デカルトの卵形線の二・三の性質*

蛭子井　博　孝**

楕円などの円錐曲線は，その定義あるいは作図に対して，焦点．準円．補助円．準線などが通常使われている。ところが，デカルトの卵形線は，楕円あるいは双曲線が一般化された曲線であることが知られている。そこで，デカルトの卵形線においても同様な性質が存在するのではないかと予想し，それに対して若干の考察を行なってみた。また，デカルトの卵形線は，回転軸の平行な二つの円錐面の交線を，回転軸に垂直な平面へ正射影したものであることが知られている[1)]が，それに対しても若干の考察を行なってみた。

1．楕円の準円，補助円

楕円は，二定点からの距離の和が一定な点の軌跡として定義できる。すなわち，図1において，二定点を S_1，S_2，楕円上の一点をPとすると $S_1P+S_2P=K$（定数）を満足する。ここで，S_1，S_2 を焦点という。

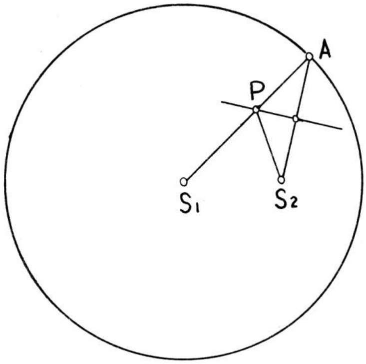

図1

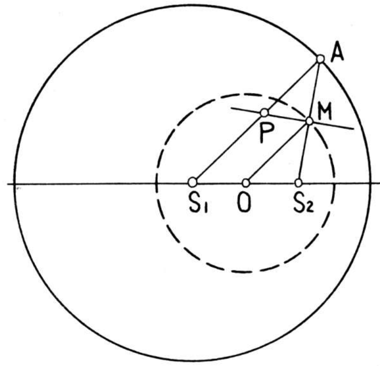

図2

今，線分 S_1P をPを越えて延長し $PA=PS_2$ となるように点Aをとると，$S_1P+PA=K$ となり，Pが楕円上を動くとき，Aは，円（S_1；K）上を動く。この円 S_1 は，準円[2)]と呼ばれる。逆に，この S_1A を半径とする円 S_1 が与えられ，この円内に，中心と異なる任意の一定点 S_2 をとり，線分 S_2A の垂直二等分線と S_1A との交点として，Pを求めれば，明らかにPは，楕円上にある。

ここで，図2におけるように，S_2A の中点Mを通り，S_1A に平行な直線を引き，直線 S_1S_2 との交点をOとすれば，中点連結定理より，$S_1O=OS_2$，また，$OM=\frac{1}{2}S_1A$ となり，Oは定点，OMは一定である。ゆえに，Aが円周上を動くとき，S_2A の中点Mは，円（O；OM）上を動く。この円Oは，S_1S_2 の中点を中心とし，$\frac{1}{2}S_1A$（長軸の長さの半分の長さ）の半径を持つ楕円の長軸の補助円であることがわかる。また，双曲線に対しても同様な性質の存在がよく知られている。[2)]

---

*　昭和47年7月27日受付
**　大阪大学

2．デカルトの卵形線の準円，補助円

デカルトの卵形線は，次のように楕円の拡張であることがわかる。

2－1　卵形線の定義

デカルトの卵形線は，双極座標を使って次のように定義される。[3]

$$m r_1 \pm n r_2 = K \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ここで，r_1，r_2は，二定点（極）S_1，S_2から卵形線上の一点Pまでの距離を表わしている。±の符号は卵形線が二分枝に分かれることを示す。また，極が前述の円錐曲線の焦点に相等する。以下の説明に便利なように（1）式を次のように書きかえる。

$$m r_1 \pm n r_2 = k c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ここで，cは焦点間距離$S_1 S_2$を表わす。

S_1，S_2に差はないから$m > n$としても一般性は失われない。だから，符号を省いて，m，n，kを正数としたとき，次の三つの場合が考えられる。

$$k > m > n > 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$m > k > n > 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$m > n > k > 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

2－2節，2－3節においては，$m r_1 - n r_2 = k c$の場合を考えていない。また，作図は，主に（3）の場合であるが，作図法は（3），（4），（5）の分類に関係しない。この分類の意味および等号の成立する場合も5節で明らかになろう。また，（3）の条件がある場合，＋の符号をもつ卵形線を内分枝，－の符号をもつ卵形線を外分枝と呼ぶことにする。

2－2　卵形線の準円

図1において$S_2 P$をも延長し，同様なことを行えば，図3で明らかなように，円（S_1；K），円（S_2；K）はともに準円である。また明らかに$S_1 B /\!/ S_2 A$である。これは，逆に，半径Kの等しい円S_1，円S_2がはじめに与えられ，点S_1，S_2を通り，互いに平行な直線l_1，l_2が円S_2，円S_1とそれぞれ交わる点をB，Aとしたとき，$S_1 A$と$S_2 B$の交点が楕円上の点Pとなっていると見なすことができる。

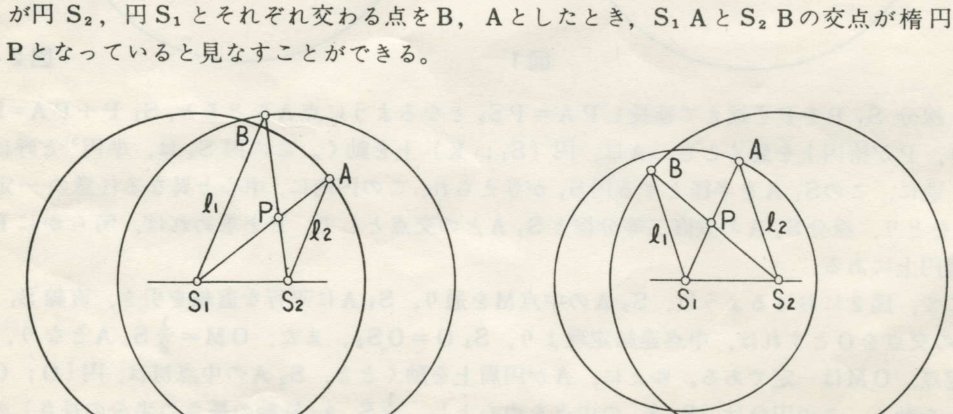

図3　　　図4

今，点S_1，S_2をそれぞれ中心とし，異なる半径をもつ円（この円を楕円の準円にならって卵形線の準円と呼ぶことにする）をはじめに与え，点S_1，S_2を通り互いに平行な直線l_1 l_2が円（S_2；$\frac{k}{n}c$），円（S_1；$\frac{k}{m}c$）とそれぞれ交わる点をB，Aとし，$S_1 A$，$S_2 B$の交点が，AあるいはBがそれぞれの円周上を動くときに描く軌跡を考える。

図4において，$S_1A=\frac{k}{m}c$，$S_2B=\frac{k}{n}c$とおく。すると，$S_1A:S_2B=n:m$となる。そして，$\triangle S_1PB \backsim \triangle S_2PA$より

$$\frac{PS_1}{PB}=\frac{PA}{PS_2}=\frac{PS_1+PA}{PB+PS_2}=\frac{S_1A}{S_2B}=\frac{n}{m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

ゆえに，$PA=\frac{n}{m}PS_2$，また，$S_1P+PA=S_1A=\frac{k}{m}c$，これより，$PS_1+\frac{n}{m}PS_2=\frac{k}{m}c$を得る。ここで，$S_1P=r_1$，$S_2P=r_2$とすれば，点Pは（2）式を満す。したがって，点Pはデカルトの卵形線上の点であることがわかる。

逆に，デカルトの卵形線$mr_1+nr_2=kc$が与えられると，それぞれ，中心をS_1，S_2，半径を$\frac{k}{m}c$，$\frac{k}{n}c$とする準円が成立する。外分枝においても同様。

2－3　卵形線の補助円

次に，楕円の図2の場合がデカルトの卵形線ではどのようになるかを考える。楕円では，Mが中点であるから，図5ではMがS_2Aを$m:n$に内分する点としてみる。まず，点Mを通りS_1Aに平行な直線とS_1S_2の交点をOとすれば，$S_1O:OS_2=n:m$であり，点Oは定点となる。そして，$S_1A=\frac{k}{m}c$とすれば，$OM=\frac{k}{m}c\times\frac{m}{m+n}=\frac{k}{m+n}c$となり，Aが円周上を動くとき，点Mは定円（$O;\ \frac{k}{m+n}c$）（楕円にならって補助円と呼ぶことにする）上にある。そのとき，Pを$PS_2:PA=m:n$を満たすようにS_1A上に取れば，楕円の拡張となる。この点を具体的に作図するには，MよりS_1Aに垂線を下しその足をHとする。次にMを中心とし，半径MHの円を描く。この円に，S_2から接線を引き，S_1Aとの交点をPとすればよい。なぜなら，$\angle APM=\angle MPS_2$となり，$PS_2:PA=m:n$となるから。以上のことから，デカルトの卵形線$mr_1+nr_2=kc$が与えられると，S_1S_2を$n:m$に内分する点Oを中心とし，$\frac{k}{m+n}c$を半径とする補助円が成立する。外分枝に対しては，S_1S_2を$n:m$に外分する点を中心とし，$\frac{k}{m-n}c$を半径とする補助円が同様に成立する。

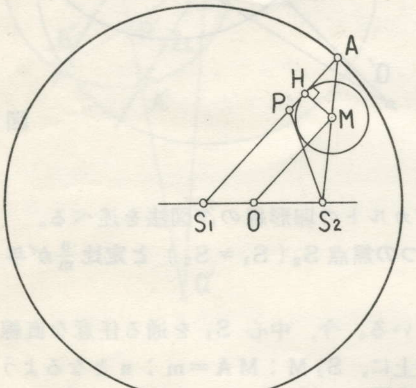

図5

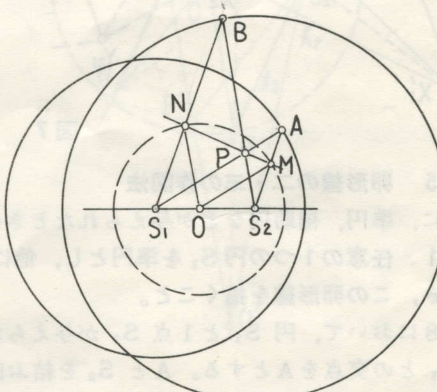

図6

また，図6のように$\angle APS_2$の二等分線とS_1B，S_2Aの交点をN，Mとする。この点N，MはS_1Bを$n:m$に，S_2Aを$m:n$にそれぞれ内分する点であるから，これらの点は，S_1S_2を$n:m$に内分する点Oを中心とし，$\frac{k}{m+n}c$を半径とする円周上にあることが明らかである。逆に，図6において，円Oの中心線上に二点S_1，S_2があり，それらの点を通る互いに平行な直線l_1，l_2が円Oとそれぞれ交わる点をN，Mとし，NM上に$\angle NPS_1=\angle MPS_2$となるように点Pをとってもよい。

2－4　準円と補助円の関係

図7において，まず円S_1，円S_2が与えられているとする。その半径を$\frac{k}{m}c$，$\frac{k}{n}c$とする。

点 S_1, S_2 を通る互いに平行な直線 h_1, h_2 が円 S_1, 円 S_2 と交わる点をそれぞれ X_1, X_2 とする。(図において, X'_1, X'_2 のように ′ のついている点は, X_1, X_2 のように ′ のついていない同じ記号の点と同様な性質を持った点である。以下の図においても同様である。) $X_1X'_2$ と X'_1X_2 の交点 O_{12} および X_1X_2 と $X'_1X'_2$ の交点 O_{21} は明らかに直線 S_1S_2 上にあり, 補助円の中心である。なぜなら, $S_1O_{12} : O_{12}S_2 = \frac{k}{m}c : \frac{k}{n}c = n : m$ で O_{12}, O_{21} が S_1S_2 をそれぞれ $n : m$ に内分, 外分する点であるから。

次に S_1X_2 と X_1S_2 の交点を Y_{12} とし, Y_{12} と O_{12} を結ぶと, その線分の長さが補助円 O_{12} の半径となる。なぜなら, $S_1Y_{12} : Y_{12}X_2 = \frac{k}{m}c : \frac{k}{n}c = n : m$ で $Y_{12}O_{12} /\!/ S_1X_1$, ゆえに, $Y_{12}O_{12} = S_1X_1 \times \frac{m}{m+n} = \frac{k}{m+n}c$

同様にして, X_1S_2 と $S_1X'_2$ の交点 Y_{21} とすると, $O_{21}Y_{21} = \frac{k}{m-n}c$ となり, 外分点の補助円の半径となる。以上のようにして, 一組の準円から一組の補助円 O_{12}, O_{21} が求められたが, 逆に, 任意の二円を一組の補助円として与えるとき, それに対する準円が求められる。これは, 図7において点線 $Y'_{21}Y_{12}$, $Y_{21}Y_{12}$ を引き, 点 S_1, S_2 を求め, この点を通り $O_{12}Y_{12}$ に平行な直線と点線 $Y'_{21}Y'_{12}$, $Y'_{21}Y_{12}$ の交点 X'_1, X_2 を求めればよい。

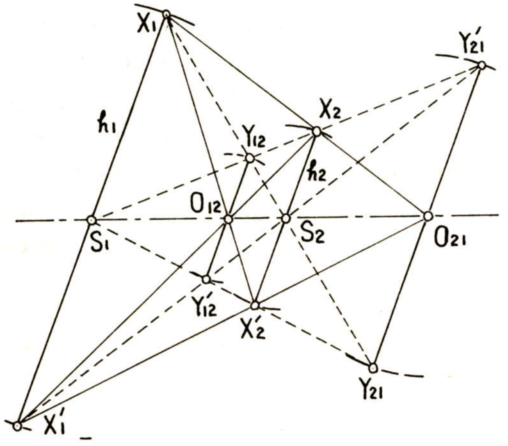

図 7

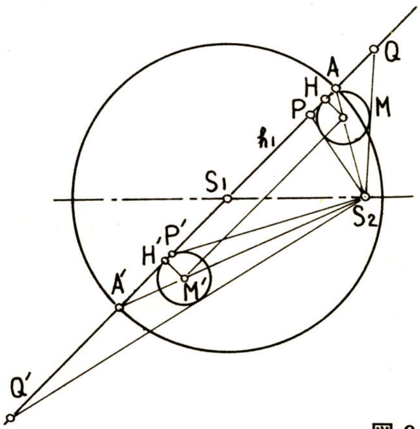

図 8

2－5　卵形線の二・三の作図法

次に, 準円, 補助円などが与えられたときのデカルトの卵形線の作図法を述べる。

作図1. 任意の1つの円 S_1 を準円とし, 他に1つの焦点 S_2 ($S_1 \neq S_2$) と定比 $\frac{n}{m}$ が与えられたとき, この卵形線を描くこと。

図8において, 円 S_1 と1点 S_2 が与えられている。今, 中心 S_1 を通る任意な直線 h_1 と円 S_1 との交点をAとする。Aと S_2 を結ぶ直線上に, $S_2M : MA = m : n$ となるようにMをとる。次に, Mから直線 h_1 に垂線を下し, その足をHとする。Mを中心とし, MHを半径とする円を描き, S_2 を通り, その円に接する直線との交点をPとする。S_1 を中心に h_1 を1回転させるとき, P, Qは, (2) 式を満たす卵形線を描く。ここで, P, Qは同じ性質をもつが, Pは内分枝を, Qは外分枝を満たすものを表わす。以下の図においても同様である。

作図2. 任意の2つの円を準円として与えられたとき, この卵形線を描くこと。

図9において, 円 S_1 と円 S_2 が与えられている。まず, S_1, S_2 を通り, 互いに平行な直線 l_1, l_2 を引く。l_1 が円 S_2 と交わる点をB, l_2 が円 S_1 と交わる点をAとする。このとき, 直線 S_1A と S_2B の交点P, Qは, AあるいはBが, 円 S_2 上あるいは円 S_1 上をそれぞれ動くとき, (2) 式を満たす卵形線を描く。

作図3．任意の1つの円Oを補助円とし，他に2つの焦点 S_1，S_2（$S_1 \neq S_2$）がOと共線であるように与えられたとき，この卵形線を描くこと。

図10において，円Oと，その中心線上に任意に二点 S_1，S_2 が与えられている。まず，S_1 S_2 を通り，互いに平行な直線を l_1，l_2 とする。l_1，l_2 が円Oと交わる点をそれぞれN，Mとする。次に，ONに平行に S_2 を通る直線 h_2 を引く。同様にOMに平行に S_1 を通る直線 h_1 を引く。すると，h_1，h_2 の交点P，Qは，NあるいはMが円O上を動くとき，（2）式を満たす卵形線上を描く。ここで，N，P，MあるいはN，Q，Mが共線であることは，パップスの定理より明らか。

作図4．任意の2つの円 O_1，円 O_2 が補助円として与えられたとき，この卵形線を描くこと。

図11において，円 O_1，円 O_2（$O_1 \neq O_2$）が与えられている。前節の準円と補助円の関係より，焦点 S_1，S_2 を求め，S_1，S_2 を通り互いに平行な直線 l_1，l_2 を引く。l_1 と円 O_1，O_2 が交わる点をそれぞれ N_1，N_2 とし，同様に M_1，M_2 をとる。次に，直線 N_1M_1 と直線 N_2M_2 が垂直に交わる点をPあるいはQとする。すると，P，Qは，N_1 あるいは M_1 が円 O_1 上を動くとき，（2）式を満たす卵形線を描く。

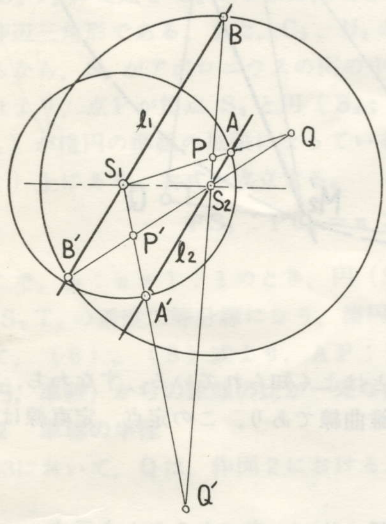

図9

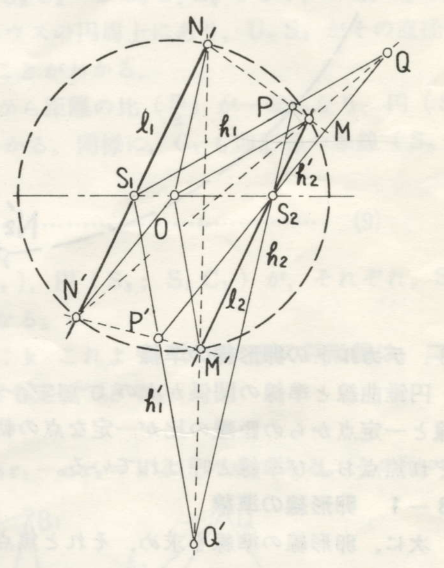

図10

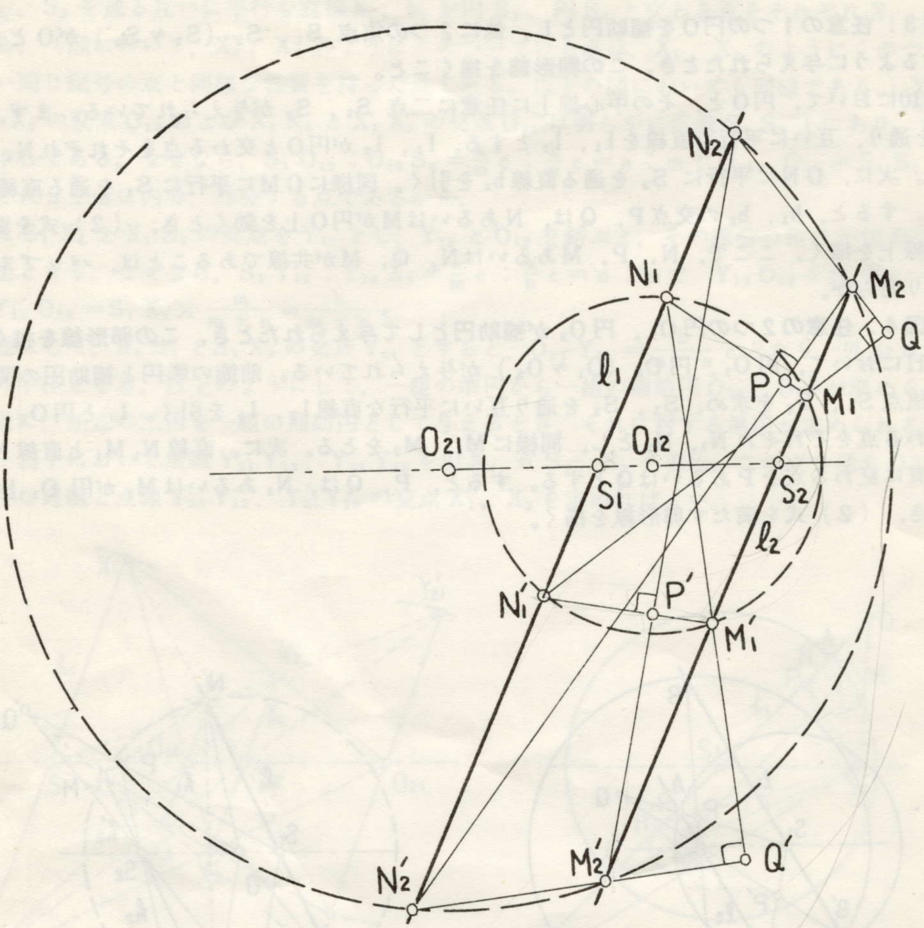

図　11

3．デカルトの卵形線の準線

円錐曲線と準線の関係が次のようになっていることはよく知られている。すなわち，一定直線と一定点からの距離の比が一定な点の軌跡は，円錐曲線であり，この定点，定直線は，それぞれ焦点および準線と呼ばれている。

3－1　卵形線の準線

次に，卵形線の準線を求め，それと焦点からの距離の比が一定であることを示す。

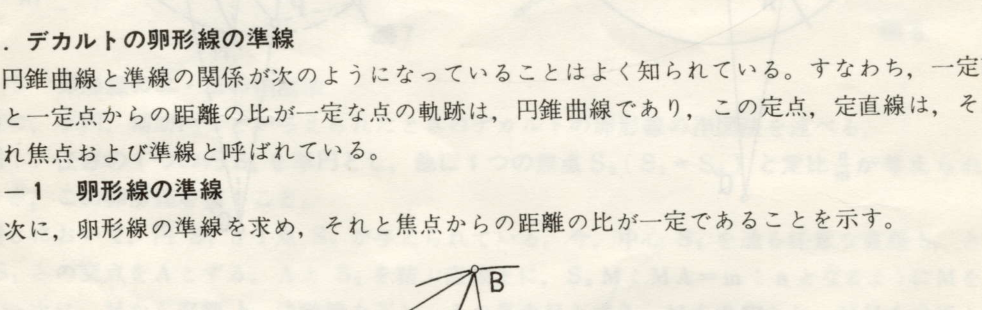

図12

図12において，二つの準円（S_1；$\frac{k}{m}c$），（S_2；$\frac{k}{n}c$）が与えられているとする。前節作図2によって，P，A，Bが得られたとする。ここで，直線S_1S_2上の1点T_2を$\triangle AS_1S_2 \backsim \triangle T_2S_1A$となるように決める。すると，$S_1T_2 : S_1A = S_1A : S_1S_2 = \frac{k}{m}c : c$より

$$S_1T_2 = \frac{(S_1A)^2}{S_1S_2} = \frac{k^2}{m^2}c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

これより，T_2は定点であることがわかる。同様にT_1を決めた。次に，S_2を通りT_1Bに平行な直線を引き，AT_2との交点をC_2とする。すると，$\angle C_2S_2T_2 = \angle BT_1S_2 = \angle S_1BS_2 = \angle AS_2B$より，$\angle PS_2A = \angle C_2S_2T_2$となり，$\triangle APS_2 \backsim \triangle T_2C_2S_2$となる。ゆえに（6）式より，$S_2P : PA = m : n$となるから，$S_2C_2 : C_2T_2 = m : n$となり，Aが準円（$S_1$；$\frac{k}{m}c$）上を動くとき，$C_2$は二定点$S_2$，$T_2$からの距離の比が$m : n$のアポロニウスの円周上を動く。さて，$\angle APS_2 = \angle T_2C_2S_2$より，四角形$APS_2C_2$は同一円周上にある。ゆえに，$\angle PC_2S_2 = \angle PAS_2 = \angle AT_2S_2$，$\angle S_2PC_2 = \angle S_2AT_2$より，$\triangle S_2PC_2 \backsim \triangle S_2AT_2$，これより，$S_2P : PC_2 = S_2A : AT_2 = S_1S_2 : S_1A = c : \frac{k}{m}c = m : k$，これより，次式が成立する。

$$S_2P : PC_2 = m : k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

ゆえに，Pは，アポロニウスの円周上の点C_2と焦点S_2からの距離の比が一定となる。

ここで，PC_2の延長線が直線S_1S_2と交わる点をS_3とする。また，$\angle S_2C_2T_2$の二等分線とS_2T_2の交点をU_2とすれば，明らかに$\angle S_3C_2U_2 = \angle C_2U_2S_3$となり，$\triangle S_3C_2U_2$は二等辺三角形である。また，$C_2$，$U_2$がアポロニウスの円周上にあり，$U_2S_3$がその直径上にあるから，$S_3$がアポロニウスの円の中心であることがわかる。

これより，点Pが焦点S_2と円（S_3；S_3C_2）から距離の比（$\frac{m}{k}$）が一定となり，円（S_3；S_3C_2）が楕円の準線の拡張になっていることがわかる。同様に，C_1も卵形線の準線（S_3；S_3C_1）上にあり，次式が成立する。

$$PS_1 : PC_1 = n : k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

ここで，$m : n = 1 : 1$のとき，円（S_3；S_3C_2），円（S_3；S_3C_1）が，それぞれ，S_2T_2，S_1T_1の垂直二等分線になり，楕円の準線となる。

さて，（6），（8）式より，$AP : PC_2 = n : k$ これより，**デカルトの卵形線は，二円（準円，準線）からの距離の比が一定な曲線としても定義できる。**

3－2　準線の半径

図13において，Qは，作図2におけるように，$mr_1 - nr_2 = kc$上の点である。その他の点

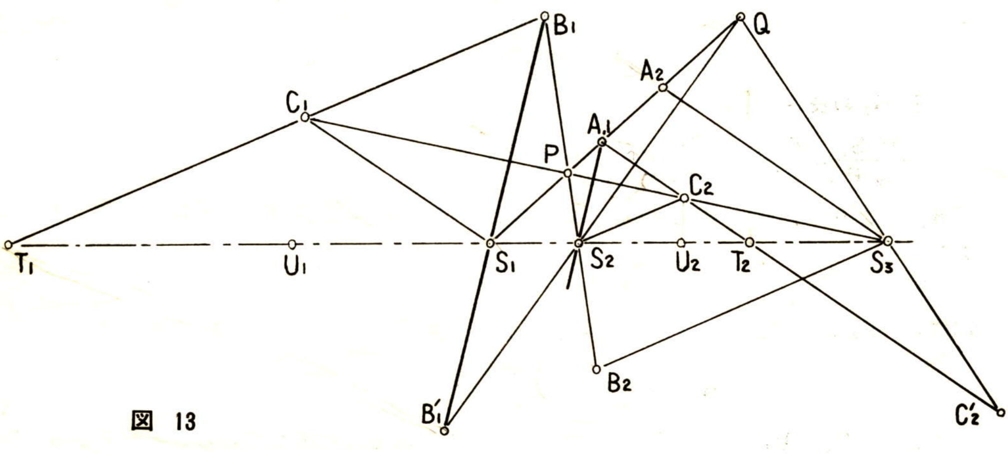

図 13

は，図12と同じである。ここで，$\angle S_1B_1'S_2=\angle A_1S_2Q=\angle C_2S_2T_2$，また，$\angle PA_1S_2=\angle PC_2S_2$ ゆえに，$\angle PQS_2=\angle PS_3S_2$，これより，四点 PQS_3S_2 が同一円周上にあり次の結果を得る。

$$S_1P\cdot S_1Q=S_1S_2\cdot S_1S_3=定数=\frac{k^2-n^2}{m^2-n^2}c^2 \quad \cdots\cdots \quad (10)$$

この式の定数の値は，適当に計算すれば求まるが，文献3)より引用した。さて，上式より，卵形線上の外分枝上の点Qは，S_1 に関する点Pの反点である。それゆえ，内分枝と外分枝が焦点に関して反転曲線の関係にある。[3)]

次に準線（S_3；S_3C_2）の半径を求める。$S_3C_2=S_3U_2=S_1S_3-S_1S_2-S_2U_2$

（10）式より

$$S_1S_3=\frac{k^2-n^2}{m^2-n^2}c \quad \cdots\cdots \quad (11)$$

図より，$S_2U_2=\frac{m}{m+n}(S_1T_2-S_1S_2)$（7）式より $S_1T_2=(k^2/m^2)c$

これより，次の準線の半径（S_3C_2）が求まり，同様にして S_3C_1 が求まる。

$$S_3C_2=\frac{n(k^2-m^2)}{m(m^2-n^2)}c \quad (12) \qquad S_3C_1=\frac{m(k^2-n^2)}{n(m^2-n^2)}c \quad \cdots\cdots \quad (13)$$

4．卵形線の第3の焦点とそれに対する準円，補助円，準線

さて，（10）式より，S_3 がデカルトの卵形線の第3の焦点であることがわかる。[3)] これは，（8），（9）の関係が，作図1と類似していることからもわかる。

4－1　第3の焦点の他の焦点との同等性

このことについては，図13における，$S_3P=r_3$ とすれば，r_1 と r_3 が一次の関係にあることから明らかにされている[3)]が，ここでは，別な見方で明らかにする。

定義より

$$S_1S_2=c=R_{12} \quad \cdots\cdots \quad (14)$$

（11）式より

$$S_1S_3=\frac{k^2-n^2}{m^2-n^2}c=R_{13} \quad \cdots\cdots \quad (15)$$

（14），（15）式より

$$S_2S_3=\frac{k^2-m^2}{m^2-n^2}c=R_{23} \quad \cdots\cdots \quad (16)$$

これより，$S_1S_2:S_2S_3:S_3S_1=m^2-n^2:k^2-m^2:n^2-k^2$　ゆえに，S_1，S_2，S_3 が同等であることがわかる。5節において，このことはより明白になろう。

4－2　第3の焦点と第1，第2焦点間の準円

前節の同等性から，（S_1，S_2）の間に一組の準円が存在するのと同様に（S_2，S_3）（S_3，S_1）の組にも，それぞれ一組の準円が存在すると考えられる。次にそのことを具体的に示す。

図13において，S_3 より S_2C_2 に平行な直線を引き，直線 S_2P との交点を B_2 とする。すると，S_1B_2 の長さは，次のようにして求まる。

$$\frac{PS_2}{C_2P}=\frac{PB_2}{PS_3}=\frac{PB_2-PS_2}{PS_3-PC_2}=\frac{S_2B_2}{S_3C_2} \quad \cdots\cdots$$

（8）式より　$PS_2:C_2P=m:k$　ゆえに　$S_2B_2=\frac{m}{k}S_3C_2$　これに（12）式の値を代入して

$$S_2B_2=\frac{n(k^2-m^2)}{k(m^2-n^2)}c \quad （定数）$$

同様に，S_3 より S_1C_1 に平行な直線を引き，直線 S_1P との交点を A_2 とすれば，

$$S_1A_2=\frac{m(k^2-n^2)}{k(m^2-n^2)}c \quad （定数）$$

ここで，S_2，B_2，S_3，C_2 およびPの関係が作図2に対応していることがわかる。また，

S_1，A_2，S_3，C_1，Pについても同様，これより，次の結果を得る。

焦点 S_2，S_3 間の準円の半径は，

$$S_2B_2=\frac{n(k^2-m^2)}{k(m^2-n^2)}\,c=\frac{n}{k}R_{23},\quad S_3C_2=\frac{n(k^2-m^2)}{m(m^2-n^2)}\,c=\frac{n}{m}R_{23}\quad\cdots\cdots\cdots(17)$$

焦点 S_3，S_1 間の準円の半径は，

$$S_3C_1=\frac{m(k^2-n^2)}{n(m^2-n^2)}\,c=\frac{m}{n}R_{13}\quad S_1A_2=\frac{m(k^2-n^2)}{k(m^2-n^2)}\,c=\frac{m}{k}R_{13}\quad\cdots\cdots\cdots(18)$$

ここで，（15），（16）式を使った。

4－3　卵形線の定義式

さて，S_1S_2 間の準円の半径は，（14）式を使って，$\frac{k}{m}R_{12}$，$\frac{k}{n}R_{12}$ であり，焦点 S_1，S_2 から卵形線上の点PあるいはQまでの距離をそれぞれ r_1，r_2 とおくと，r_1，r_2 は，

$$mr_1\pm nr_2=kR_{12}\quad\cdots\cdots\cdots(19)$$

を満たしたのと同様に，焦点 S_3 からの距離を r_3 とおくと，（17）式より，r_2，r_3 は，

$$\mp kr_2\pm mr_3=nR_{23}\quad\cdots\cdots\cdots(20)$$

を満たし，同様に，（18）式より，r_3，r_1 は，下式を満たす。

$$-nr_3\mp kr_1=\pm mR_{31}\quad\cdots\cdots\cdots(21)$$

ただし，$R_{13}=-R_{31}$，$k>m>n>0$ の場合で，（19），（20），（21）の複号の上の符号が，ともに同一の卵形線の内分枝を表わし，下の方がともに同一の外分枝を表わす。つまり，一組

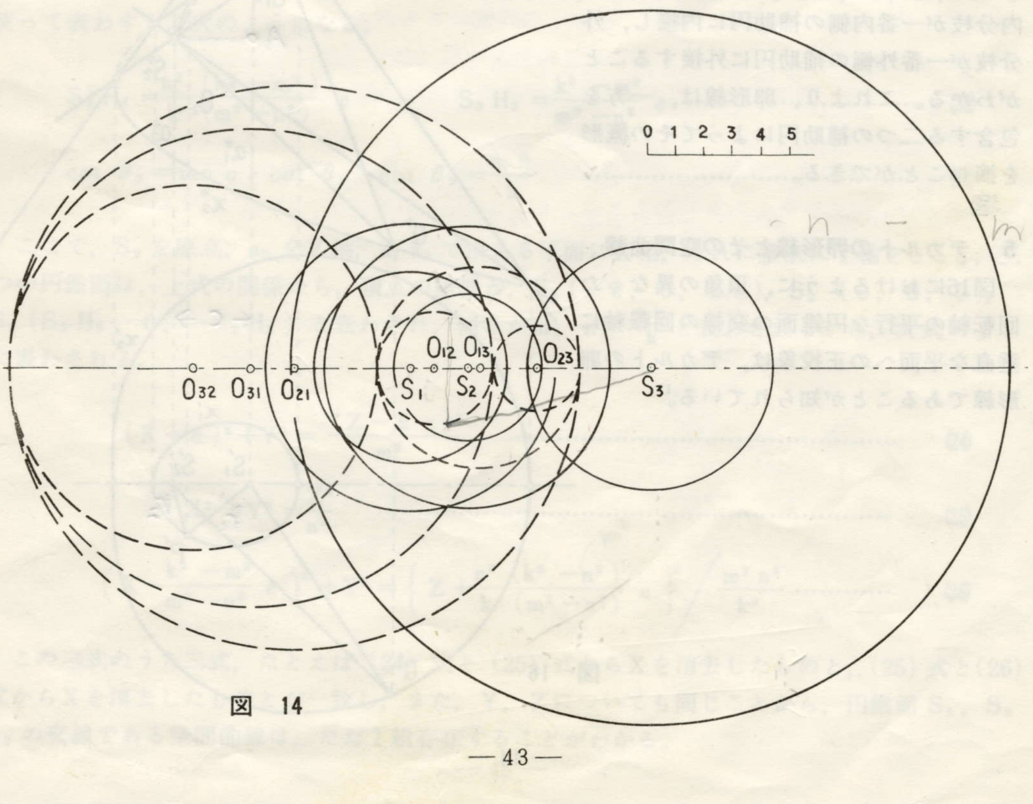

図 14

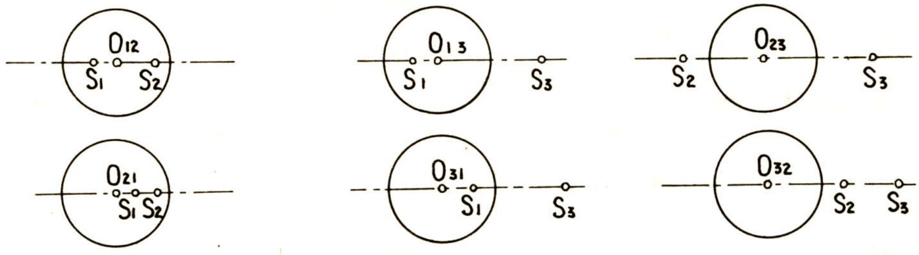

図 15

の卵形線を定義する場合，(19)，(20)，(21) のどれを使ってもよいことになる。

さて，定義式がわかると，準円，補助円がわかる。また，図13におけるように，準円は準線でもあった。これらの円（準円６コ，補助円６コ）を具体的に描くと，図14のようになる。

ただし，$m=3$，$n=2$，$k=5$，$R_{12}=2$ として (15)，(16) 式より，

$$R_{23}=6.4,\quad R_{31}=-8.4$$

図14からわかるように，補助円は，６個の円が互いに接している。これは，補助円の半径と中心の関係から計算してもわかる。また，図15のように，作図３における１つの補助円と２つの焦点の関係は，焦点が補助円上にある場合を除いて，６種類に分類できるが，図14の６個の補助円とそれに対する焦点（補助円 O_{12}，O_{21} は焦点間 S_1S_2 をそれぞれ，内分，外分した点を中心としている）の関係は，この６種を全部満たす。また，卵形線は，内分枝が一番内側の補助円に内接し，外分枝が一番外側の補助円に外接することがわかる。これより，卵形線は，一方を包含する二つの補助円によってその概形を摑むことができる。

摑

5．デカルトの卵形線とその空間曲線

図16におけるように，頂角の異なった回転軸の平行な円錐面の交線の回転軸に垂直な平面への正投象は，デカルトの卵形線であることが知られている。[1)]

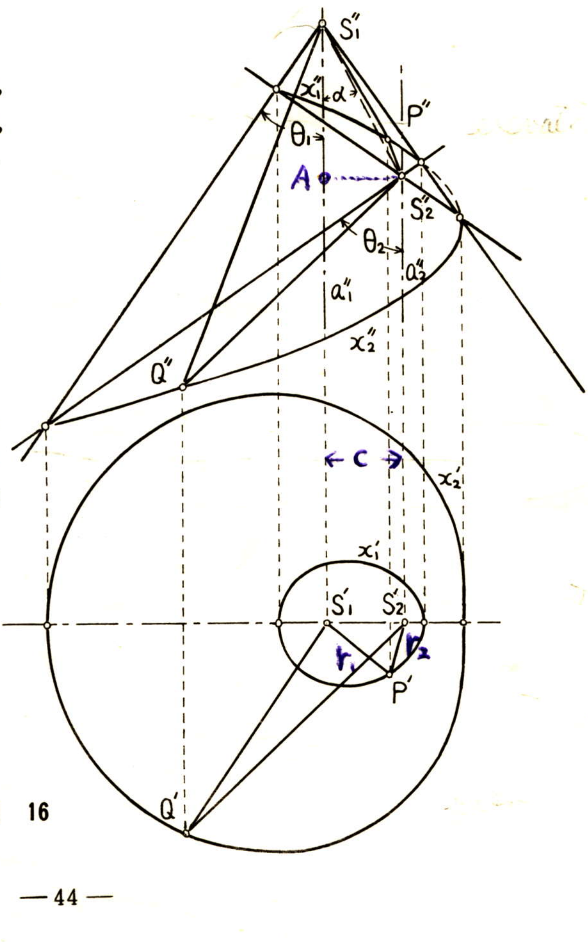

図 16

5－1　二つの円錐面の相貫曲線と卵形線

上記の相貫曲線の正投象が卵形線であることを，双極座標を使って示す。

今，二つの平行な回転軸によって決まる平面を π_2，回転軸に垂直な平面を π_1 とする。ここで，π_2 を立面図，π_1 を平面図としたのが，図16である。さて，頂点 S_1，S_2 を持つ円錐面の頂角をそれぞれ，θ_1，θ_2 とする。ここで，$\cot\theta_1 = m$，$\cot\theta_2 = n$ とおく。すなわち，m，n は，π_1 面に対する円錐面の傾角を表わす。また回転軸間距離，すなわち，$S'_1 S'_2$ を c とする。また，回転軸を a_1，a_2 とする。a_1 と $S_1 S_2$ のなす角を α とおき，$\cot\alpha = k$ とおく。交線(すなわち，デカルトの卵形線の空間曲線）を x とする。x 上の任意の点Pと S_1 を結ぶ線分（すなわち，円錐 S_1 のP点を通る母線上の線分）の π_1 面への正射影を r_1 とする。同様に $S_2 P$ の方を r_2 とする。すると，$S_1 P$ と $S_2 P$ の a_1 軸への正射影は，それぞれ，mr_1，nr_2 に等しく，これらの和は，$S_1 S_2$ の a_1 軸への正射影すなわち k c に等しい。ゆえに，$mr_1 + nr_2 = kc$ となり，π_1 面上の点P′は，（２）式を満たすデカルトの卵形線上の点であることがわかる。Qについても同様に考えて，$mr_1 - nr_2 = kc$ を満たすことがわかる。

5－2　三つの円錐面の相貫曲線と卵形線

three cones intersection

次に，立面図について考える。π_2 面上での二つの円錐面の母線の交点を，図17のように，A B，C，D，とする。∠DAC＝∠DBCより，明らかに四点A，B，C，Dは同一円周上にある。ここで，直線ABとDCの交点を S_3 とする。また，直線 BS_3 上に S_3 に対してBと反対側の１点をEとする。∠ADC＝∠S_1BAより，∠CS_3E の二等分線 a_3 は，a_1，a_2 に平行である。つまり，円錐 S_1 と円錐 S_2 を決めると，頂点を S_3，回転軸を a_3，子午線を直線ABとする円錐面が，一意的に決まることがわかる。ここで，円錐面 S_1，S_2 の交線が円錐面 S_2，S_3 の交線および円錐面 S_3，S_1 の交線と空間的に一致することを示す。

図16と同様に，円錐 S_3 の頂角を θ_3 とする。また，$a_2 /\!/ a_3$ より，∠BS_3C の二等分線は，a_2 に直交する。この交点を H_3 とする。さて，S_2H_3，S_3H_3，頂角 θ_3 を m，n，k，c を使って表わすと，次のようになる。

$$S_2H_3 = \frac{n^2(k^2 - m^2)}{k(m^2 - n^2)}\,c \qquad S_3H_3 = \frac{k^2 - m^2}{m^2 - n^2}\,c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (22)$$

$$\cot\theta_3 = \tan\alpha \cdot \cot\theta_1 \cdot \cot\theta_2 = \frac{mn}{k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (23)$$

ここで，S_2 を原点，a_2 をZ軸，$a_1 a_2$ で決まる平面にX軸，それに垂直にY軸をとると，三つの円錐面は，上式の関係から，頂点の座標が，$S_1(-c,\ 0,\ kc)$，$S_2(0,\ 0,\ 0)$，$S_3(S_3H_3,\ 0,\ -S_2H_3)$ と表わされ，傾きが m，n，$\frac{mn}{k}$ と表わされるから，次式のように表わされる。

$$(X + c)^2 + Y^2 = \frac{(Z - kc)^2}{m^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (24)$$

$$X^2 + Y^2 = \frac{Z^2}{n^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (25)$$

$$\left(X - \frac{k^2 - m^2}{m^2 - n^2}\,c\right)^2 + Y^2 = \left\{Z + \frac{n^2(k^2 - n^2)}{k(m^2 - n^2)}\,c\right\}^2 \bigg/ \frac{m^2 n^2}{k^2} \quad \cdots\cdots \quad (26)$$

この三式のうち二式，たとえば（24）式と（25）式からXを消去したものと，(25）式と(26)式からXを消去したものとが一致し，また，Y，Zについても同じことから，円錐面 S_1，S_2 S_3 の交線である空間曲線は，ただ１組存在することがわかる。

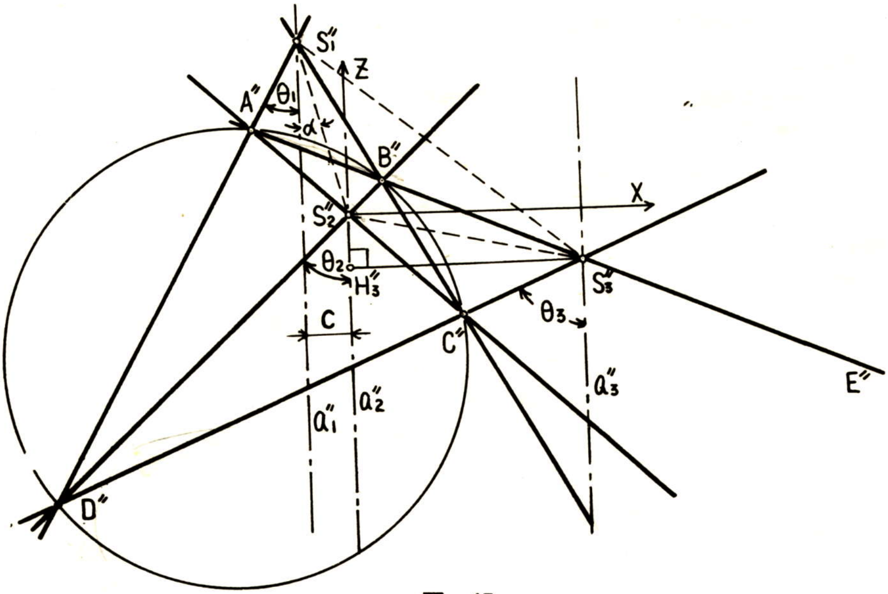

図 17

次に，$\triangle S_1 S_2 B$ について見ると，$S_1 B$，$S_2 B$，$S_1 S_2$ の π_1 との傾きが $\mathbf{m}$，$\mathbf{n}$，$\mathbf{k}$ であり明らかに $\mathbf{k} > \mathbf{m} > \mathbf{n}$ であり，これは，（３）式に対応している。同様に，$\triangle S_2 S_3 B_2$ において三辺の傾きの関係が（４）式の関係にあることがわかる。$\triangle S_3 S_1 B$ についても，同様。

また，(19) ～ (21) 式の±の符号も図17と比較すれば明らかである。つまり，空間曲線 $\mathbf{x}_1$（図16の内分枝を作る曲線）が，回転軸方向に関して，S_1，S_2 の中間にあるから，$\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$ の係数の正負の符号が一致し，$\mathbf{x}_2$ は，$S_1 S_2$ の外側にあるから，$\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$ の係数の正負の符号が逆である。また，$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$ と S_2，S_3 などの関係から (20)，(21) の±の符号がわかる。

さて，ここで，空間図形とデカルトの卵形線の平面的性質である準円，補助円などの関連を考える。

図18におけるように準円は，各円錐面の頂点を通る回転軸に垂直な平面で切断したときにできる円を π_1 に正投象したものであることがわかる。これからも，図14におけるように，６個の準円が存在することがわかる。ただし，図18は，立面図のみ。

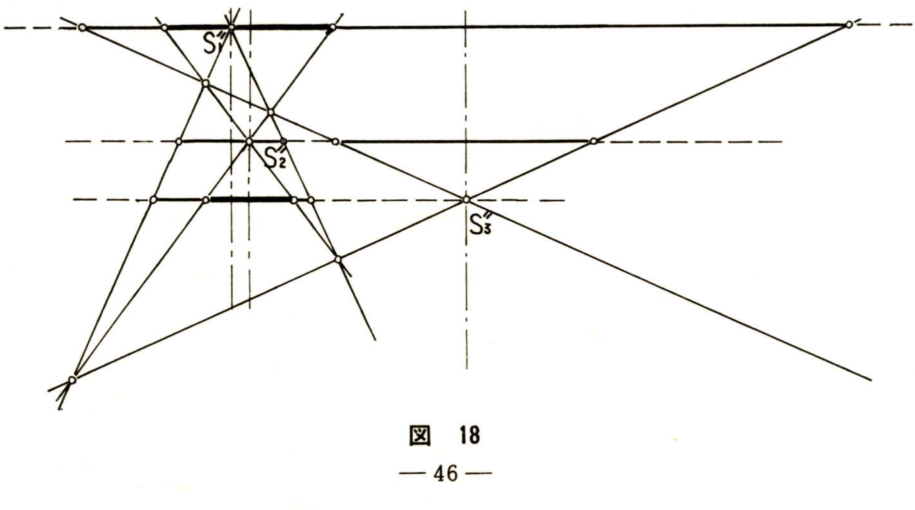

図 18

さて，図19において，四点A，B，C，Dおよびその中点の平面図を考える。図中 O_{12}，O_{21} は，それぞれAB，CDの中点であるが，図16におけるように m，n，k，c をとったとき，$S'_1 O'_{12} : O'_{12} S'_2 = n : m$，$S'_1 O'_{21} : O'_{21} S'_2 = -n : m$ となることが簡単な計算からわかる。このことから，O'_{12}，O'_{21} は，焦点 S'_1，S'_2 を内，外分する点であり，補助円の中心であることがわかる。また，$O'_{12}B'$ および $O'_{21}D'$ がそれぞれの半径である。

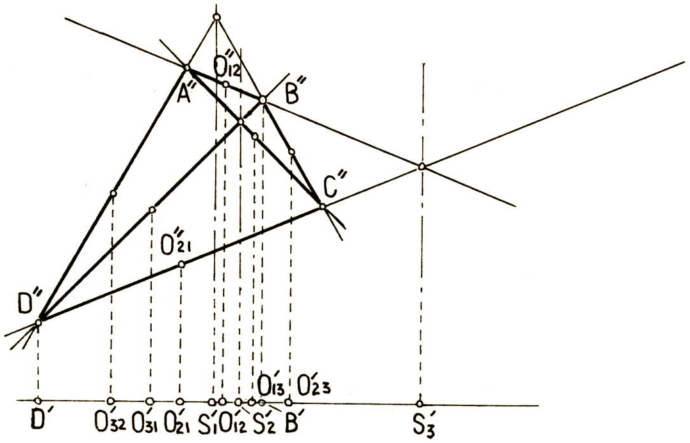

図　19

以上のことから，$mr_1 \pm nr_2 = kc$ で与えられるデカルトの卵形線に付随する準円，補助円，準線の位置関係が，図17さえ書けば，ほぼ明らかになる。また，1組のデカルトの卵形線は，円に内接する四角形ABCD（特別な場合三角形となる）によって決定されると言える。

6．デカルトの卵形線の接線

今，一つの卵形線の定義式がわかっているものとする。つまり，作図1～4までのいずれかの条件が与えられているとする。図20において，作図1の条件が与えられており，卵形線上の点 P_1 における接線を考える。今，A_1S_2 の垂直二等分線は，P_0 における楕円の接線であることが知られている。ここで，A_1P_1 の垂直二等分線と楕円上の点 P_0 の接線との交点を V_1 とする。すると，P_1V_1 が P_1 におけるこの卵形線に対する接線 t_1 である。つまり，$\triangle A_1P_1S_2$ の外心 V_1 と P_1 を結ぶ直線が P_1 における卵形線に対する接線である。Q_1 についても同様。

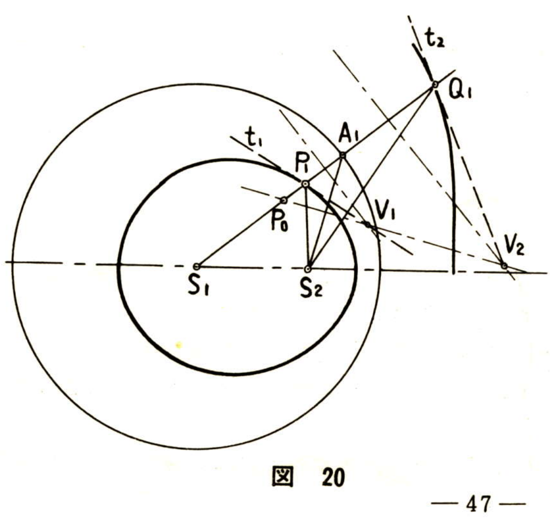

図　20

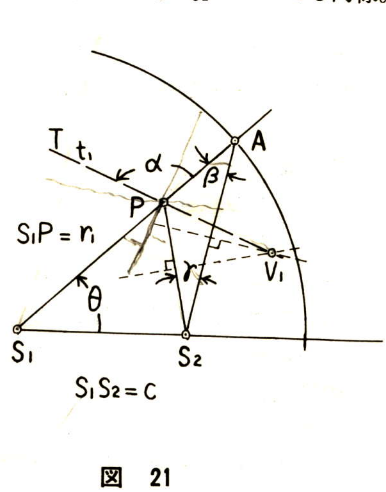

図　21

なお，ここで，P_1 が P_0 に一致した場合，P_1V_1 と楕円の接線が一致し，また，P_1 が A_1 に一致したとき（$\frac{n}{m}=0$）V_1P_1 が A_1 における円 S_1 の接線であることは，明らかである。

次に，解析的に t_1 が点 P_1 における卵形線に対する接線であることを示す。

図21におけるように極座標表示における曲線 $r=f(\theta)$ 上の点Pでの接線PTと，動径 S_1P からPTのほうへまわる角を α とすると次式が成立する。[4]

$$\cot\alpha=\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} \quad\cdots\cdots \tag{27}$$

今，卵形線が，$mr_1 \pm nr_2=kc$ のとき，S_1 を極 S_1S_2 方向を始線とすれば，r_1 は次式を満たす。

$$r_1=\frac{c\{(km-n^2\cos\theta)\mp n\sqrt{n^2\cos^2\theta-2km\cos\theta+k^2+m^2-n^2}\}}{m^2-n^2} \quad\cdots\cdots \tag{28}$$

ここで，複号の－は内分枝，＋は外分枝を表わす。ただし，$k>m>n>0$

これより，

$$\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\theta}=\frac{\mp n\sin\theta}{\sqrt{n^2\cos^2\theta-2km\cos\theta+k^2+m^2-n^2}} \quad\cdots\cdots \tag{29}$$

ここで，図21から

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)}=\frac{-\sin\gamma}{\cos\gamma} \quad\cdots\cdots \tag{30}$$

ところで，$S_2P : PA=m : n$ より，$m\sin\gamma=n\sin\beta$ $\quad\cdots\cdots$ (31)

また，$\triangle AS_1S_2$ において

$$\frac{c}{\sin\beta}=\frac{c\sqrt{(k^2/m^2)+1-2(k/m)\cos\theta}}{\sin\theta} \quad\cdots\cdots \tag{32}$$

(31)，(32) 式を (30) 式に代入して，β，γ を消去すると

$$\cot\alpha=\frac{-n\sin\theta}{\sqrt{n^2\cos^2\theta-2km\cos\theta+k^2+m^2-n^2}} \quad\cdots\cdots \tag{33}$$

これは，(29) の－の符号をもつ式に一致し，(27) 式が成立することがわかる。ゆえに，t_1 が P_1 における卵形線の接線であることがわかる。t_2 についても同様。

7．総　括

デカルトの卵形線を楕円の一般化と考え，考察した結果，以下のような二・三の幾何学的性質がわかった。

○円錐曲線には，準円，補助円，準線が付随しているが，これは，卵形線にも同じような準円，補助円，準線が付随していた。しかし，卵形線には，焦点が3つあり，したがって，準円が6個あった。また，卵形線の準線は円であり，円の中心が無限遠点にある場合が，円錐曲線の準線となった。このことから，デカルトの卵形線の特別な場合が円錐曲線であることが明らかになった。

○デカルトの卵形線の接線の作図法も得られた。また，デカルトの卵形線の特別の場合が，

リマソンであることが知られている　が，卵形線の接線の作図法は，この場合にも使える。
○卵形線の空間曲線をつくる三つの円錐について考えることにより，準円，補助円，準線および三つの焦点の位置が簡単にわかるようになった。

参考文献

1）ERNST SCHÖRNER, "RAUMBILD-LEHRRUCH DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE" R. OLDENBOURG VERLAG MÜNCHEN, 1960 P.126～P.127

2）F.ホーエンベルク著　増田祥三訳　"技術における構成幾何学" 日本評論社　1969 P.55～P.66

3）ロックウッド著　松井政太郎訳　"カーブ"　みすず書房　1964 P.1～P.38　　P.200～P.204

4）栗田稔著　"いろいろな曲線"　共立出版　1969　P.91