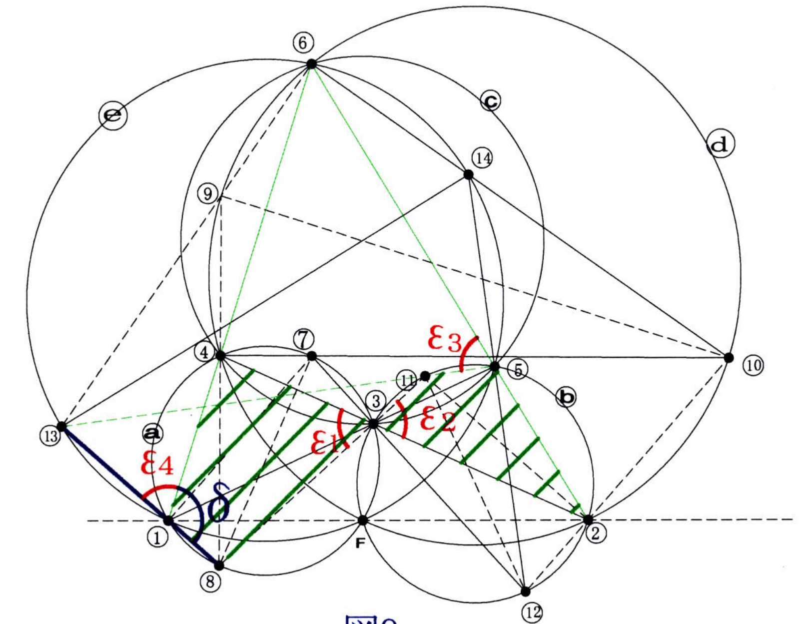



図9

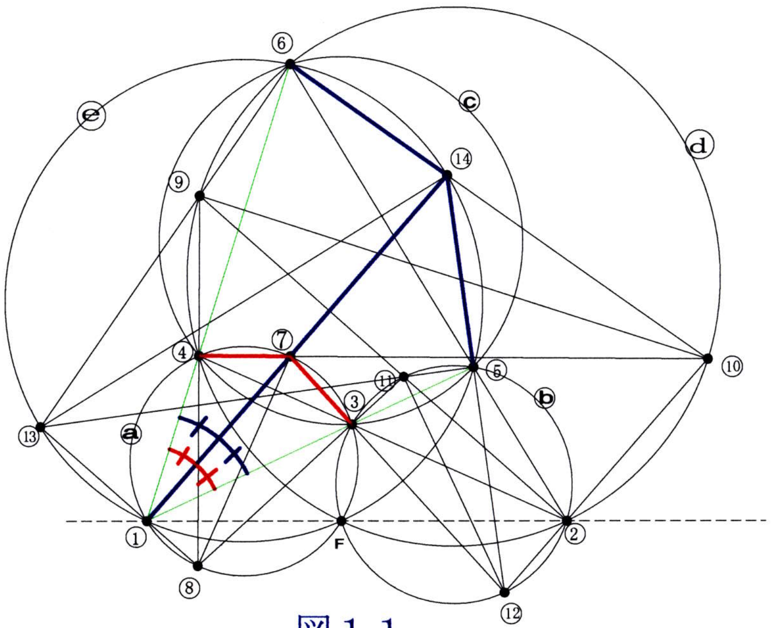



図１１

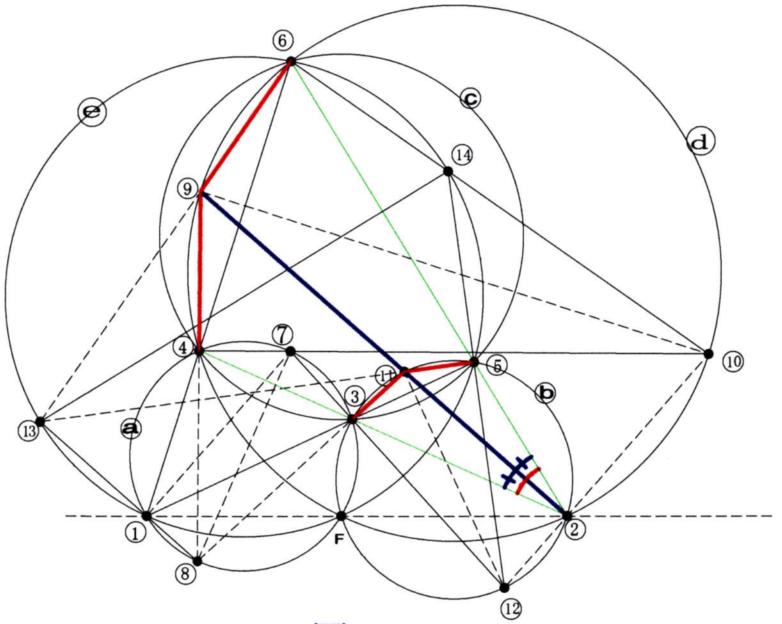



図１０

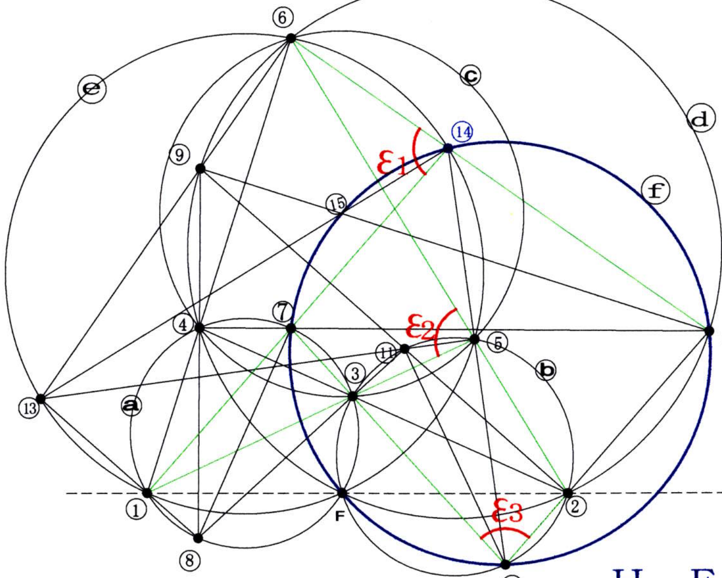



図１２

H. ＥＢ

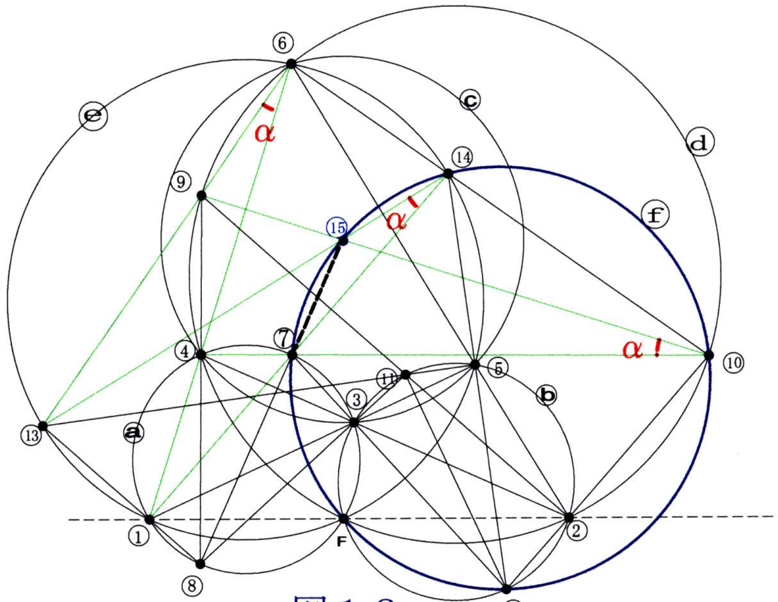



図１３

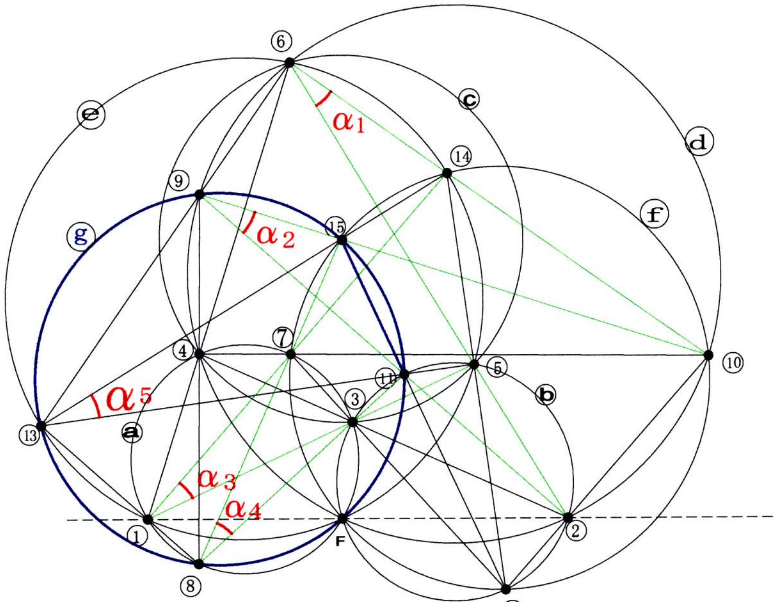



図15

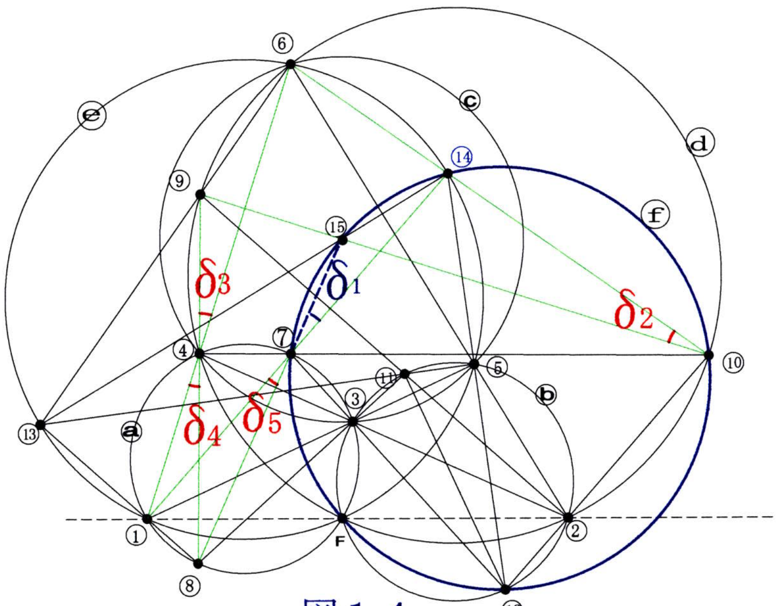



図１４

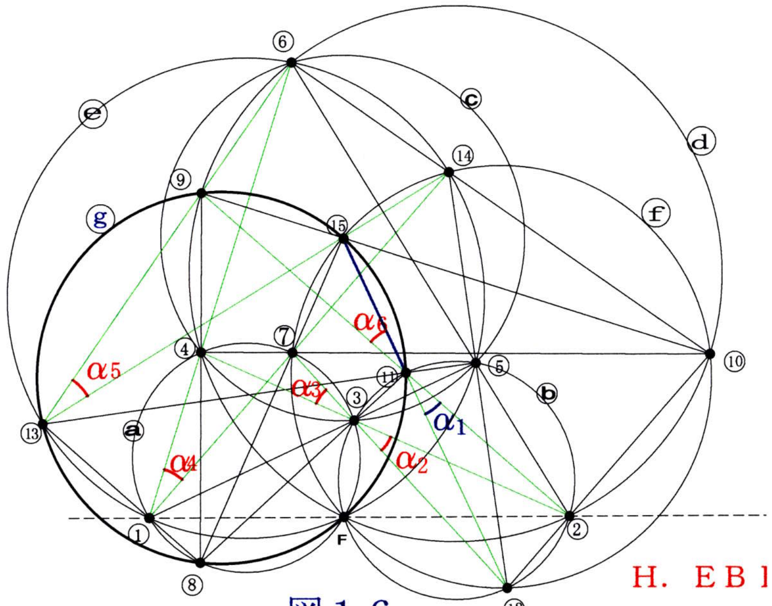



図１６

H. EB1

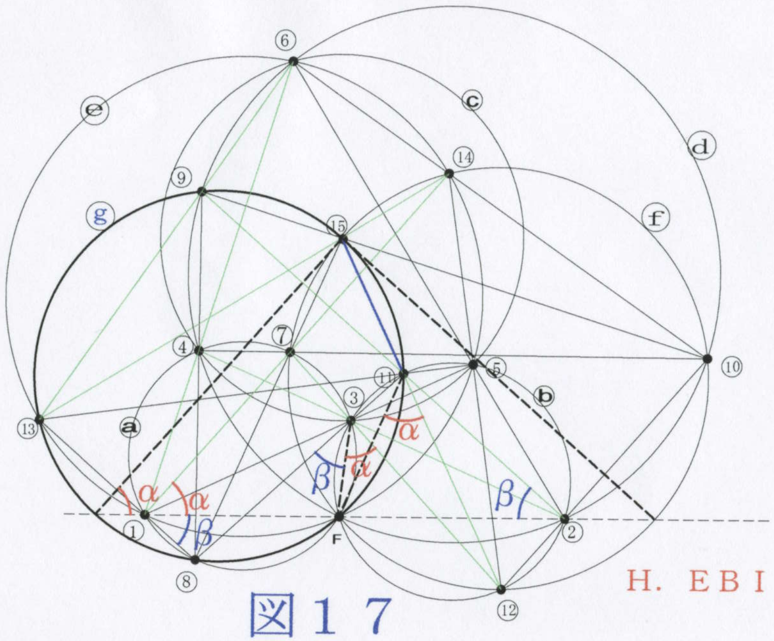



図１７

H. EBISUI

# Doval の随伴円について

蛭子井博孝
卵形線研究センター

要旨：点と円からとの距離の比が一定な曲線として定義される Doval は、代数曲線であるが、そこに様々な幾何構造が付随している。その主なものは、3 つの焦点、補助円の構図（直交定理）、短軸の構図等々。
今回、随伴円の構図を見つけた。その性質は、運動幾何ソフト Cabri を用いるとよく分かる。ここでは、その構図作成に、平行線を用いているが、非平行な交わる 2 直線でも、随伴円が作図できることが分かった。さらに、随伴円を作る 4 点が定義する随伴曲線も、考えてみた。随伴円の性質とともに、随伴曲線の形は、Doval に付随する、幾何構造として、有限、無限の概念を含むものである。そして、代数曲線そのものでなく、それに随伴して存在すること。言い換えると、代数曲線が、付帯構造を持つことの発見である。さて、随伴円は、CAD や Cabri など、科学技術ソフトなしでは、容易に語れないものである。その意味でも、Doval の随伴円や随伴曲線は、古典的に定義される Doval の現代的性質といってよかろう。

キーワード：平面幾何：Doval， **随伴円、運動幾何、Cabri、随伴曲線**

## 1．Doval　について

### 1．1　Doval の定義

**【定義】　点と円とから曲線上の点までの２つの距離の比が一定な曲線をDovalという。**

図1において、２つの距離とは、まず、定円（中心、半径；$F_1$、kc/m）$F_1$ 内に、１点$F_2$（中心より右側にとる。$F_1F_2$=c）をとり、円内の曲線上の一点をＰとする。点とＰとの距離は，線分$PF_2$である。P と円との距離は、Ｐと円の中心を結ぶ半径が円周と交わった点をＡとしたとき、線分 PA が、距離となる。　　PA：$PF_2$＝n：m（n, m は任意定数）のとき，P が描く、円内と円外にできる曲線を合わせて Doval という。以上のように定数を取ると，点Ｐは、双極座標で

$mr_1 \pm nr_2 = kc$... ①　を満たす。

なぜなら、$F_1P + PA = F_1P + (n/m)PF_2 = kc/m$　この式の分母mをはらって①を得る。

①を得るために定円の半径を kc/m と複雑にした。ここで、任意定数は，　k>m>n>0を満たす。

また、内分枝は、いわゆる卵形で、凸閉曲線で、外分枝は、k-m-n>０の時　凸、k-m-n<０の時　凹である。

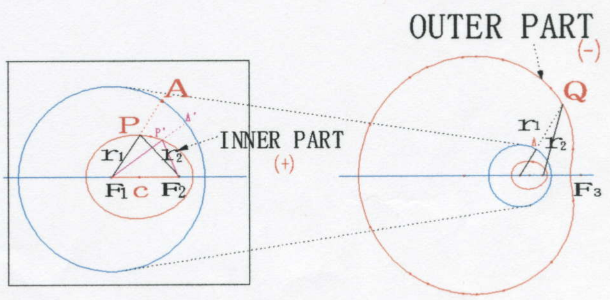



図１　Doval の定義

また①式を，ｘ、ｙ座標にすると

740-0012 山口県岩国市元町 4 丁目 12-10　http://dorell.mo-blog.jp/domy

$$(m^2-n^2)^2\left\{y^2+X^2-\frac{(k^2m^2+k^2n^2+m^2n^2)c^2}{(m^2-n^2)^2}\right\}^2=-\frac{8k^2m^2n^2c^3}{m^2-n^2}X+\frac{4k^2m^2n^2(k^2+m^2+n^2)c^4}{(m^2-n^2)^2}$$

$X = x + n^2c/(m^2-n^2)$

## １．２　Dovalの性質　図２，３参照

### １．２．１【作図定理】[1] 任意の２つの円０1，円０２が補助円（Dovalに頂点で接する円）として与えられたとき，この卵形線を描くこと。

円Ｏ１，円Ｏ２（Ｏ１≠Ｏ２）が与えられている。２つの円の相似中心Ｆ１，Ｆ２を求め，Ｆ１，Ｆ２を通り，互いに平行な直線ｌ１，ｌ２を引く。ｌ１と円 Ｏ１，Ｏ２が交わる点をそれぞれＮ１，Ｎ１’，Ｎ２，Ｎ２’とし，同様にＭ１，Ｍ１’，Ｍ２，Ｍ２’をとる。次に直線Ｎ１’Ｍ１’と直線Ｎ２Ｍ２’が垂直に交わる点をＰ、同様に直線Ｎ１Ｍ１’とＮ２’Ｍ２’が垂直に交わる点をＱとする。すると，Ｐ，Ｑは，Ｎ１あるいはＭ１が円 Ｏ １上を動くとき，卵同様の作図で、直交する点は、もう一対Ｐ’，Ｑ’がある。直交することは、1つの定理である。

なお、図2には、2つの準円も作図してある。

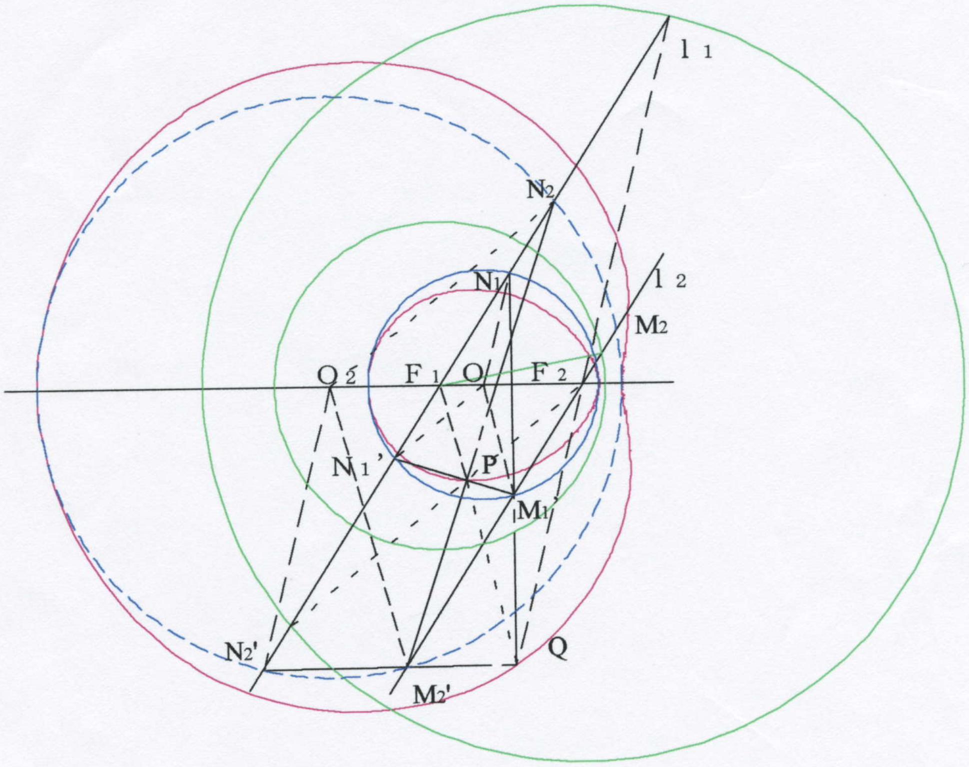



図２　Ｄｏｖａｌ　作図定理

### １．２．２　卵形線の微分幾何の頂点[2] の作図位置

卵形線の頂点は、式①を極座標にして、計算すれば、第一焦点を原点としたとき動径の回転角 $\theta$ が $\cos\theta = m/k$　のときであることがわかる。

これは、図3におけるように、作図的には、１．２．１節の平行線ｌ１，ｌ２が、焦点間を結ぶ線、または、補助円の中心線、または、卵形線の対称軸に垂直の時である。頂点は、卵形線の短軸端点[3] とは異なる。短軸とは、Doval の内分枝上の点で、内分枝の対称点の中点から一番近い点である。短軸端点の微分幾何学的定義は、未解決である。

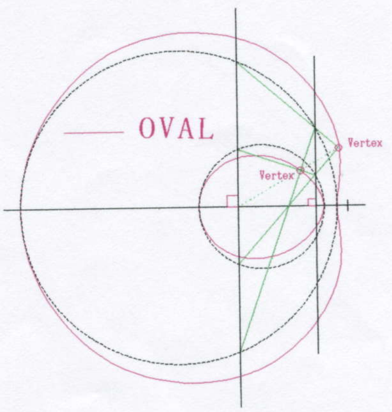



図３　Ｄｏｖａｌの頂点

## 2．Doval の随伴円

### 2．1　随伴円の作図定理

図４において、２焦点を通る２直線と補助円の交点を結ぶ線の補助円外の４交点は、同一円周上にあり、その外接円を外**随伴円**という。4交点を、内補助円内に取ると、内随伴円ができる。(図5参照)

### 2.1.1　４交点が同一円周上にあることの証明

図 4 において、焦点を通る 2 直線と補助円のなす 4 交点が作る四角形は、内対角の和が 180 度より
図の 2 つの α は等しい。β も同様である。
ゆえに、α－β＝γ は等しく、故に 2 つの γ を円周角に持つ 4 点が作る四角形は同一円周上にある。

### 2.1.2　平行非平行における随伴円

ｈ’が平行になりｈの位置でも、α、β、γ の関係は成り立ち、このことから、随伴円は、焦点を通る 2 直線が、平行非平行線でも定義できる。ただ、非平行の時、Doval との関係は、未定

１つの平行線の位置（焦点の周りを回転さす）が決まると、図 2 のように、Doval の内外分枝上の 4 点 P,P',Q,Q'が定義でき、そのときの Doval 上の 4 点に随伴円が、随伴している

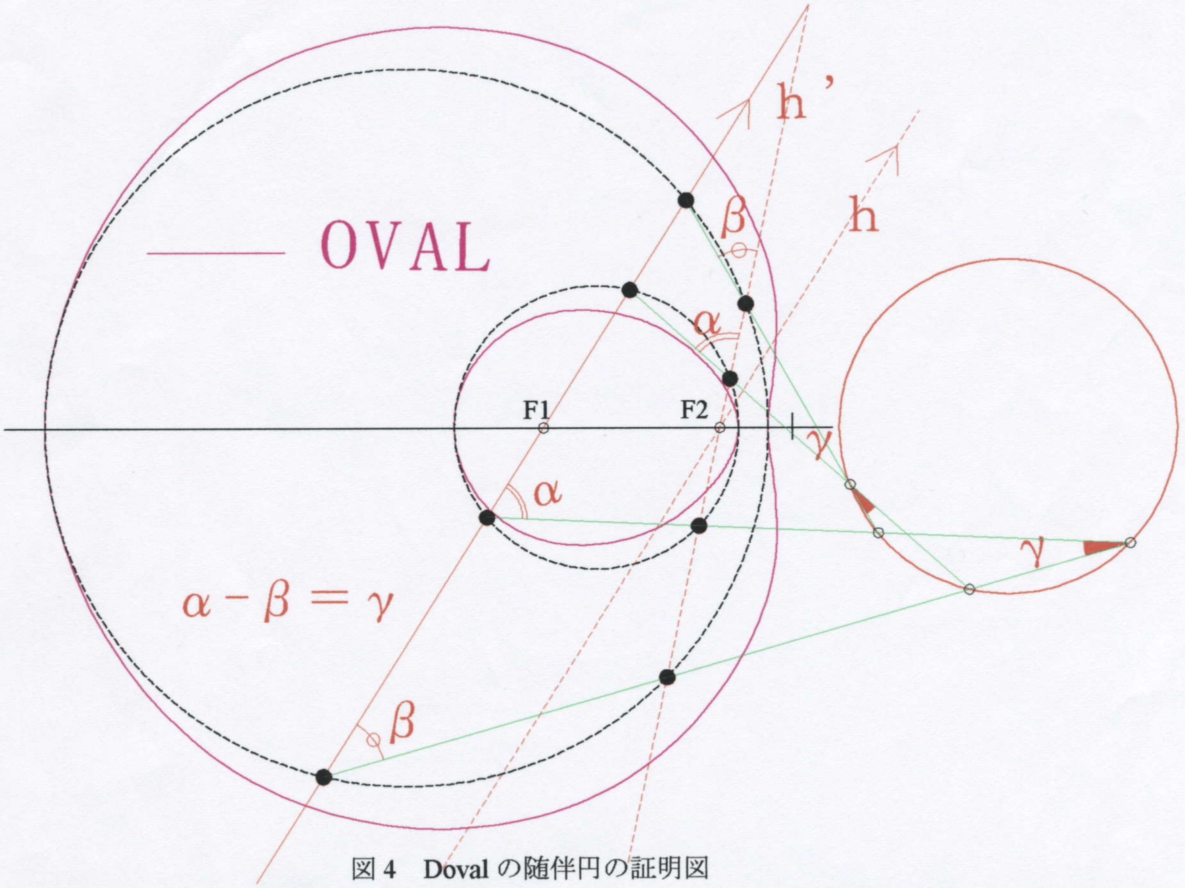



図４　Doval の随伴円の証明図

### 2．2　随伴円と随伴曲線の性質　図5，6参照

1．　内外随伴円の中心は、２つとも Doval の焦点を結ぶ対称軸上を移動する。未証明。

1．　対称軸外の頂点に対応する内外随伴円の半径は、ｌ１，ｌ２が垂直の時で、半径は、ともに０である。このときの中心の位置の点を**消進淵点**ということにする。

1．　対称軸上の頂点に対応する内随伴円の直径は、第一焦点第二焦点を結ぶ線分である。

1．　対称軸上の頂点に対応する外随伴円の直径は、無限大である。その周は、Doval の第三焦点を通る対称軸に垂直な直線である。これを、Doval の**発散壁直線**(図中一点鎖線)という。

1．内外２つの随伴円の外相似中心が、第一焦点であり、内相似中心は、第 2 焦点である。

1．2 つの消進淵点は、発散壁直線に関して、対称である。

2．随伴曲線は、4 点からでき、4 本あるが、それらは、2 本の曲線が、Doval の対称軸に関して、対称になって、できている。

2．随伴曲線の 1 つは、第三焦点を通る軸に垂直な直線を、漸近線に持つ。

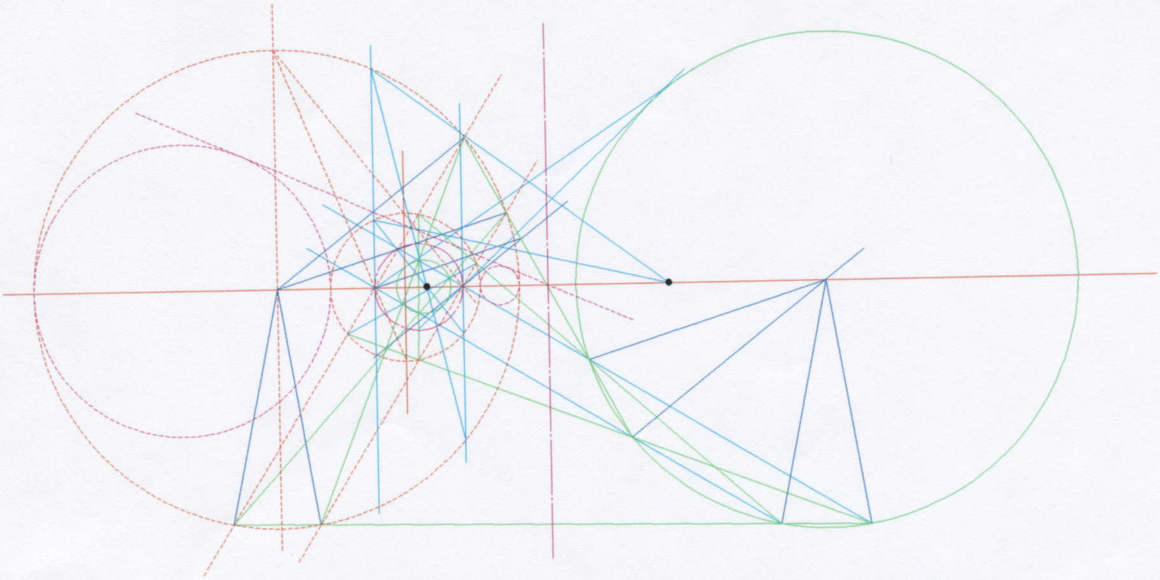


図５　Dovalの随伴円の構図　　（黒点、消進淵点）

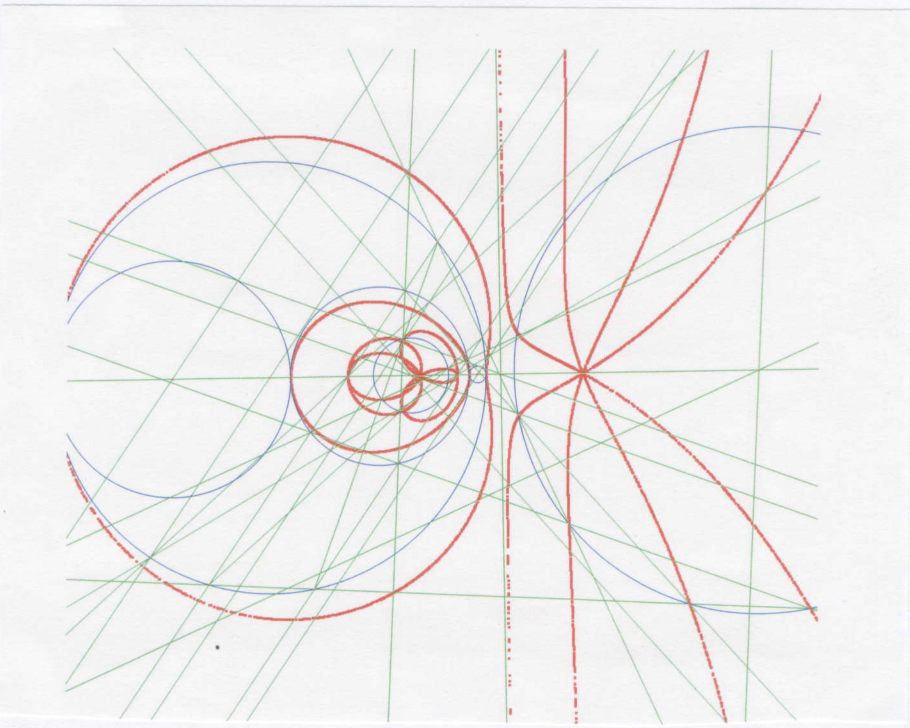


図６　Dovalと随伴曲線（Cabriによるトレース作図）（随伴曲線の交点が消進淵点である。）

## ３．むすび

ここでは、概略的にDovalの随伴円と証明を見てきた。その定義は、２つの補助円によるDovalの作図法の中の直線を用いている。言葉での説明は、省略したが、その特徴は、Doval上の１点を決める作図（４点が同時に決まる）で、２対の随伴円の位置と大きさが決まる。また、Dovalとその随伴円が、曲線論だけでなく、新しい宇宙論に役立つことを期待する。

## 参考文献


[1] 蛭子井博孝，“デカルトの卵形線の二，三の性質，”図学研究，１２号,日本図学会、1973, pp.35-49.

[2] 蛭子井博孝、“デカルトの卵形線の曲率円”、図学研究、１９号、日本図学会、1976、pp.7-11.

[3] 蛭子井博孝、“デカルトの卵形線の短軸および卵形面”、図学研究、６８号、日本図学会、1995、pp.3-8.

The 11th International Conference on Geometry and Graphics、1-5 August, 2004, Guangzhou, China

# About the Oval (Doval)

**Hirotaka EBISUI**
Oval Research Center

**ABSTRACT:** In this paper, we mention about the oval and it's new name (Doval). First, we explain the reason of naming the Oval as Doval. Next, we explain it's Definitions and Some properties and theorems, those are old and new results. And more, we describe the confocal curve of Extended Doval (chocoid), this Extended curves are defined using Orthopole theorem and they are drawn by Maple Soft. At Last, moreover we show the figure of one Extended Doval curves (Tajicoid). We append unsolved problems of Doval. We must appreciate Rapid CAD and Maple developers.

**Keywords: the Doval , confocal, chocoid, Tajicoid,Geometry, Maple, Photron Rapid cad**

## 1. INTRODUCTION

We are familiar with closed curves. But, we are not so familiar with double closed curves. Here, we define the Doval as two closed curves. Inner curve (part) is always Oval or convex. This is the reason that Doval is called as Oval. But Outer curve is not always convex. Its condition is $e_R+e_L<1$, then it's convex (Fig.1). We use a curvature of vertex to proof the problem.[1] We can find many methods of definition or draw-theorem of Doval. About two of them should be memorized. This reason is that they are elemental and essential. And, we can define Doval, but, more over, we must study the properties of Doval. <u>This time, we mention some composition, structure, expression, and theorem on Doval.</u>
These concepts have already been studied but, we want to summarize here about them.

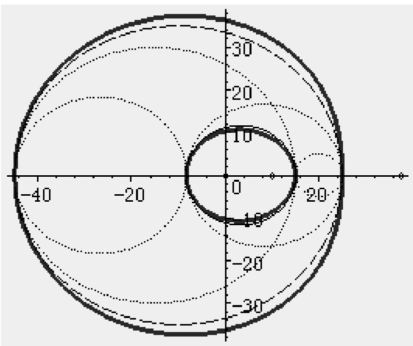



**Fig.1 Doval( both convex)**

## 2. Definitions and Theorems of Doval

*2.1 Definition1.*

We fix two circles, and one parallel line that passes through the two centers. And, we set two cross points on the parallel line and alternative circle, and connect the cross point and alternative center. Then two radius are made and its cross point appears. This point draws while the parallel line make on turn on a center, where two circle size are same, then Ellipse appears(Fig.2) and not same, then Oval appears. So this Oval can be called as pure extension of Ellipse. If we inspect precisely that composition, then in later case, two cross points appear, and they draw inner and outer part, namely double closed curves ( Doval)(Fig.3) can be drawn.[2]

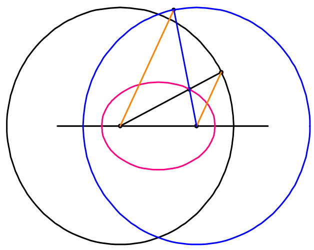


**Fig.2 Ellipse(using 2 circles)**

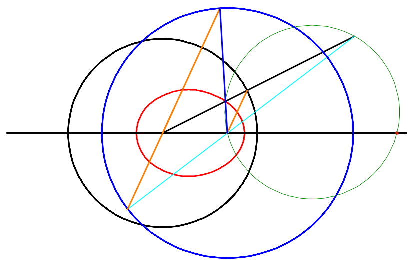


**Fig.3 Doval(using 2 circles)**

*2.2 Def – theorem of Doval using two circles*

We fix two circles ( One include the other one), and can find two similar points of them. And, we can draw one parallel lines those pass through the two similar points. Then, we can obtain 8 cross points among two circles and one parallel lines. Now, we chose 2 pair points among 4 points in above 8 points, and, next, we connect the two pair points, and determine two lines. Then they are orthogonal, and make one cross point. In Above situation, four cross points appear. (See Fig. 4) .And two of them draw inner part of Doval., the remainder draw outer part, when one parallel lines make one turn on two similar points . In this situation, Figure keeps same compositions. This proof is done.[3)]

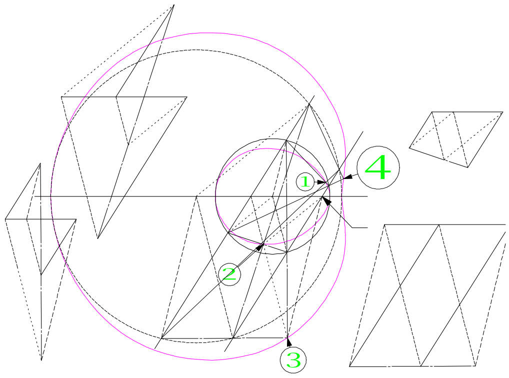



**Fig.4. Doval defined by two auxiliary circles**

(4 Surrounding compositions of Pappus theorem help this proof)

*2.3 Theorems of Doval*

2.3.1 Theorem of 3 fuci

(1) 6circles method of finding 3 foci.

One center line of one circle, we draw 3 tangent circles, and combine 2circles and draw tangent circle of two, then, more 2 circles appear. Then, totally, there are 5circles in given one circle.

In Fig.5, center circle and contour circle give Def theorem of Doval in section 2.2. Moreover, other two pairs of circle define similar compositions of the same Doval

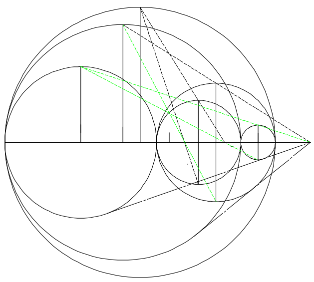


**Fig.5. Three foci defined by 6 circles**

2.3.2 Theorem of 4axes on Doval.

Ellipse has minor axis. And 10 years ago, we found minor axis of the oval like Ellipse. And after, we find 4 axes of Doval.

**[Theorem] Si,Ai,So,Ao satisfy following Invariant equation**

$$\left(\frac{Ai}{Si}\right)^2 + \left(\frac{Ao}{So}\right)^2 = 2$$

which is free from definition-circles size.,

where Si is the length of symmetry inner major axis.

Ai is the length of asymmetry inner minor axis.

So, Ao are outer cases as same as inner part.

We must pay attention that minor and major are reverse on inner and outer parts of Doval. Si, Ai, So, Ao are 4 radii of tangent circle of Doval.

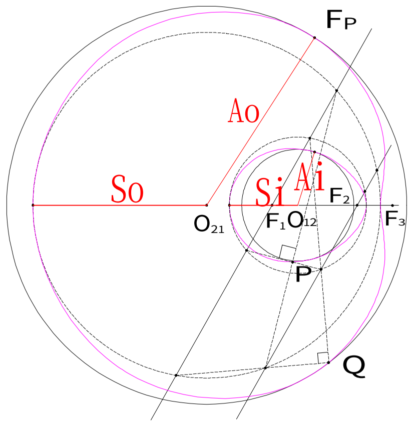



**Fig.6 Relations of 4 Axes So, Ao, Si, Ai**

*2.4. A standard form of Doval equation.*

Doval is defined by bipolar coordinates equation.

$$mr_1 \pm nr_2 = kc$$

This bipolar equation can be transformed to a standard equation by x-y coordinates

$$(m^2-n^2)^2\{y^2+X^2-\frac{(k^2m^2+k^2n^2+m^2n^2)c^2}{(m^2-n^2)^2}\}^2 = -\frac{8k^2m^2n^2c^3}{m^2-n^2}X + \frac{4k^2m^2n^2(k^2+m^2+n^2)c^4}{(m^2-n^2)^2}$$

$$X = x + \frac{n^2c}{m^2-n^2}$$

*2.5. Other some properties of Doval*

In this section, we mention some properties or theorems without proofs.

2.5.1. Right and Left Eccentricity determines a shape of the Oval (Doval). One Doval has( ER,EL) for inner part and (ER,—EL) for outer part.

2.5.2. The end point of Minor Axis is not the Vertex of the Oval. This means that the end point have a special Differential Geometry meaning.

2.5.3. Perpendicular Bisectors of Asymmetry Axes pass through the 3rd focus point. This theorem applies a definition of the third focus point-position.

2.5.4. We can not approximate All of EGGs Shape by the Ovals. Dr G.F.NAGY in Hungary and I find this result. Namely, bird eggs form are more variety than Dovals.

2.5.5. Confocal Dovals exsist. More precisely, we can say that Dovals have any two of three foci as confocal points, and 3foci as confocal points.

## 3. EXTENDED CURVES OF DOVAL

So for, we consider about own properties of Doval. But, we can extend Doval to hyper curves with same structure.

*3.1 Chocoid*

This curve Chocoid is one extension of Doval with more than 3 foci.. To define this curve, we use following composition. In Fig.7 ,we define extended Orthopole Q using fixed points O , F1, F2, F3, F4, F5, F6 on line g , and fixed perpendicular lines, h1, h2, h3, h4, h5, h6, and moving circle OT. When T moves from point F3 to infinity position on line g, Q draw one part of chocoid.

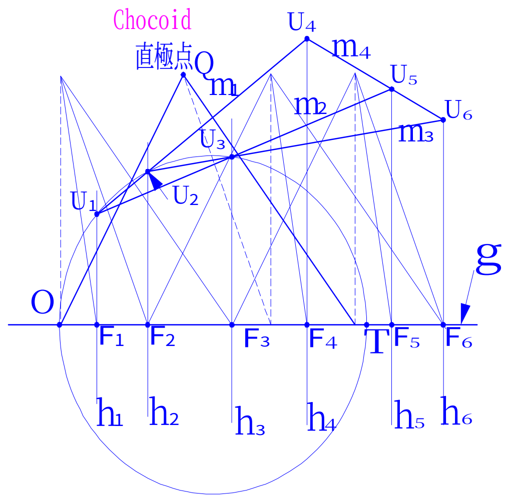



**Fig.7. a definition composition of chocoid.**

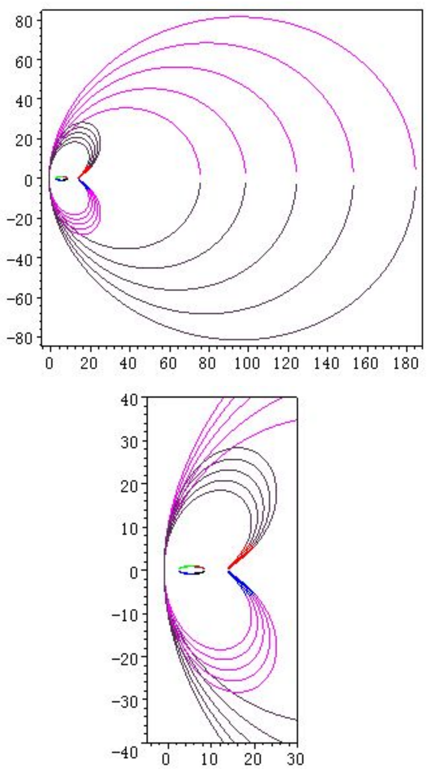


Fig.8. confocal chocoids ( lowwer is precise view of upper figure)

*3.2 Tajicoid*

In last ICGG, we report about Tajicoid. In this paper, we show that figure and some Tajicoids with different parameters, namely different foci.

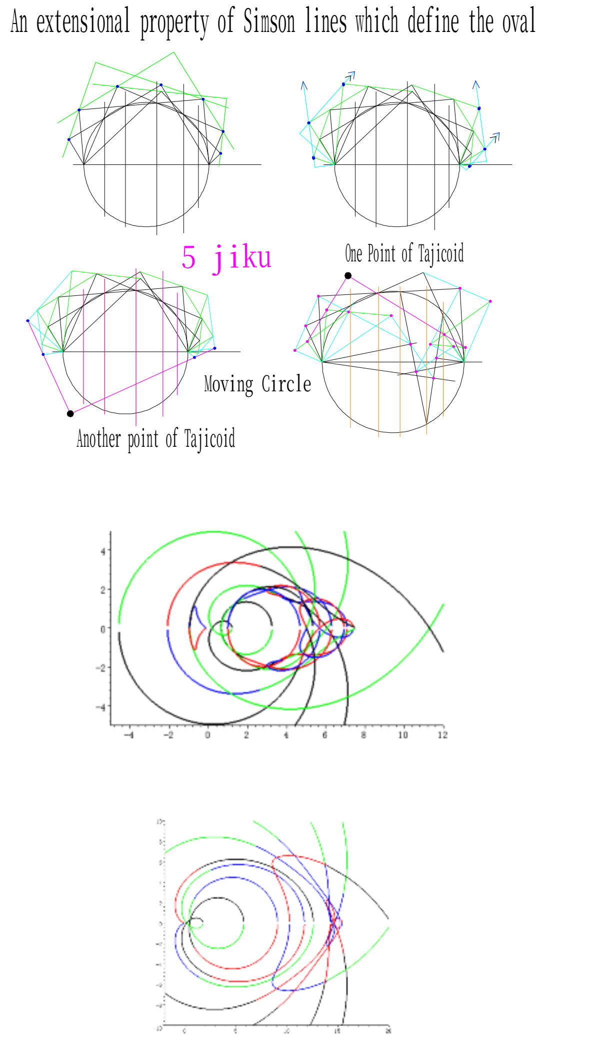



Fig.9 Def figure and Two kinds of Tajicoid (INSIDE VIEW)

We show a program of tajicoid with Parameter x1, x2,x3,x4,x5.

```
> # tajicoid-no1.5-2.5+2004-3-11 by H.E:
> #x=0-kitenn,shouten x1,x2,x3,x4,x5
> #(X1,Y1) to (X2,Y2) wo tooru Line he (0,0) yori kudasita
suisen no asi (XP,YP):
> restart:
> with(plots):
XP:=(Y1*X2-X1*Y2)*(Y1-Y2)/((X1-X2)^2+(Y1-Y2)^2):
YP:=(X1*Y2-Y1*X2)*(X1-X2)/((X1-X2)^2+(Y1-Y2)^2):
> qx12:=subs(X1=x1,Y1=y1,X2=x2,Y2=y2,XP):
> qy12:=subs(X1=x1,Y1=y1,X2=x2,Y2=y2,YP):
> qx23:=subs(X1=x2,Y1=y2,X2=x3,Y2=y3,XP):
> qy23:=subs(X1=x2,Y1=y2,X2=x3,Y2=y3,YP):
> qx34:=subs(X1=x3,Y1=y3,X2=x4,Y2=y4,XP):
> qy34:=subs(X1=x3,Y1=y3,X2=x4,Y2=y4,YP):
> qx45:=subs(X1=x4,Y1=y4,X2=x5,Y2=y5,XP):
> qy45:=subs(X1=x4,Y1=y4,X2=x5,Y2=y5,YP):
>
```

```
> rx12:=subs(X1=qx12,Y1=qy12,X2=qx23,Y2=qy23,XP):
> ry12:=subs(X1=qx12,Y1=qy12,X2=qx23,Y2=qy23,YP):
> rx23:=subs(X1=qx23,Y1=qy23,X2=qx34,Y2=qy34,XP):
> ry23:=subs(X1=qx23,Y1=qy23,X2=qx34,Y2=qy34,YP):
> rx34:=subs(X1=qx34,Y1=qy34,X2=qx45,Y2=qy45,XP):
> ry34:=subs(X1=qx34,Y1=qy34,X2=qx45,Y2=qy45,YP):
>
> sx12:=subs(X1=rx12,Y1=ry12,X2=rx23,Y2=ry23,XP):
> sy12:=subs(X1=rx12,Y1=ry12,X2=rx23,Y2=ry23,YP):
> sx23:=subs(X1=rx23,Y1=ry23,X2=rx34,Y2=ry34,XP):
> sy23:=subs(X1=rx23,Y1=ry23,X2=rx34,Y2=ry34,YP):
> # (X1,Y1) to (X2,Y2) wo tooru Line he (XS,0) yori kudasita
suisen no asi (XP,YP):!
s:=(-X1*X2+X1^2+Y1^2-Y1*Y2+XS*(X2-X1))/((X1-X2)^2+(Y1-Y
2)^2):
> XP:=s*(X2-X1)+X1:
> YP:=s*(Y2-Y1)+Y1:
>
> qx21:=subs(X1=x1,Y1=y1,X2=x2,Y2=y2,XP):
> qy21:=subs(X1=x1,Y1=y1,X2=x2,Y2=y2,YP):
> qx32:=subs(X1=x2,Y1=y2,X2=x3,Y2=y3,XP):
> qy32:=subs(X1=x2,Y1=y2,X2=x3,Y2=y3,YP):
> qx43:=subs(X1=x3,Y1=y3,X2=x4,Y2=y4,XP):
> qy43:=subs(X1=x3,Y1=y3,X2=x4,Y2=y4,YP):
> qx54:=subs(X1=x4,Y1=y4,X2=x5,Y2=y5,XP):
> qy54:=subs(X1=x4,Y1=y4,X2=x5,Y2=y5,YP):
>
> rx21:=subs(X1=qx21,Y1=qy21,X2=qx32,Y2=qy32,XP):
> ry21:=subs(X1=qx21,Y1=qy21,X2=qx32,Y2=qy32,YP):
> rx32:=subs(X1=qx32,Y1=qy32,X2=qx43,Y2=qy43,XP):
> ry32:=subs(X1=qx32,Y1=qy32,X2=qx43,Y2=qy43,YP):
> rx43:=subs(X1=qx43,Y1=qy43,X2=qx54,Y2=qy54,XP):
> ry43:=subs(X1=qx43,Y1=qy43,X2=qx54,Y2=qy54,YP):
>
> sx21:=subs(X1=rx21,Y1=ry21,X2=rx32,Y2=ry32,XP):
> sy21:=subs(X1=rx21,Y1=ry21,X2=rx32,Y2=ry32,YP):
> sx32:=subs(X1=rx32,Y1=ry32,X2=rx43,Y2=ry43,XP):
> sy32:=subs(X1=rx32,Y1=ry32,X2=rx43,Y2=ry43,YP):
>
> # (sx12,sy12)-(sx23,sy23)=line  kouten(XK,YK)
(sx21,sy21)-(sx32,sy32)=line:
>
XK:=-((sx12*sy23-sy12*sx23)*(sx21-sx32)-(sx21*sy32-sx32
*sy21)*(sx12-sx23))/((sy12-sy23)*(sx21-sx32)-(sy21-sy32
)*(sx12-sx23)):
YK:=((sy12-sy23)*(sx21*sy32-sx32*sy21)-(sy21-sy32)*(sx1
2*sy23-sx23*sy12))/((sy12-sy23)*(sx21-sx32)-(sy21-sy32)
*(sx12-sx23)):
```

```
> j:=0:
> colorpared:=[black,red,blue,green]:
> for i1 from -1 to 1 by 2 do
for i2 from -1 to 1 by 2 do
for i3 from -1 to 1 by 2 do
for i4 from -1 to 1 by 2 do
for i5 from -1 to 1 by 2 do  j:=j+1:
XD:=subs(XS=t,x1=1.5,y1=i1*sqrt(1.5*t-1.5^2),x2=2.5,y2=
i2*sqrt(2.5*t-2.5^2),x3=3,y3=i3*sqrt(3*t-3^2),x4=4,y4=i
4*sqrt(4*t-4^2),x5=5,y5=i5*sqrt(5*t-5^2),XK):
YD:=subs(XS=t,x1=1.5,y1=i1*sqrt(1.5*t-1.5^2),x2=2.5,y2=
i2*sqrt(2.5*t-2.5^2),x3=3,y3=i3*sqrt(3*t-3^2),x4=4,y4=i
4*sqrt(4*t-4^2),x5=5,y5=i5*sqrt(5*t-5^2),YK):
T[j]:=plot([ XD,YD,t=5..infinity],view=[-15..15,-15..15
],numpoints=100,color=colorpared[(i4+3)+(i5+3)/2-2]):
od;od;od;od;od;
> display ({seq(T[j],j=1..32)});# by H.E:
```

## 4. CONCLUSION

So far, we mention about Doval and its extensions. Tajicoid, and chocoid can be extended to higher chained curves. But, now, recent PC must need more ability in CPU speed and memory and Maple Soft Technique. If it can be done, Higher chained Tajicoid and chocoid can show more interesting forms.

We have a lot of unsolved questions about Doval. For Example

1. How do more than two eccentricity exit in extended Doval?
2. What is the eccentric angle of Doval?

Ellipse is defined using x=a*cos(s), y=b*sin(s). In this formula, s is called as the eccentric angle.

## 5. REFERENCES


1. Hirotaka EBISUI, Form(凹凸) of the Oval using eccentricity, Proc. of 1999 Conference, Kyushuu branch of G.S. of Japan.
2. Hirotaka EBISUI, Two Kinds (Chocoid, Tajicoid) of Curves Extended From The Oval, Proc. of 10th ICGG, 2002, Kyiv, Ukraine
3. Hirotaka EBISUI, An Extension to Fourth Order Surfaces By The Oval With 3 Inversion Points, Proc. of 8th ICGG, 1998, Austin,Texas,USA.


**ABOUT THE AUTHOR**

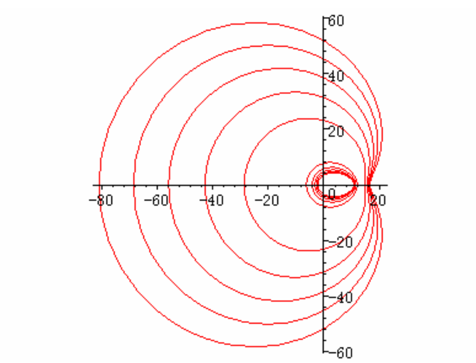

Hirotaka EBISUI, graguated from Dep. of Applied Physics, F.E., Osaka-u , is free researcher. His interests is " What is Doval? And its Application.". He can be reached by hirotaka.ebisui@marble.ocn.ne.jp Tel&Fax +81-827-22-3305, or through postal address: Oval Research Center 4-12-10,Motomachi,Iwakuni, 740-0012, Japan.

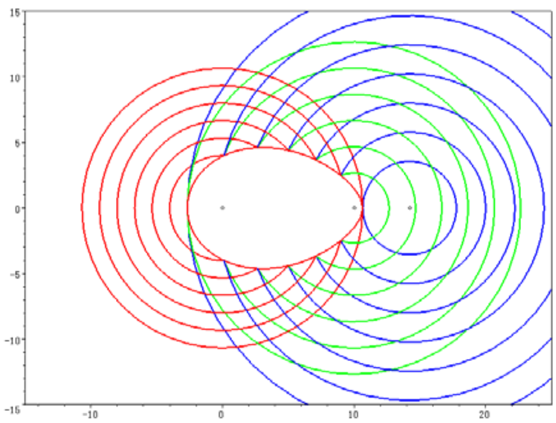
# About Oval　(Doval)


Hirotaka　Ebisui

Oval Research Center

IWAKUNI near HIROSHIMA


Confocal Doval　　　　　　　　Three　　focus　points

共焦点 Doval　　　　　　Trade Mark　(E$_R$=0.9,E$_L$=0.6)

# 1． Introduction

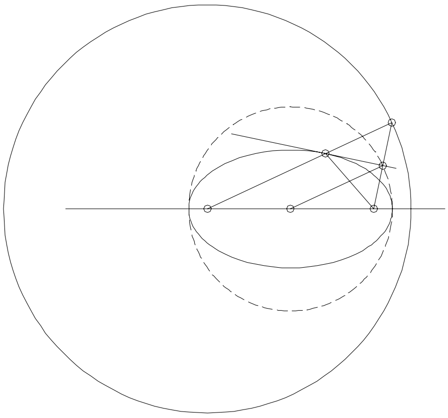


Fig.1. Composition of Tangent on Ellipse

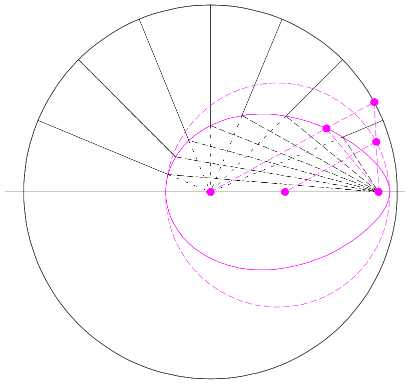


Fig.2. Oval extended from Ellipse

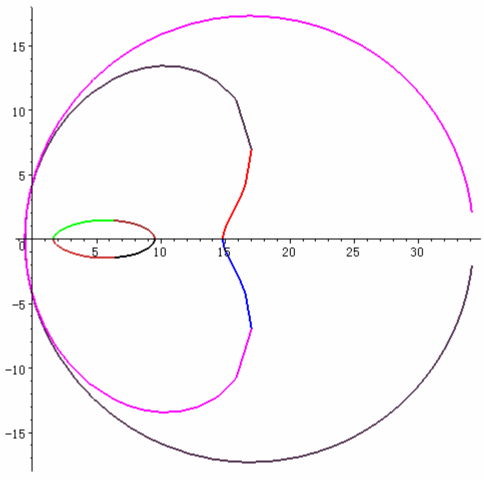



Fig.3.Chocoid extended from Doval

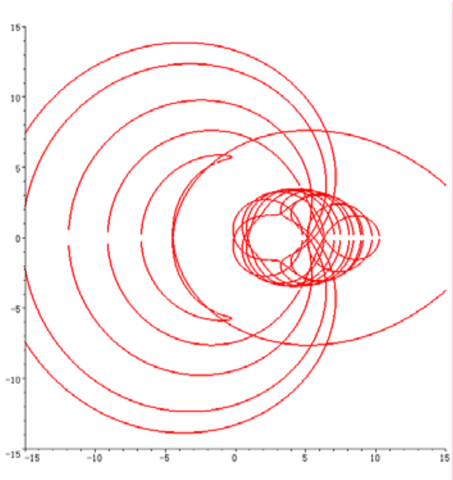


Fig.4．Tajicoid extended from the Oval

Tangent line is a perpendicular bisector in Fig.1

We extend bisector(1:1) to (n:m), then Oval is obtained.

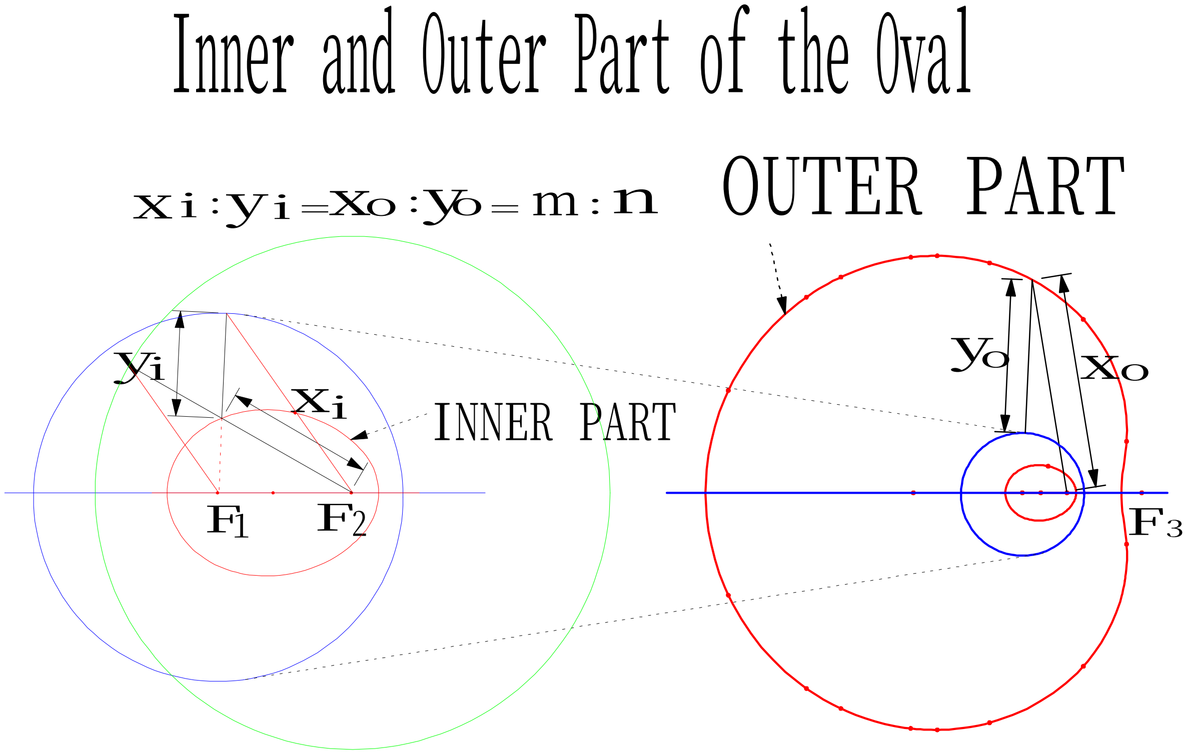
When ratio is (n:m), then DOVAL(theOval) is also defined by mR1±nR2=kc。

But Chocoid and Tajicoid have not yet a simple equation. It can be only defined by Maple Program which is made by Definition-Composition of Chocoid and Tajicoid respectively.

by H.E

## 2． Definition of Doval

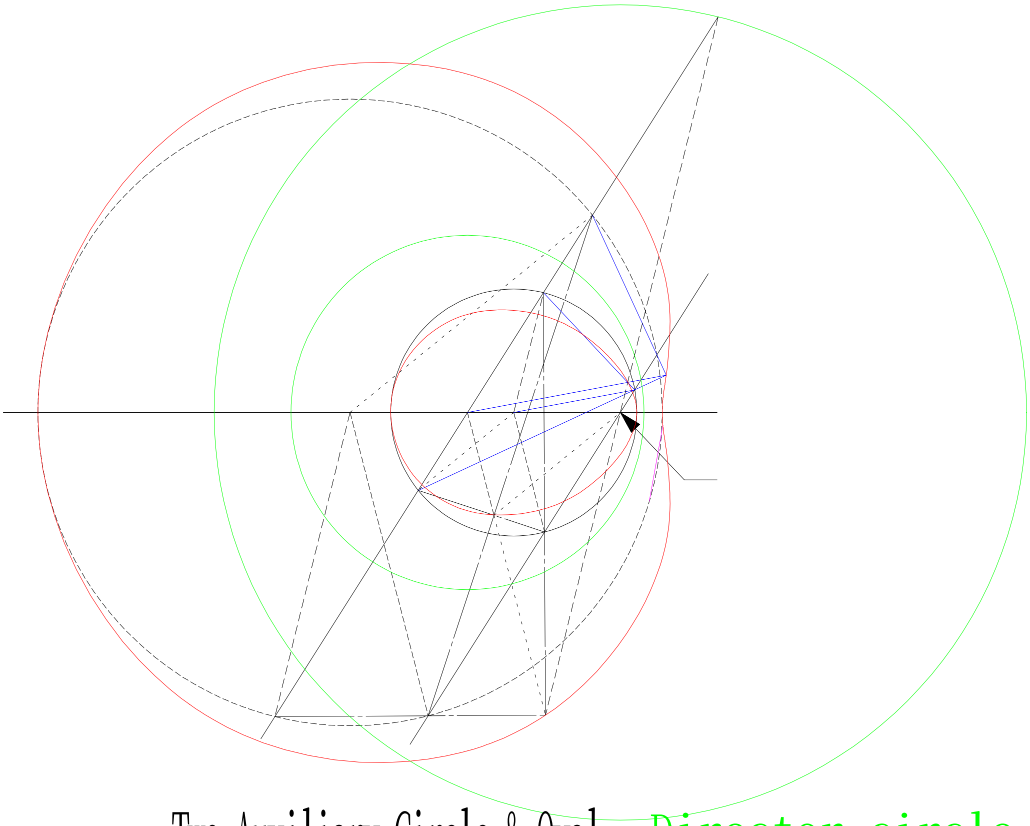
We call inner and outer part of Oval as DOVAL




$$m r_1 \pm n r_2 = k c$$

Radius of Director circle = kc/m,  kc/n

# 2' Definition of Doval



Two Auxiliary Circle & Oval　Director circle

Radius of Auxiliary Circle =kc/(m+n), kc/(m-n)

## 3. Distance between Main Points of Doval

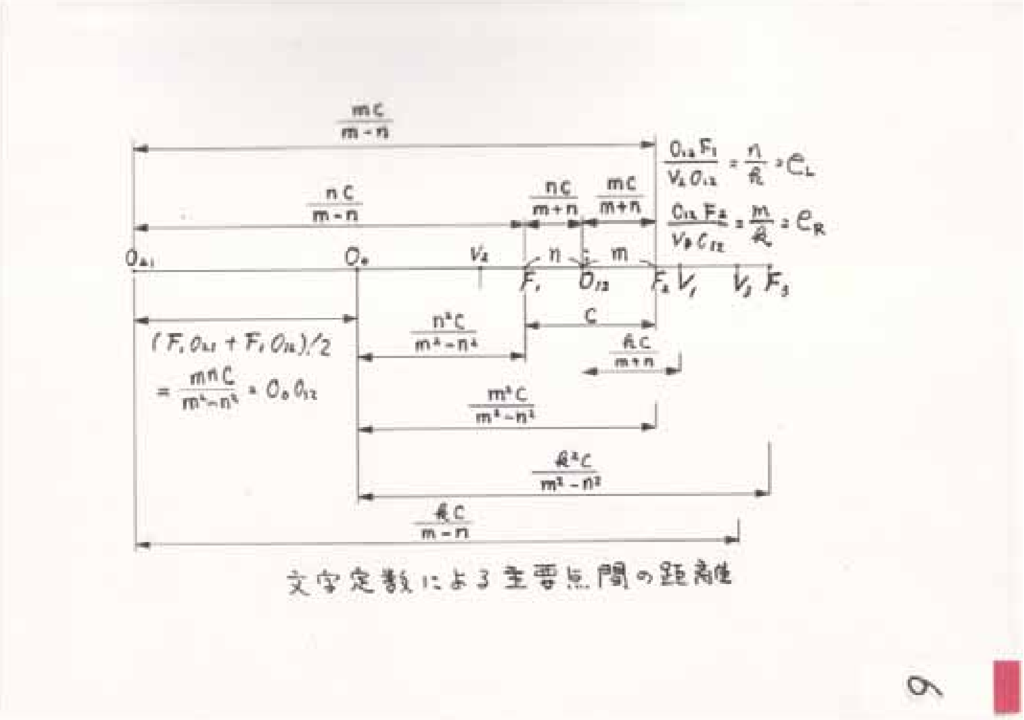


Table 1

*We ashume Doval is defined by $mr_1 \pm nr_2 = kc$

*$O_{21}, F_1, O_{12}, F_2$ : harmonic range of Points

*$O_0$ : Middle Point between two CENTERS OF auxiliary Circles（or named Center of equivalent Circles）

*Pairs of these four $O_0, F_1, F_2, F_3$ on a line define Doval.

Main result of this figure is $O_0F_1 = n^2/(m^2-n^2)$

$O_0F_2 = m^2/(m^\wedge-n^2)$

$O_0F_3 = k^2/(m^2-n^2)$

Raius of three equivalent Circle

$E1 = mn/(m^2-n^2)$, $E2 = kn/(m^2-n^2)$, $E3 = km/(m^2-n^2)$ BY H.E

# 4. PROPOSITION

# HOUSETSUKOTEN

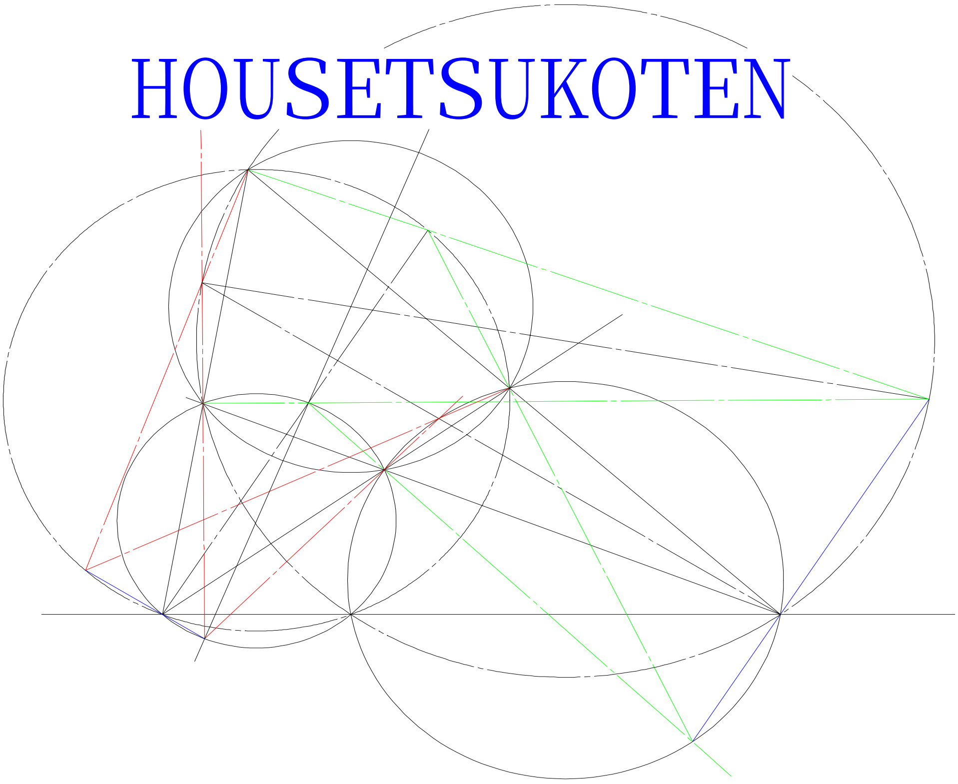


Fig.8. Green lines are tangent of Doval.

Red lines are normal lines of Doval

----STANDARD FORM OF Doval Equation--

$mr_1 \pm nr_2 = kc$ is transformed to followings

$$(m^2-n^2)^2\{y^2+X^2-(\frac{k^2m^2+k^2n^2+m^2n^2}{(m^2-n^2)^2})c^2\}^2$$

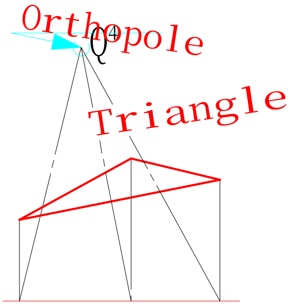
$$=-\frac{8k^2m^2n^2c^3}{m^2-n^2}X+\frac{4k^2m^2n^2(k^2+m^2+n^2)c^4}{(m^2-n^2)^2}$$

$$X=x+\frac{n^2c}{m^2-n^2}$$

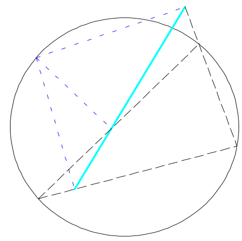
by H.E

# 5． Infinity Chain Theorem

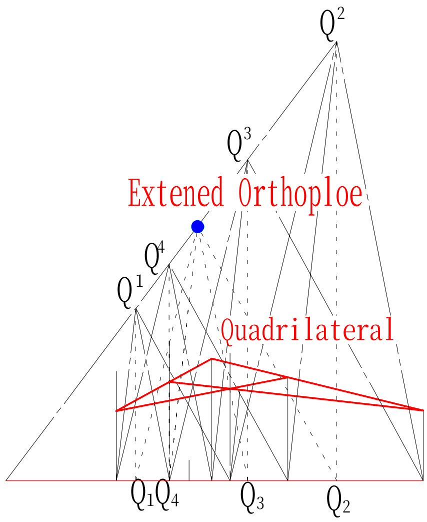
We use following theorem in order to define Chocoid and Tajicoid.



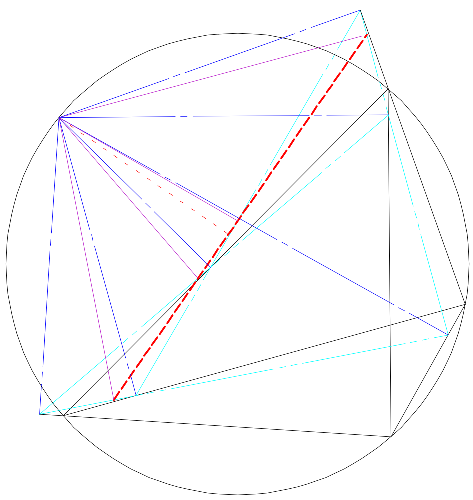

Step 1



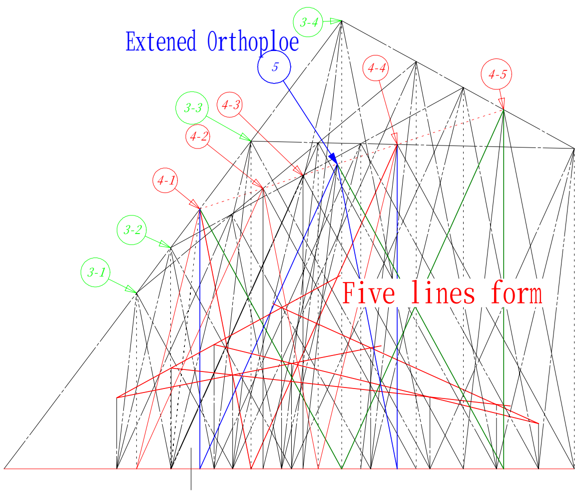
Simson Theorem (Step1(Chain3))



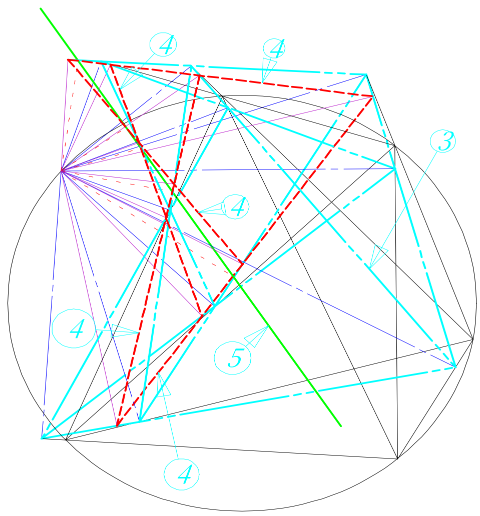

Step 2 (Chain 4)



Step 2(Chain 4)




Step 3 (Chain 5)




Step 3 (chain 5)

Fig.9. Orthopole Chain

Fig.10. Simson Chain by H.E

# 6． Relation of Extended Curves Chocoid and Tajicoid

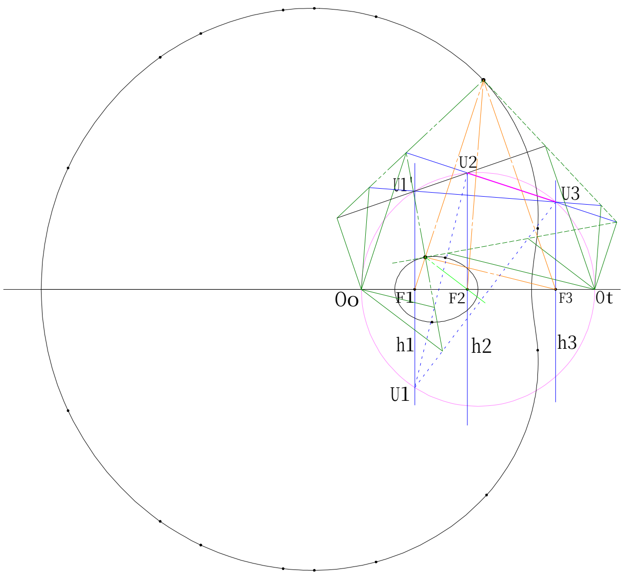



Fig.11.

In this fugure. Orthopole and Simson cross-point are on same position.

(1) Extension of Doval using extended Simson theorem-Composition。

Tajicoid is defined using This figures.
Program is in the proceeding.

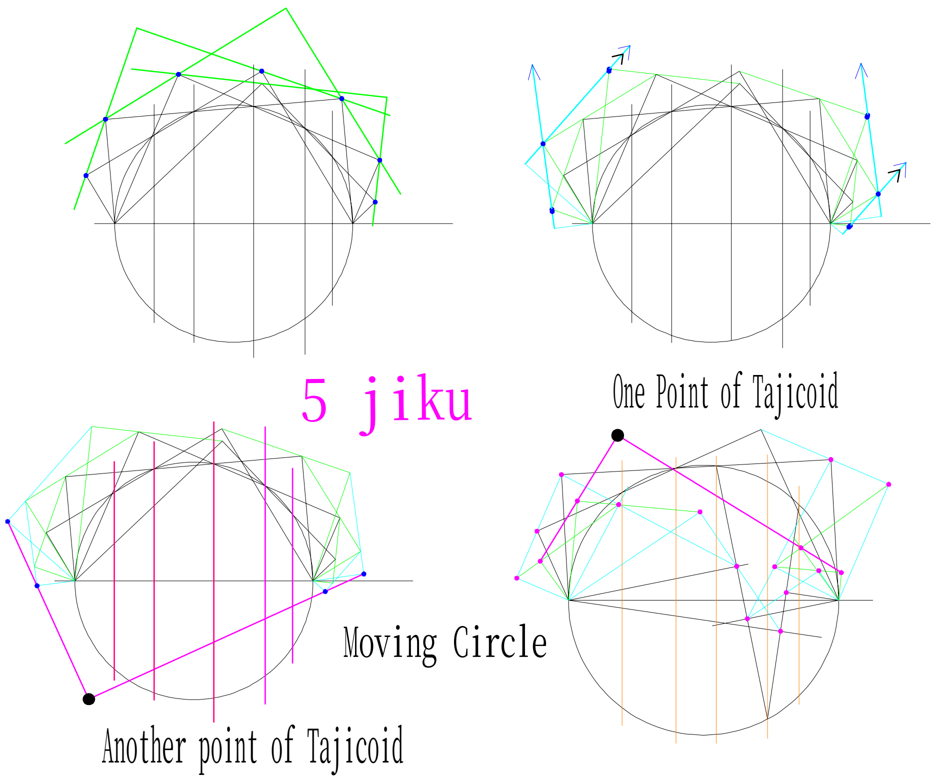



Fig.12.　Def. Figure of Tajicoid　　　　　by　H.E

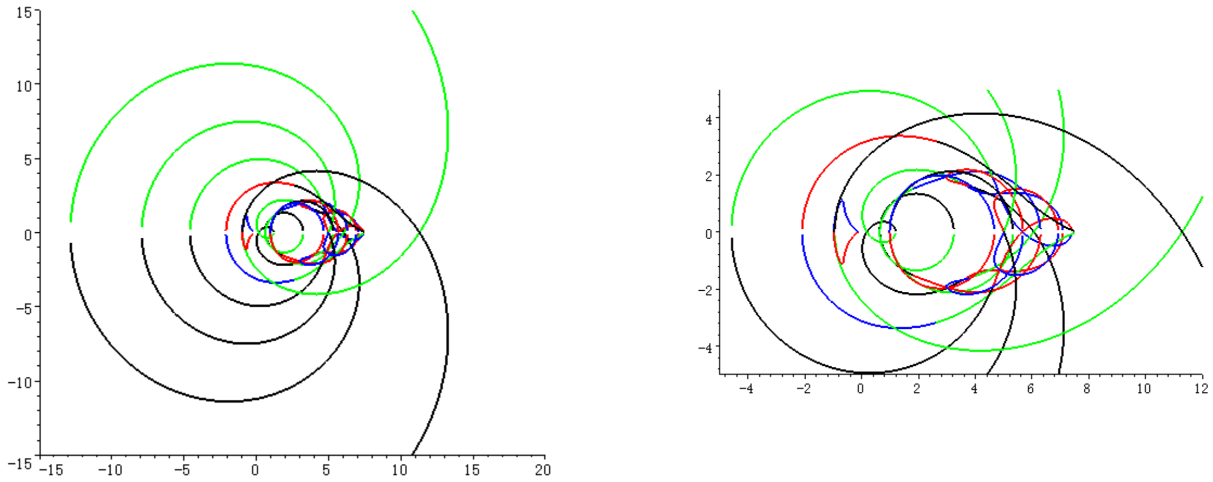


FIG.13.　Tajicoid パラメーター1，2，3，4，5

(2) Extension of Doval using extended Orthopole theorem-Composition。

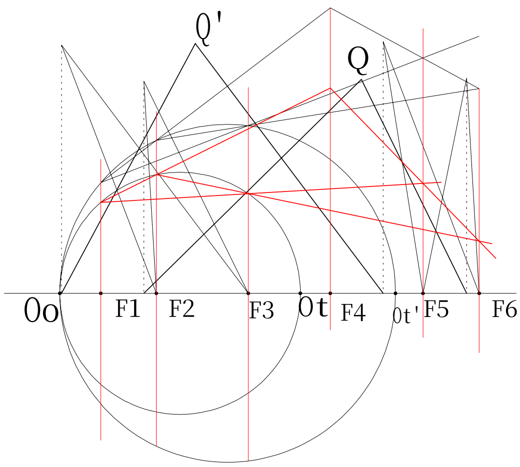
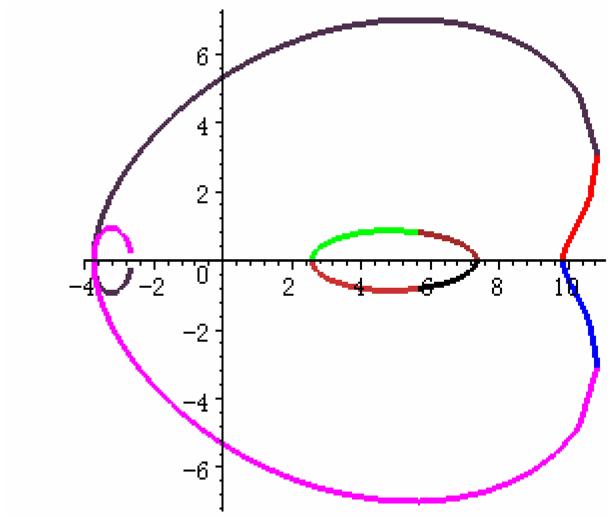


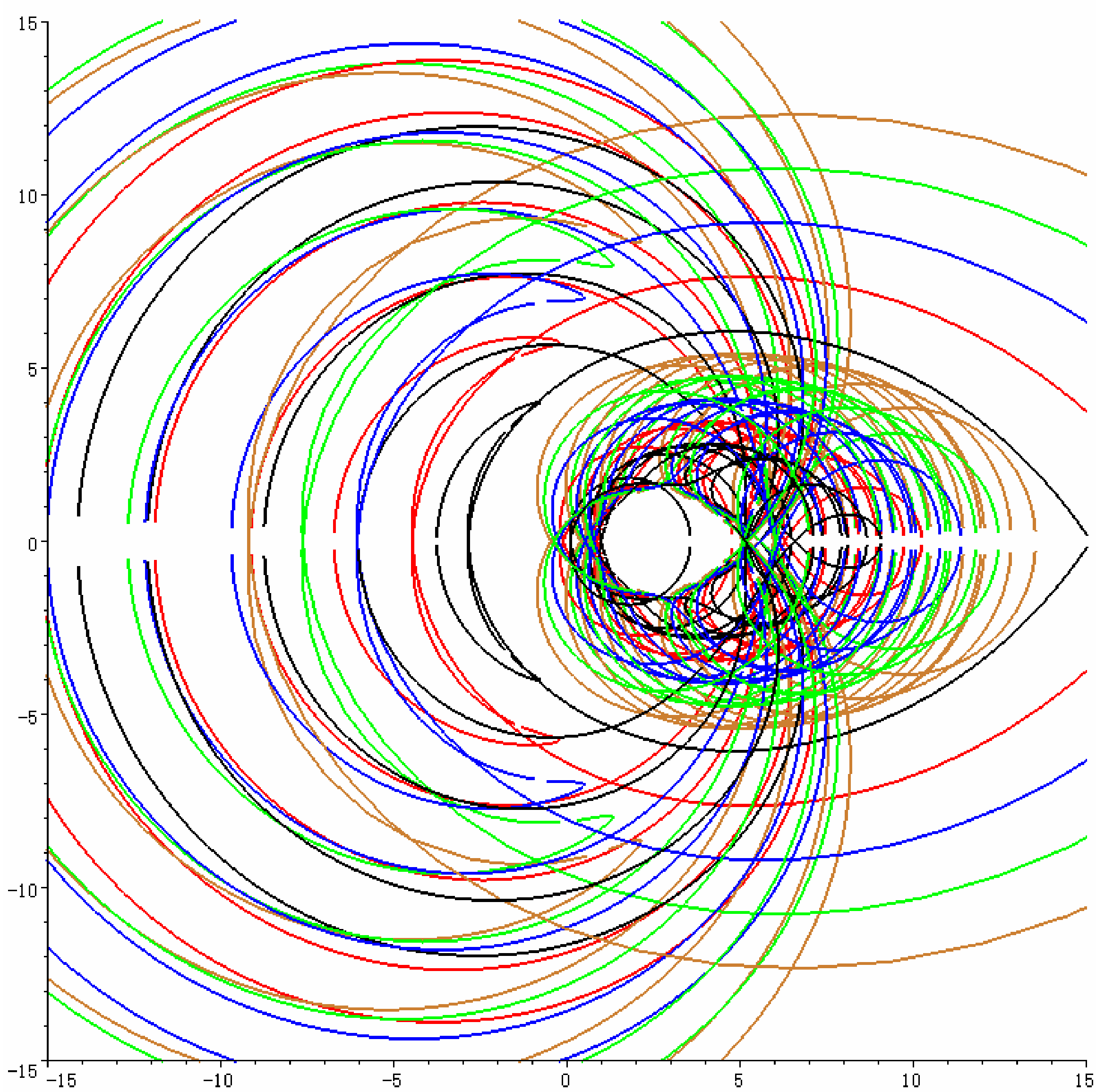

FIG.14.　　DEF Figure Of Chocoid



Parameter x1 = 1, x2 = 2, x3 = 3, x4 = 5, x5 = 150/23, x6 = 165/19

Fig.15.　Chocoid with 6foci　　　by　H.E

# 7． Confocal Tajicoid




Parameter　Ｏ0=－1、－2、－3、－4、－5,

F1～F5= 1．5，2，3，4，5

We can draw confocal Tajicoid

because Tajocoid have 5 foci.

Fig.16.　Confocal Tajicoid

By　H.E

# 8． Conclusion

Today I mainly speak about the Extended Curves.

For extension of Doval, We use Extended Orthopole-Treorem And Extended Simson lines.

Doval has Many properties as writing in proceeding.

But, It is not easy for short time to explain their proof.

So, Today, I intended to show raff sketch how to extend Doval to Extended Curves Tajicoid and Chocoid.

Many Doval propositions exist. And we can feel very fun to find new theorem of Doval.

In the future, we want to find out some applications of Doval.

It might be an application in Mathematics or physics.

Here is Unsolved Probrem of Doval

(1) To find extended conjugate diameter of ellipse.

(2) To find Eccentric angle of Doval like Eliipse

(3) To solve the motion of Oval (Doval) or Ovaloid.

(4) To extend Tajicoid and Chocoid to get Infinity chain of Curves

Anyway, at least, we believe that our research contribute to Curve theorem and to Geometry and CG.

Thanks a lot for your attentions. By H.E