デカルトの卵形線の性質に関する考察*
－その幾何学的構図－

蛭子井　博　孝**

1.　まえがき

デカルトの卵形線は，楕円を一般化した4次曲線であり，その初等幾何学的図形は，楕円の幾何学的図形と関連が深い。今回は，そうした卵形線の初等幾何学的構成図（卵形線を定義するための図）などを調べているうちに，初等幾何の定理となっている構図を含む卵形線の定義の仕方を見い出した。ここでは，主にそれを報告する。なお，予備知識として卵形線の定義の仕方について，前論[1]と重複する部分もあるが，種々な角度から眺めて述べてみたい。また，その中で，円錐面と円錐面の相貫図の透視図[2]については，相貫空間曲線のパラメトリックな関係式を導出した。さらに，また卵形線の性質としての法線の一作図法も述べる。

2.　卵形線の種々な定義の仕方

デカルトの卵形線については，次のような種々の異なる定義の仕方が考えられる。

(1)　双極座標を用いた定義式[3]（図1）

(2)　直交座標による定義

(3)　図形的関係による定義（図2）

(4)　空間的構造による定義[4]（図3）

(5)　作図手法による定義[5]（デカルトによる定義）（図4）

(1)は，二定点（双極）からの加重距離の和（差）が一定な点の軌跡は，卵形線であると表現される。つまり，双極を S_1, S_2 としてその双極間の距離を c とし双極から曲線上の点 P までの距離を r_1, r_2 とすれば

$$mr_1 \pm nr_2 = kc \qquad (1)$$

なお，m, n, k は任意定数で，差の方は，いわゆる卵形にはならないが，同様の性質を持つ。

(2)　二定点を $(0, 0)$ $(c, 0)$ とおいて，卵形線上の点を (x, y) とする直交座標によれば，(1)式より

$$m\sqrt{x^2+y^2} \pm n\sqrt{(x-c)^2+y^2} = kc$$

という関係式で表現される。$\sqrt{\ }$ をはずすと

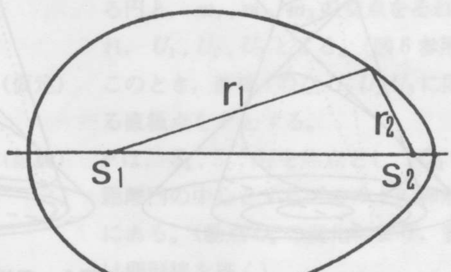

図1　卵形線の双極座標による定義

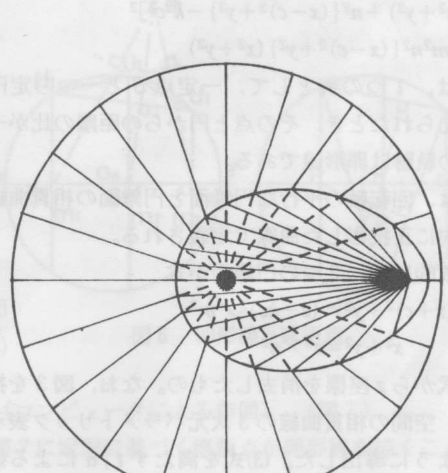

図2　1点と円による卵形線

---

*平成元年10月3日受付

**岩国市元町4－12－10

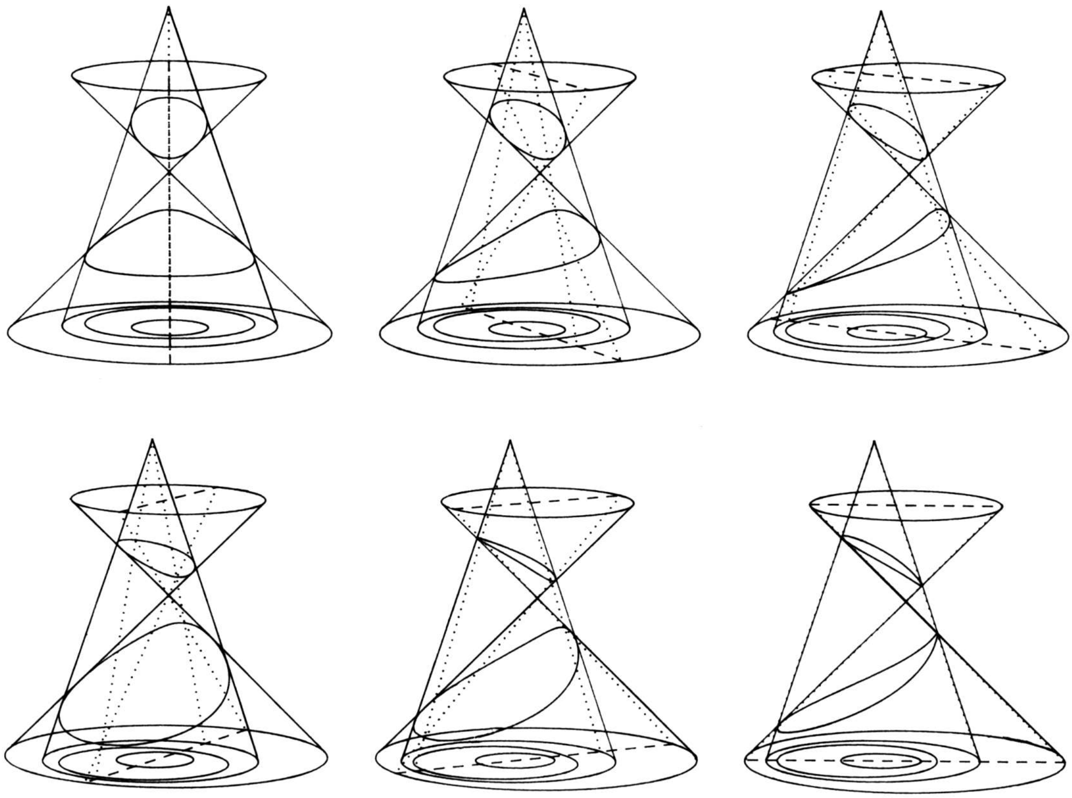

図 3　円錐面の交線としての卵形線

$$[m^2(x^2+y^2)+n^2\{(x-c)^2+y^2\}-k^2c^2]^2$$
$$=4m^2n^2\{(x-c)^2+y^2\}(x^2+y^2)$$

(3)は，1つの例として，一定点Sと一つの定円Oが与えられたとき，その点と円からの距離の比が一定な点の軌跡は卵形線である。

(4)は，回転軸の平行な円錐面と円錐面の相貫曲線を軸方向に正投影した曲線で定義される。

代数的には，2つの円錐面が式

$$(x+c)^2+y^2=(z-kc)^2/m^2 \quad (2)$$

$$x^2+y^2=z^2/n^2 \quad (3)$$

の2式からz座標を消去したもの。なお，図3を描くため，空間の相貫曲線の3次元パラメトリック表示を次のように導出した。(3)式を満たすt,αによる媒介変数表示は$x=t\cdot\cos\alpha$, $y=t\cdot\sin\alpha$, $z=nt$で，この式を，(2)(3)式よりyを消去した式に代入して，αとtの関係式を求め，その式からαを消去すると，付記のようにtの媒介変数表示を得る。

図3は，円錐面とその相貫図形のいわゆるフレーム図形で，透視図法で，30°ずつ回転したものをやや上方から眺め，投影面は軸に平行な面としている。また円錐の底面には，空間曲線の軸方向からの正投影した卵形線の図も描いている。この図では，内側の2つの長円である。

(5)　定直線l_1上に任意に3点F,A,Gをとる。Aを通りl_2上に$AG=AR$となる点Rをとる。今，直線l_1上に動点Pをとり，l_2　上に動点Qをとる。ここで，$AP:AQ$は任意の定比（$k:n$）であり，PをP_1,P_2,P_3…… と動かし，それに対応して，QをQ_1,Q_2,Q_3…… と動かす。つまり$P_1Q_1 /\!/ P_2Q_2 /\!/ P_3Q_3$…… ととる。このとき，2円 {中心：$F$，半径：$FP_i$ ($=FA+AP_i$)},{中心：G，半径：RQ_i($=AR-AQ_i$)} の交点列は，P_i が動くとき卵形線を描く。これは，“デカルトの幾何学[5]”の中にあるデカルトによる定義であり，(1)の双極座標の定義式で表せることを示す。

半径　$FP=FA+AP=r_3$

$RQ=AR-AQ=r_1$ とおく

すると $AP=r_3-FA$　$AQ=AR-r_1$

ここで $\dfrac{AP}{AQ}=\dfrac{r_3-FA}{AR-r_1}=\dfrac{k}{n}$　$AR=AG$ より

これを変形して　$nr_3+kr_1=nFA+kAG$

これは，明らかに2定点 FG からの距離 r_3 ，r_1 の加重距離の和は一定となっている。

以上に述べたようにデカルトの卵形線の定義の仕方は種々あるが，それらは，それぞれ，卵形線の1つの性質を表わすものとして特長がある。

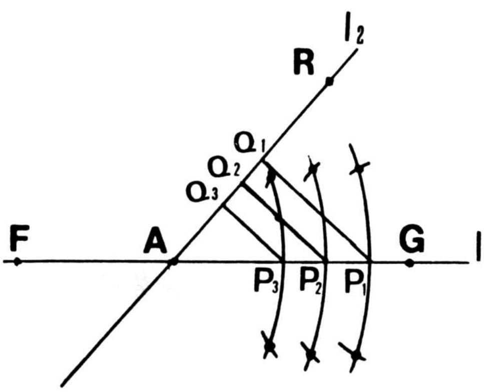

図4　デカルトによる卵形線の作図

3.　卵形線の幾何学的構図

前節に見るように，卵形線の定義の仕方はいろいろであるが，その中でも，定義の仕方として，その幾何学的構成図が，初等幾何学の定理を含むものを見い出した。これは，卵形線の性質を調べる中で，補助線をいろいろ引くうちに見つかったものである。それを述べる前に初等幾何のシムソン線，直極点について，予備知識として述べる。(図5)

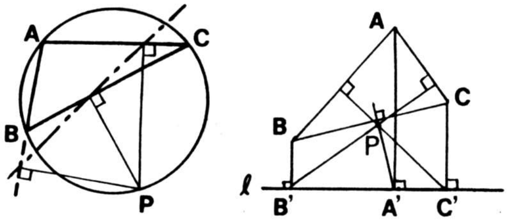

図5　シムソン線と直極点

〔シムソン線〕　$\triangle ABC$ の外接円の一点 P から各辺または，その延長線上に下した垂線の足は一直線上にある。この直線をシムソン線という。

〔直極点〕　直線 l と $\triangle ABC$ が与えられたとき，三角形の頂点 A , B , C から，直線 l に下した垂線の足を A' , B' , C' とする。その A' , B' , C' からそれぞれ対応する各辺，または，その延長線上に下した垂線は1点 P で交わる。この点を l の $\triangle ABC$ に関する直極点という。(図5)

卵形線の定義の幾何学的構図としての一定理

〔定理〕

（条件）1.　直線 l 上に任意の異なる4定点 O_0, S_1 , S_2, S_3 をとる。

2.　S_1 , S_2 , S_3 から直線 l に垂線 m_1 , m_2 , m_3 を立てる。

3.　直線 l 上の動点 O_α $(O_0O_\alpha > O_0O_3/2)$ をとり，O_α を中心，O_0O_α を半径とする円と，m_1 , m_2 , m_3 の交点をそれぞれ，U_1 , U_2 , U_3 とする。(図6参照)

（仮定）　このとき，直線 l の $\triangle U_1U_2U_3$ に関する直極点を P とする。

（結論）　P は，S_1 , S_2 , S_3 を焦点とし，O_0 を等距離円の中心とするデカルトの卵形線上にある。(動点 O_α の変化により，動点 P は卵形線を描く)

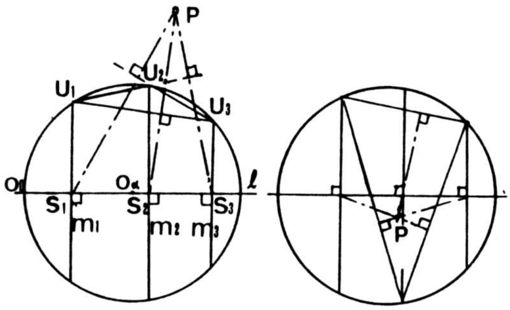

図6　卵形線と直極点

（コンピュータによる作図）　(図7)

図7に定理に基づく直極点が卵形線を描くことを，パソコンにより作図し，確かめている[6)]。具体的には，図7は，動円 O_α を3つと6個の三角形を描き，3焦点より垂線を引き6個の直極点を求めた。その3個づつが，卵形線の円分枝と外分枝上にあり，卵形線を形づくるものとなっていることを示している。

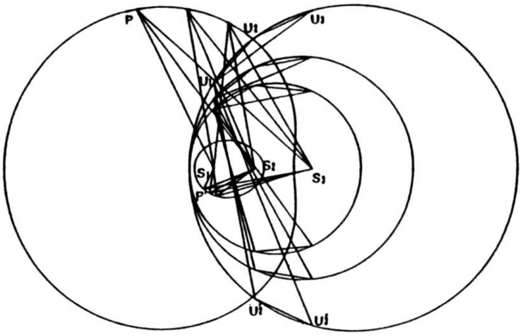

図７　卵形線の幾何学的構図

次に，証明のため２つの補題を考える。

〔補題１〕

O_0 から△ $U_1\,U_2\,U_3$ の各辺またはその延長線上に下した垂線の足を R_1 , R_2 , R_3 とすると， $O_0\,R_1$, O_0R_2 , $O_0\,R_3$ は，円 O_α の位置に関係なく一定で，３つの等距離円[8]の半径に等しくなる。

〔証明〕　$O_0\,R_3^2=O_0\,S_1\cdot O_0\,S_2$ を証明すれば，小論[8]より $O_0\,R_3$ は，等距離円の半径で一定といえる。

図８において，円 O_α の直径を $O_0\,O_\beta$ とする。すると△ $O_0\,U_1\,O_\beta$ は直角三角形。また $m_1\perp l$ より

$\angle\,O_0\,U_1\,S_1=\angle\,U_1\,O_\beta O_0$　　　(1)

また，円周角の定理より

$\angle\,U_1\,U_2\,O_0=\angle\,U_1\,O_\beta O_0$　　　(2)

四角形 $U_1\,R_3\,O_0\,S_1$, $U_2\,R_3\,O_0\,S_2$ はともに，それぞれ同一円周上にある。ゆえに

$\angle\,O_0\,R_3\,S_1=\angle O_0\,U_1S_1$

$\angle U_1\,U_2\,O_0=\angle R_3\,U_2O_0=\angle R_3\,S_2\,O_0$　　　(3)

(1)，(2)，(3)より

$\angle\,O_0\,R_3\,S_1=\angle O_0\,U_1\,S_1=\angle U_1\,U_2\,O_0=\angle R_3\,S_2\,O_0$

$\therefore\angle O_0\,R_3\,S_1=\angle R_3\,S_2\,O_0$

$\therefore\triangle O_0\,S_1\,R_3\backsim\triangle O_0R_3\,S_2$

$\therefore O_0\,R_3^2=O_0\,S_1\cdot O_0\,S_2$　$O_0\,R_2$, $O_0\,R_1$ についても同様にして　$O_0\,R_2^2=O_0\,S_1\cdot O_0\,S_3$

$O_0\,R_1^2=O_0\,S_2\cdot O_0\,S_3$

ゆえに　$O_0\,R_1$, $O_0\,R_2$, $O_0\,R_3$ ，は円 O_α の位置に関係なく， O_0 , S_1 , S_2 , S_3 によって定まる３つの等距離円の半径に等しく一定となる。

〔補題２〕

図９の△ $U_1\,U_2\,U_3$ の外接円周上の一点 O_0 を通る直線 l の△ $U_1\,U_2\,U_3$ に関する直極点 P は， O_0 の△ $U_1\,U_2\,U_3$ に関するシムソン線 $R_1\,R_2\,R_3$ 上にある。証明は，文献７)， p. 212.

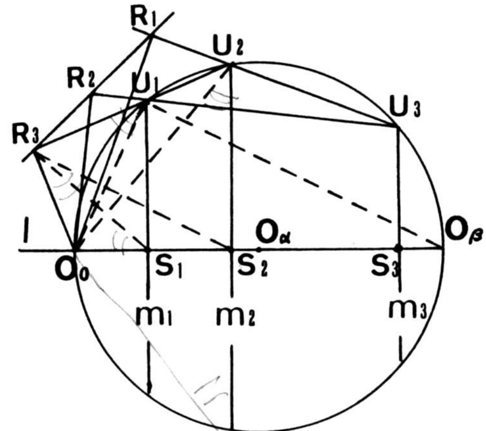

図８　補題１

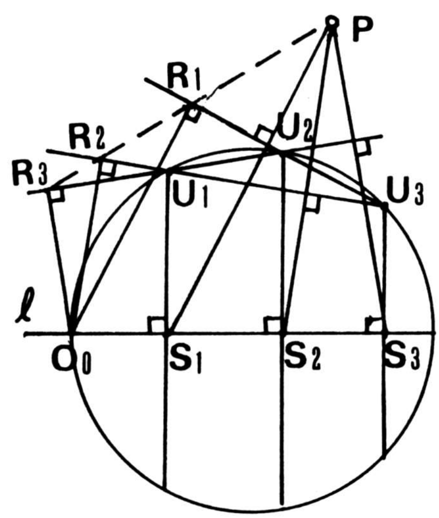

図９　補題２

〔本題の証明〕

補題１より， O_α を変化させたとき， R_1 , R_2 は等距離円 k_1 , k_2 を動く。また，補題２より，図10のように，

$O_0\,R_2\,/\!/\,S_2P$　　(1)　　　$O_0\,R_1\,/\!/\,S_1P$　　(2)

（パップスの定理より(1)(2)のとき $S_1\,R_2\,/\!/\,R_1\,S_2$ ，これより，直線 $R_1\,R_2$ は卵形線の法線となる。）

さて， O_0 , S_1,S_2 , S_3 を与えたとき，次のようにとる。

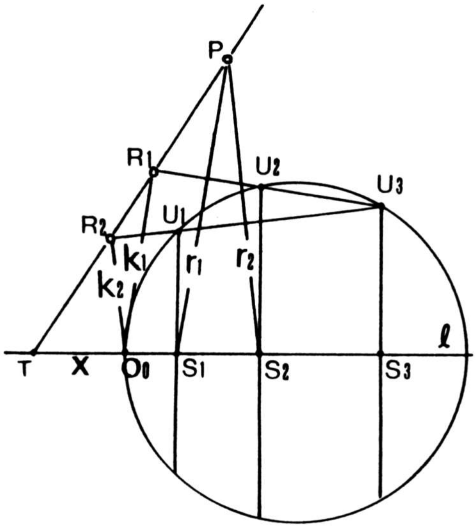

図10　本題

$S_1 S_2 = c$

$$O_0 S_1 = \frac{n^2c}{m^2-n^2} = s_1\ ,\ O_0 S_2 = \frac{m^2c}{m^2-n^2} = s_2$$

$$O_0 S_3 = \frac{k^2c}{m^2-n^2} = s_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{〔A〕}$$

ここで，S_1, S_2 を双極とする双極座標 r_1, r_2 を考える。$S_1P=r_1$, $S_2P=r_2$ とおく。また $O_0 R_1 = k_1$, $O_0 R_2 = k_2$ とおく

R_2P と l との交点を T とする。$O_0T = x$ とおく

(1)より　$k_2 : r_2 = x : x+s_2$　　(1)′

(2)より　$k_1 : r_1 = x : x+s_1$　　(2)′

(1)′，(2)′ より x を消去すると

$$k_2 s_2 r_1 - k_1 s_1 r_2 = k_1 k_2 s_2 - k_1 k_2 s_1 \qquad (3)$$

ここで補題1より $O_0 R_1^2 = O_0 S_2 \cdot O_0 S_3$

$\therefore k_1^2 = s_2 s_3$　(4)同様に　$k_2^2 = s_1 s_3$　(5)

(3)，(4)，(5)より　k_1, k_2 を消去して

$$\sqrt{s_2}\, r_1 - \sqrt{s_1}\, r_2 = \sqrt{s_3}\,(s_2 - s_1)$$

ここで s_1, s_2, s_3 を〔A〕でおきかえると

$$\sqrt{\frac{m^2c}{m^2-n^2}}\, r_1 - \sqrt{\frac{n^2c}{m^2-n^2}}\, r_2 = \sqrt{\frac{k^2c}{m^2-n^2}} \left(\frac{m^2c}{m^2-n^2} - \frac{n^2c}{m^2-n^2} \right)$$

$$\therefore\ mr_1 - nr_2 = kc$$

これは，卵形線の双極座標の定義式に一致し，P は卵形線上にある。なお，図7において，点 P は，交点として多数あり，P 群が，$mr_1 - nr_2 = kc$ で，P' 群は，$mr_1 + nr_2 = kc$ を与える。証明は同様。

4.　卵形線の法線[8), 9)]の一作図法

一つの円と二定点より卵形線を作図する方法は，以前[1)]に述べた。その図において，卵形線の法線を作図する方法を見い出したので，ここに述べる。

〔定理〕

図11におけるように円 O_{12} をかき，定点 S_1, S_2 をとる。次に動平行線 l_1, l_2 をとり，円との交点 M_1，M_2 を求める。この線分 $M_1 M_2$ 上に $O_{12} M_2 \mathbin{/\!/} S_1P$ となる点 P を求めると，これは卵形線上の点である。さらに，$S_1 M_2$ と $S_2 M_1$ の交点を T_0 とすると T_0P は P における卵形線の法線である。

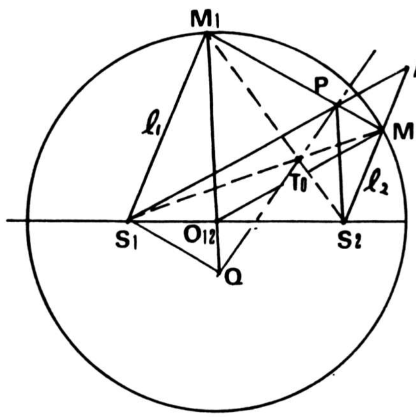

図11　卵形線の法線

〔証明〕

ここで，$\angle T_0P S_1 = \angle P S_2 M_2$ を証明すれば T_0P が S_1P と l_2 との交点を A_2 としたときの $\triangle A_2P S_2$ の外接円の接線より，T_0P は小論[1)]によって T_0P は法線である。

図11において直線 T_0P と直線 $M_1 O_{12}$ との交点を Q とする。すると $\triangle M_1 S_1Q$ と $\triangle S_2 M_2P$ とは T_0 を通る三直線上にあるので，デザルグの定理が用いられ

$M_1 S_1 \mathbin{/\!/} M_2S_2$, $M_1Q \mathbin{/\!/} S_2P$ より　$S_1Q \mathbin{/\!/} M_2P$

つまり　$S_1Q \mathbin{/\!/} PM_1$　　ゆえに

$\angle P S_1Q = \angle A_2P M_2 = \angle P M_2 O_{12} = \angle O_{12} M_1P$

ゆえに四角形 $S_1Q P M_1$ において $\angle PS_1Q = \angle Q M_1P$

よって四角形 $S_1Q P M_1$ は同一円周上にある。ゆえに

$\angle S_1M_1Q=\angle S_1PQ$　ところで平行線の関係から明らかに$\angle S_1M_1Q=\angle PS_2M_2$ $\therefore \angle S_1PT_0=\angle PS_2M_2$

ゆえにT_0Pは法線である。

5. むすび

卵形線の定義の仕方は数多くあり，それは，一連の卵形線の性質を形作っている。今回は，卵形線の空間曲線のパラメトリック表示を見い出し，コンピュータグラフィックスの援用で，円錐の相貫曲線と卵形線の関係がより明らかになった。

また，初等幾何学の直極点の定理などが卵形線の作図に結びつくことを示し，卵形線のもつ幾何学的構図の深さを知ることができた。さらに，卵形線の法線の作図がコンパスと定規だけで，簡単に見い出せることを示した。このようにデカルトの卵形線は，初等幾何学的，射影幾何学的に数多くの構造的性質をもつものであり，その性質は円錐曲線のもつ性質の拡張でありまた円錐曲線のもつ性質は非常に多く，それらを卵形線に拡張することが，これからの研究課題である。さらにまた，卵形線の微分幾何学的性質や，代数幾何学的性質の研究をすれば，おもしろい性質が見つかるのではないかと思われる。

また，卵形線を再に高次な代数曲線に拡張する方法があり，それらの性質もこれからの研究課題である。

参考文献

1）蛭子井博孝，“デカルトの卵形線の二・三の性質”，図学研究，**12**（1973），35－49.

2）日本図学会編，“図形科学ハンドブック”，森北出版（1980），401－408.

3）ロックウッド，松井政太郎訳“カーブ”，みすず書房（1964），200－204.

4）Ernst Schörner，“RAUMBILDLEHRBUCH DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE”，R. OLDENBOÜRG VERLAG MÜNCHEN (1960)，126－127.

5）デカルト，河野伊三郎訳，“デカルトの幾何学”，白水社（1949）.

6）NEC，PC98VM2，PC98RL

グラフテック社 MIPLOT－MP3400 マニュアル.

7）清宮俊雄，“初等幾何学”，裳華房（1972），212.

8）蛭子井博孝，“デカルトの卵形線の曲率円”，図学研究，**19**（1976），7－11.

9）蛭子井博孝，“デカルトの卵形線の性質に関する考察”，図学研究，**37**（1980），9－14.

付記　二円錐面の相貫曲線のパラメトリック表示

$(x+c)^2+y^2=(z-kc)^2/m^2$

$x^2+y^2=z^2/n^2$

この2式の交線は

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2c}\left\{\dfrac{(nt-kc)^2}{m^2}-t^2-c^2\right\} \\ y=\pm\sqrt{t^2-\dfrac{1}{4c^2}\left\{\dfrac{(nt-kc)^2}{m^2}-t^2-c^2\right\}^2} \\ z=nt \end{cases}$$

Some Properties and a Geometrical Composition on the Ovals of Descartes

Hirotaka EBISUI

In this paper we present three matters. First we show that the cross sections of two circular cones, which are the spatial curve of the ovals of Descartes, can be defined by three dimensional parametric formula. These formula were derived so that we can easily obtain the perspective drawings of the spatial curve with computer graphics. Secondly, we present that the ovals can be defined by orthopoles that satisfy some conditions. This defintion indicates the geometrical composition of the ovals, and we present its proof. Finally, we describe the method to draw the normal line of the ovals and also give its proof. Thus additional new properties on the ovals are shown.