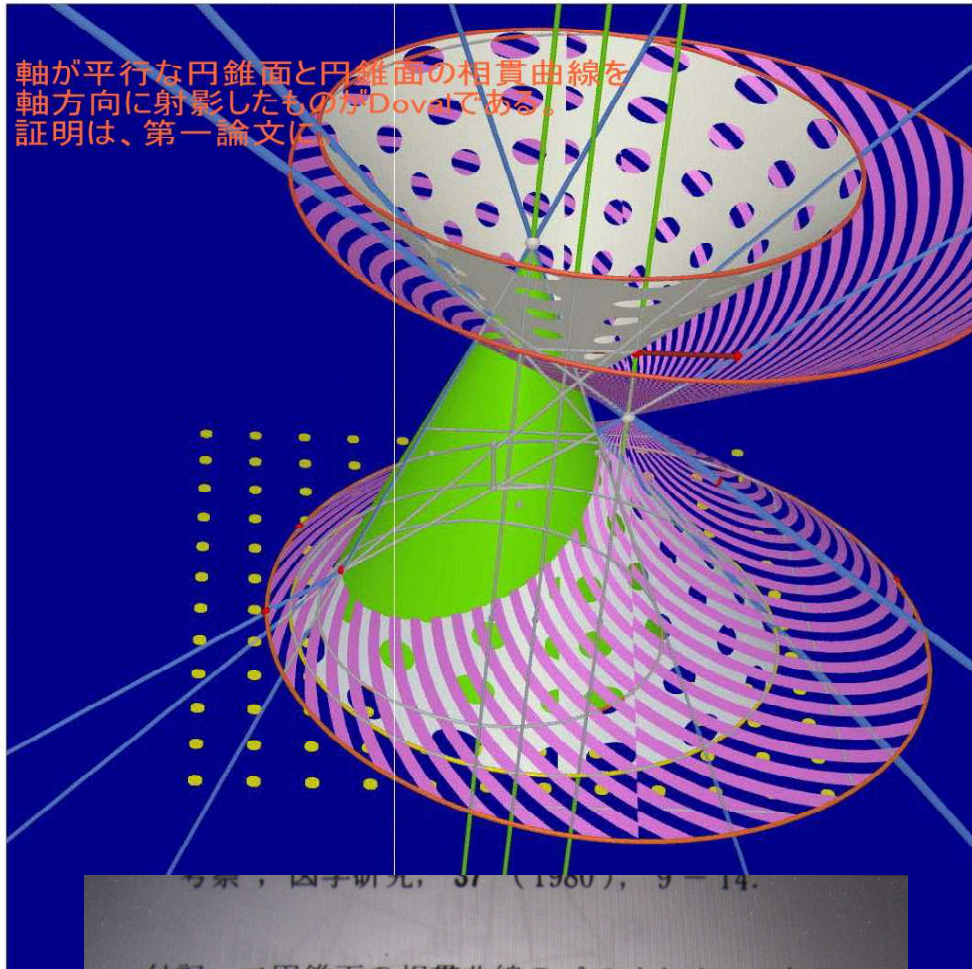


Dovalの空間曲線論 第1論文第4論文参照

頂角の異なる回転軸の平行な2つの上下円錐面の交線（相貫曲線）を軸方向に正射影したら Doval が生まれる。3つの上下円錐面の2つずつの交線が一致する。証明は解析幾何でしている 下の付記中 y は t の4次式を因数分解して使う



参考, 関数研究, 37 (1980), 9-14.

付記 二円錐面の相貫曲線のパラメトリック表示

$$(x+c)^2+y^2=(z-kc)^2/m^2$$

$$x^2+y^2=z^2/n^2$$

この2式の交線は

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2c} \left\{ \frac{(nt-kc)^2}{m^2} - t^2 - c^2 \right\} \\ y = \pm \sqrt{t^2 - \frac{1}{4c^2} \left\{ \frac{(nt-kc)^2}{m^2} - t^2 - c^2 \right\}^2} \\ z = nt \end{cases}$$

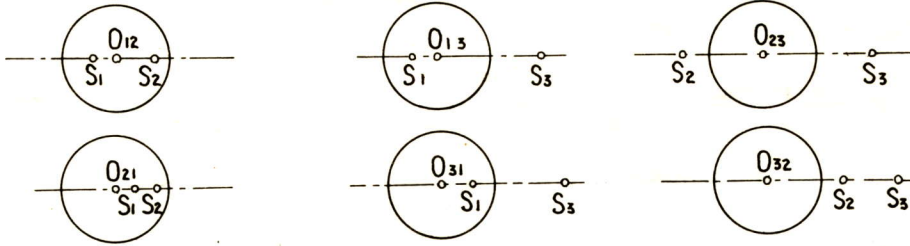


図 15

の卵形線を定義する場合、(19), (20), (21)のどれを使ってもよいことになる。

さて、定義式がわかると、準円、補助円がわかる。また、図13におけるように、準円は準線でもあった。これらの円(準円6コ、補助円6コ)を具体的に描くと、図14のようになる。

ただし、 $m=3, n=2, k=5, R_{12}=2$ として(15), (16)式より、

$$R_{23}=6.4, R_{31}=-8.4$$

図14からわかるように、補助円は、6個の円が互いに接している。これは、補助円の半径と中心の関係から計算してもわかる。また、図15のように、作図3における1つの補助円と2つの焦点の関係は、焦点が補助円上にある場合を除いて、6種類に分類できるが、図14の6個の補助円とそれに対する焦点(補助円  $O_{12}$ ,

$O_{21}$ は焦点間  $S_1 S_2$ をそれぞれ、内分、外分した点を中心としている)の関係は、この6種を全部満たす。また、卵形線は、内分枝が一番内側の補助円に内接し、外分枝が一番外側の補助円に外接することがわかる。これより、卵形線は、一方を包含する二つの補助円によってその概形を掴むことができる。

據

### 5. デカルトの卵形線とその空間曲線

図16におけるように、頂角の異なる回転軸の平行な円錐面の交線の回転軸に垂直な平面への正投影象は、デカルトの卵形線であることが知られている。<sup>1)</sup>

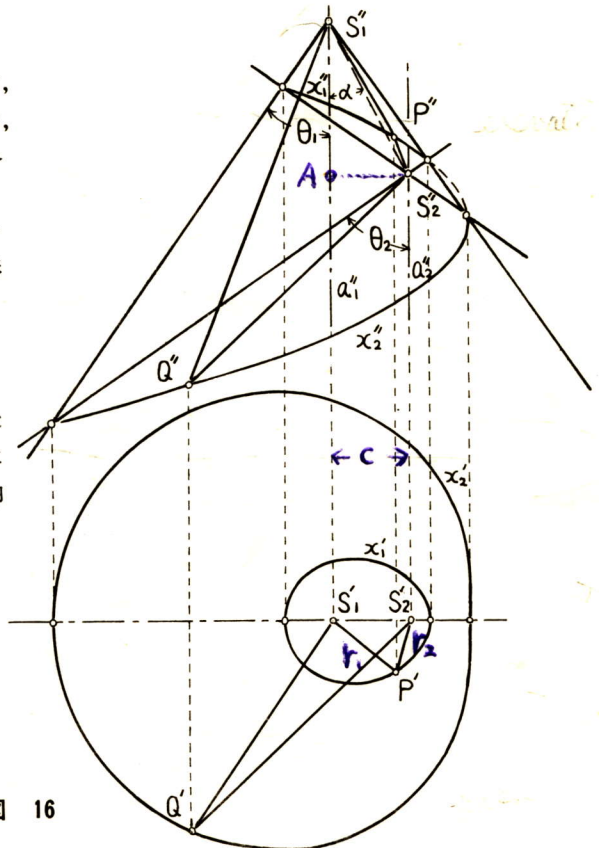


図 16

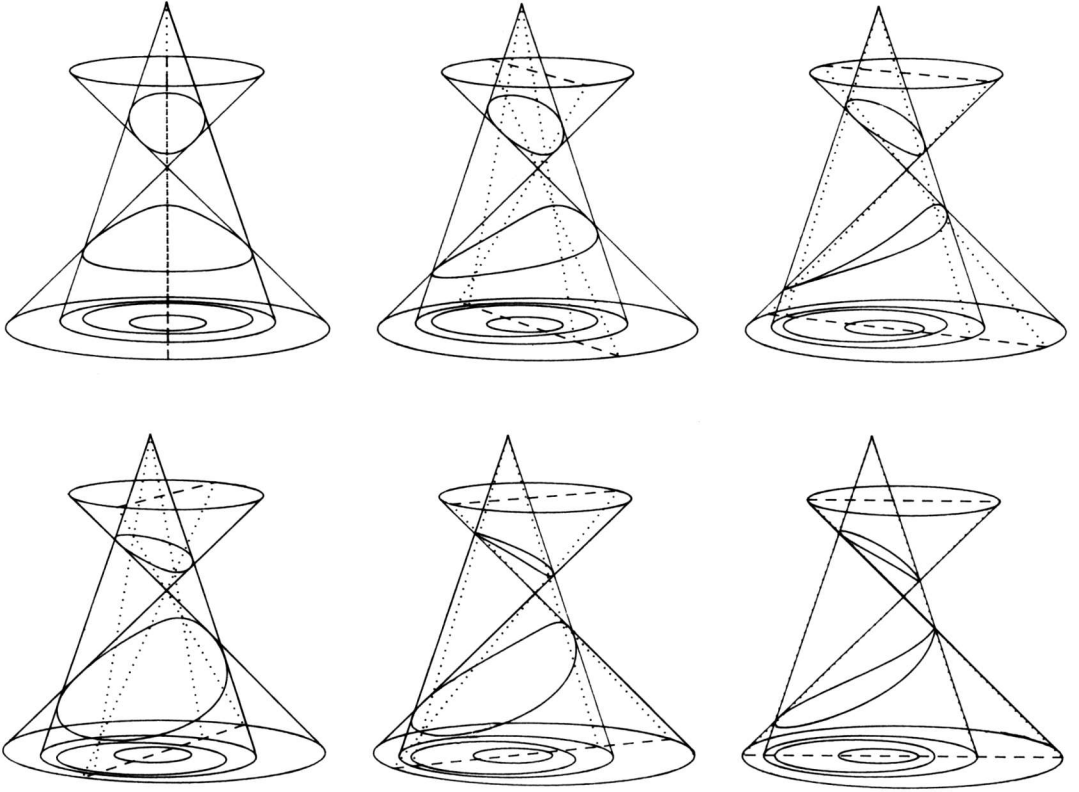


図3 円錐面の交線としての卵形線

$$[m^2(x^2+y^2) + n^2\{(x-c)^2+y^2\} - k^2c^2]^2 = 4m^2n^2\{(x-c)^2+y^2\}(x^2+y^2)$$

(3)は、1つの例として、一定点  $S$  と一つの定円  $O$  が与えられたとき、その点と円からの距離の比が一定な点の軌跡は卵形線である。

(4)は、回転軸の平行な円錐面と円錐面の相貫曲線を軸方向に正投影した曲線で定義される。

代数的には、2つの円錐面が式

$$(x+c)^2+y^2=(z-kc)^2/m^2 \tag{2}$$

$$x^2+y^2=z^2/n^2 \tag{3}$$

の2式から  $z$  座標を消去したもの。なお、図3を描くため、空間の相貫曲線の3次元パラメトリック表示を次のように導出した。(3)式を満たす  $t, \alpha$  による媒介変数表示は  $x=t \cdot \cos \alpha, y=t \cdot \sin \alpha, z=nt$  で、この式を、(2)(3)式より  $y$  を消去した式に代入して、 $\alpha$  と  $t$  の関係式を求め、その式から  $\alpha$  を消去すると、付記のように  $t$  の媒介変数表示を得る。

図3は、円錐面とその相貫図形のいわゆるフレーム

図形で、透視図法で、 $30^\circ$ ずつ回転したものをやや上方から眺め、投影面は軸に平行な面としている。また円錐の底面には、空間曲線の軸方向からの正投影した卵形線の図も描いている。この図では、内側の2つの長円である。

(5) 定直線  $l_1$  上に任意に3点  $F, A, G$  をとる。 $A$  を通り  $l_2$  上に  $AG=AR$  となる点  $R$  をとる。今、直線  $l_1$  上に動点  $P$  をとり、 $l_2$  上に動点  $Q$  をとる。ここで、 $AP:AQ$  は任意の定比 ( $k:n$ ) であり、 $P$  を  $P_1, P_2, P_3, \dots$  と動かす、それに対応して、 $Q$  を  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  と動かす。つまり  $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2 \parallel P_3Q_3, \dots$  ととる。このとき、2円 {中心:  $F$ , 半径:  $FP_i (=FA+AP_i)$ }, {中心:  $G$ , 半径:  $RQ_i (=AR-AQ_i)$ } の交点列は、 $P_i$  が動くとき卵形線を描く。これは、“デカルトの幾何学<sup>5)</sup>”の中にあるデカルトによる定義であり、(1)の双極座標の定義式で表せることを示す。

$$\text{半径 } FP=FA+AP=r_3$$

$$RQ=AR-AQ=r_1 \text{ とおく}$$

$\angle S_1 M_1 Q = \angle S_1 P Q$  ところで平行線の関係から明らかに  $\angle S_1 M_1 Q = \angle P S_2 M_2 \therefore \angle S_1 P T_0 = \angle P S_2 M_2$   
ゆえに  $T_0 P$  は法線である。

5. むすび

卵形線の定義の仕方は数多くあり、それは、一連の卵形線の性質を形作っている。今回は、卵形線の空間曲線のパラメトリック表示を見出し、コンピュータグラフィックスの援用で、円錐の相貫曲線と卵形線の関係がより明らかになった。

また、初等幾何学の直極点の定理などが卵形線の作図に結びつくことを示し、卵形線のもつ幾何学的構図の深さを知ることができた。さらに、卵形線の法線の作図がコンパスと定規だけで、簡単に見い出せることを示した。このようにデカルトの卵形線は、初等幾何学的、射影幾何学的に数多くの構造的性質をもつものであり、その性質は円錐曲線のもつ性質の拡張でありまた円錐曲線のもつ性質は非常に多く、それらを卵形線に拡張することが、これからの研究課題である。さらにまた、卵形線の微分幾何学的性質や、代数幾何学的性質の研究をすれば、おもしろい性質が見つかるのではないと思われる。

また、卵形線を更に高次元代数曲線に拡張する方法があり、それらの性質もこれからの研究課題である。

参考文献

- 1) 蛭子井博孝, “デカルトの卵形線の二・三の性質”, 図学研究, 12 (1973), 35 - 49.
- 2) 日本図学会編, “図形科学ハンドブック”, 森北出版 (1980), 401 - 408.
- 3) ロックウッド, 松井政太郎訳 “カーブ”, みすず書房 (1964), 200 - 204.
- 4) Ernst Schörner, “RAUMBILDBLEHRBUCH DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE”, R. OLDENBOÛRG VERLAG MÜNCHEN (1960), 126 - 127.
- 5) デカルト, 河野伊三郎訳, “デカルトの幾何学”, 白水社 (1949).
- 6) NEC, PC98VM2, PC98RL  
グラフテック社 MILOT-MP3400 マニュアル.
- 7) 清宮俊雄, “初等幾何学”, 裳華房 (1972), 212.

- 8) 蛭子井博孝, “デカルトの卵形線の曲率円”, 図学研究, 19 (1976), 7 - 11.
- 9) 蛭子井博孝, “デカルトの卵形線の性質に関する考察”, 図学研究, 37 (1980), 9 - 14.

付記 二円錐面の相貫曲線のパラメトリック表示

$$(x+c)^2 + y^2 = (z-kc)^2 / m^2$$

$$x^2 + y^2 = z^2 / n^2$$

この2式の交線は

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2c} \left\{ \frac{(nt-kc)^2}{m^2} - t^2 - c^2 \right\} \\ y = \pm \sqrt{t^2 - \frac{1}{4c^2} \left\{ \frac{(nt-kc)^2}{m^2} - t^2 - c^2 \right\}^2} \\ z = nt \end{cases}$$

Some Properties and a Geometrical Composition on the Ovals of Descartes

Hiroataka EBISUI

In this paper we present three matters. First we show that the cross sections of two circular cones, which are the spatial curve of the ovals of Descartes, can be defined by three dimensional parametric formula. These formula were derived so that we can easily obtain the perspective drawings of the spatial curve with computer graphics. Secondly, we present that the ovals can be defined by orthopoles that satisfy some conditions. This definition indicates the geometrical composition of the ovals, and we present its proof. Finally, we describe the method to draw the normal line of the ovals and also give its proof. Thus additional new properties on the ovals are shown.

5-1 二つの円錐面の相貫曲線と卵形線 Dovalの空間曲線 第1、第4論文より

上記の相貫曲線の正投影象が卵形線であることを、双極座標を使って示す。

今、二つの平行な回転軸によって決まる平面を  $\pi_2$ 、回転軸に垂直な平面を  $\pi_1$  とする。ここで、 $\pi_2$  を立面図、 $\pi_1$  を平面図としたのが、図16である。さて、頂点  $S_1, S_2$  を持つ円錐面の頂角をそれぞれ、 $\theta_1, \theta_2$  とする。ここで、 $\cot \theta_1 = m, \cot \theta_2 = n$  とおく。すなわち、 $m, n$  は、 $\pi_1$  面に対する円錐面の傾角を表わす。また回転軸間距離、すなわち、 $S_1 S_2$  を  $c$  とする。また、回転軸を  $a_1, a_2$  とする。 $a_1$  と  $S_1 S_2$  のなす角を  $\alpha$  とおき、 $\cot \alpha = k$  とおく。交線(すなわち、デカルトの卵形線の空間曲線)を  $x$  とする。 $x$  上の任意の点  $P$  と  $S_1$  を結ぶ線分(すなわち、円錐  $S_1$  の  $P$  点を通る母線上の線分)の  $\pi_1$  面への正射影を  $r_1$  とする。同様に  $S_2 P$  の方を  $r_2$  とする。すると、 $S_1 P$  と  $S_2 P$  の  $a_1$  軸 への正射影は、それぞれ、 $m r_1, n r_2$  に等しく、これらの和は、 $S_1 S_2$  の  $a_1$  軸 への正射影すなわち  $k c$  に等しい。ゆえに、 $m r_1 + n r_2 = k c$  となり、 $\pi_1$  面上の点  $P$  は、(2) 式を満たすデカルトの卵形線上の点であることがわかる。  $Q$  についても同様に考えて、 $m r_1 - n r_2 = k c$  を満たすことがわかる。

5-2 三つの円錐面の相貫曲線と卵形線

次に、立面図について考える。 $\pi_2$  面上での二つの円錐面の母線の交点を、図17のように、 $A, B, C, D$ 、とする。 $\angle DAC = \angle DBC$  より、明らかに四点  $A, B, C, D$  は同一円周上にある。ここで、直線  $AB$  と  $DC$  の交点を  $S_3$  とする。また、直線  $BS_3$  上に  $S_3$  に対して  $B$  と反対側の1点を  $E$  とする。 $\angle ADC = \angle S_1 B A$  より、 $\angle CS_3 E$  の二等分線  $a_3$  は、 $a_1, a_2$  に平行である。つまり、円錐  $S_1$  と円錐  $S_2$  を決めると、頂点を  $S_3$ 、回転軸を  $a_3$ 、子午線を直線  $AB$  とする円錐面が、一意的に決まることがわかる。ここで、円錐面  $S_1, S_2$  の交線が円錐面  $S_2, S_3$  の交線および円錐面  $S_3, S_1$  の交線と空間的に一致することを示す。

図16と同様に、円錐  $S_3$  の頂角を  $\theta_3$  とする。また、 $a_2 \parallel a_3$  より、 $\angle BS_3 C$  の二等分線は、 $a_2$  に直交する。この交点を  $H_3$  とする。さて、 $S_2 H_3, S_3 H_3$ 、頂角  $\theta_3$  を  $m, n, k, c$  を使って表わすと、次のようになる。

$$S_2 H_3 = \frac{n^2 (k^2 - m^2)}{k (m^2 - n^2)} c \quad S_3 H_3 = \frac{k^2 - m^2}{m^2 - n^2} c \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\cot \theta_3 = \tan \alpha \cdot \cot \theta_1 \cdot \cot \theta_2 = \frac{m n}{k} \quad \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 $S_2$  を原点、 $a_2$  を  $Z$  軸、 $a_1 a_2$  で決まる平面に  $X$  軸、それに垂直に  $Y$  軸をとると、三つの円錐面は、上式の関係から、頂点の座標が、 $S_1 (-c, 0, k c), S_2 (0, 0, 0), S_3 (S_3 H_3, 0, -S_2 H_3)$  と表わされ、傾きが  $m, n, \frac{m n}{k}$  と表わされるから、次式のように表わされる。

$$(X + c)^2 + Y^2 = \frac{(Z - k c)^2}{m^2} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$X^2 + Y^2 = \frac{Z^2}{n^2} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\left( X - \frac{k^2 - m^2}{m^2 - n^2} c \right)^2 + Y^2 = \left\{ Z + \frac{n^2 (k^2 - n^2)}{k (m^2 - n^2)} c \right\}^2 \frac{m^2 n^2}{k^2} \quad \dots\dots\dots (26)$$

この三式のうち二式、たとえば (24) 式と (25) 式から  $X$  を消去したものと、(25) 式と (26) 式から  $X$  を消去したものとが一致し、また、 $Y, Z$  についても同じことから、円錐面  $S_1, S_2, S_3$  の交線である空間曲線は、ただ1組存在することがわかる。

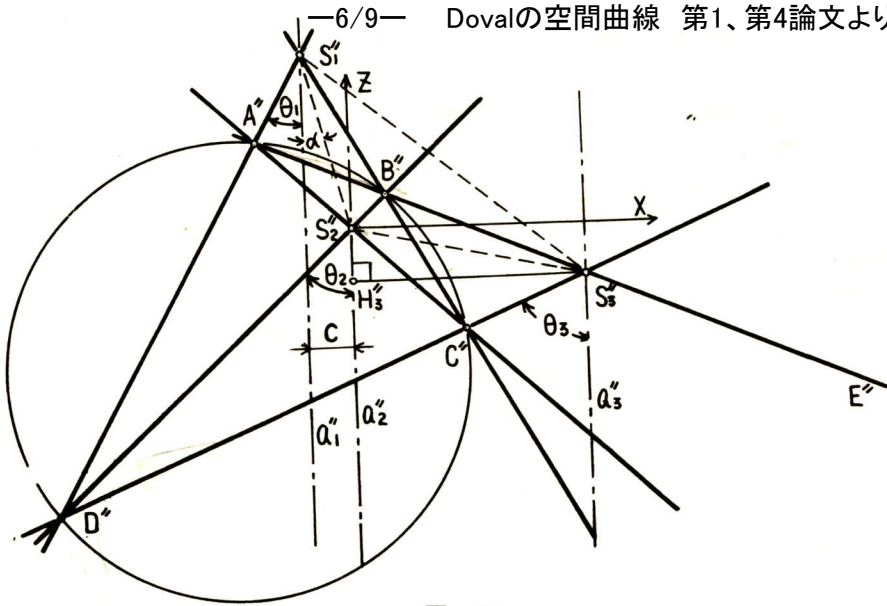


図 17

次に、 $\Delta S_1 S_2 B$ について見ると、 $S_1 B$ 、 $S_2 B$ 、 $S_1 S_2$ の $\pi_1$ との傾きが $m$ 、 $n$ 、 $k$ であり明らかに $k > m > n$ であり、これは、(3)式に対応している。同様に、 $\Delta S_2 S_3 B_2$ において三辺の傾きの関係が(4)式の関係にあることがわかる。 $\Delta S_3 S_1 B$ についても、同様。

また、(19)～(21)式の±の符号も図17と比較すれば明らかである。つまり、空間曲線 $x_1$ (図16の内分枝を作る曲線)が、回転軸方向に関して、 $S_1$ 、 $S_2$ の間にあるから、 $r_1$ 、 $r_2$ の係数の正負の符号が一致し、 $x_2$ は、 $S_1 S_2$ の外側にあるから、 $r_1$ 、 $r_2$ の係数の正負の符号が逆である。また、 $x_1$ 、 $x_2$ と $S_2$ 、 $S_3$ などの関係から(20)、(21)の±の符号がわかる。

さて、ここで、空間図形とデカルトの卵形線の平面的性質である準円、補助円などの関連を考える。

図18におけるように準円は、各円錐面の頂点を通る回転軸に垂直な平面で切断したときのできる円を $\pi_1$ に正投影したものであることがわかる。これからも、図14におけるように、6個の準円が存在することがわかる。ただし、図18は、立面図のみ。

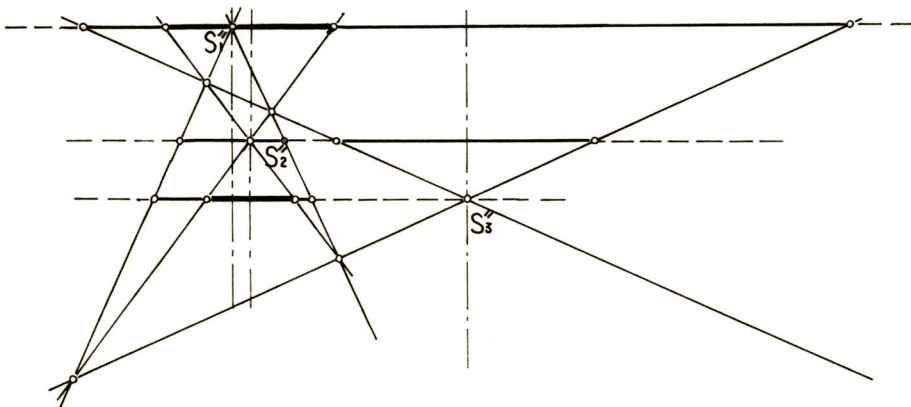


図 18

さて、図19において、四点A, B, C, Dおよびその中点の平面図を考へる。図中  $O_{12}$ ,  $O_{21}$  は、それぞれAB, CDの中点であるが、図16におけるように  $m, n, k, c$  をとつたとき、 $S_1 O_{12} : O_{12} S_2 = \frac{n}{m} : \frac{m}{n}$ ,  $S_1 O_{21} : O_{21} S_2 = \frac{m}{n} : \frac{n}{m}$  となることが簡単な計算からわかる。このことから、 $O_{12}$ ,  $O_{21}$  は、焦点  $S_1, S_2$  を内、外分する点であり、補助円の中心であることがわかる。また、 $O_{12} B'$  および  $O_{21} D'$  がそれぞれの半径である。

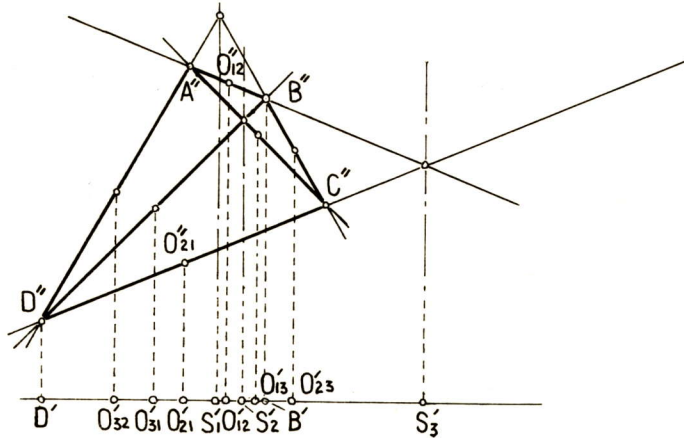


図 19

以上のことから、 $mr_1 \pm nr_2 = kc$  で与えられるデカルトの卵形線に付随する準円、補助円、準線の位置関係が、図17さえ書けば、ほぼ明らかになる。また、1組のデカルトの卵形線は、円に内接する四角形ABCD（特別な場合三角形となる）によって決定されると言える。

### 6. デカルトの卵形線の接線

今、一つの卵形線の定義式がわかっているものとする。つまり、作図1~4までのいずれかの条件が与えられているとする。図20において、作図1の条件が与えられており、卵形線上の点  $P_1$  における接線を考へる。今、 $A_1 S_2$  の垂直二等分線は、 $P_1$  における楕円の接線であることが知られている。ここで、 $A_1 P_1$  の垂直二等分線と楕円上の点  $P_1$  の接線との交点を  $V_1$  とする。すると、 $P_1 V_1$  が  $P_1$  におけるこの卵形線に対する接線  $t_1$  である。つまり、 $\triangle A_1 P_1 S_2$  の外心  $V_1$  と  $P_1$  を結ぶ直線が  $P_1$  における卵形線に対する接線である。 $Q_1$  についても同様。

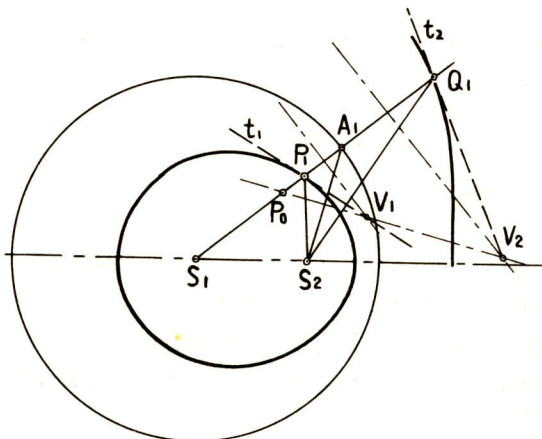


図 20

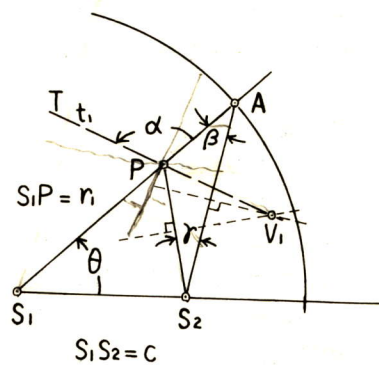


図 21

なお、ここで、 $P_1$  が  $P_0$  に一致した場合、 $P_1 V_1$  と楕円の接線が一致し、また、 $P_1$  が  $A_1$  に一致したとき ( $\frac{n}{m} = 0$ )  $V_1 P_1$  が  $A_1$  における円  $S_1$  の接線であることは、明らかである。

次に、解析的に  $t_1$  が点  $P_1$  における卵形線に対する接線であることを示す。

図21におけるように極座標表示における曲線  $r = f(\theta)$  上の点  $P$  での接線  $PT$  と、動径  $S_1 P$  から  $PT$  のほうへまわる角を  $\alpha$  とすると次式が成立する<sup>4)</sup>

$$\cot \alpha = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \dots\dots\dots (27)$$

今、卵形線が、 $mr_1 \pm nr_2 = kc$  のとき、 $S_1$  を極  $S_1 S_2$  方向を始線とすれば、 $r_1$  は次式を満たす。

$$r_1 = \frac{c \{ (km - n^2 \cos \theta) \mp n \sqrt{n^2 \cos^2 \theta - 2km \cos \theta + k^2 + m^2 - n^2} \}}{m^2 - n^2} \dots\dots\dots (28)$$

ここで、複号の-は内分枝、+は外分枝を表わす。ただし、 $k > m > n > 0$  これより、

$$\frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{d\theta} = \frac{\mp n \sin \theta}{\sqrt{n^2 \cos^2 \theta - 2km \cos \theta + k^2 + m^2 - n^2}} \dots\dots\dots (29)$$

ここで、図21から

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos (\frac{\pi}{2} + \gamma)}{\sin (\frac{\pi}{2} + \gamma)} = \frac{-\sin \gamma}{\cos \gamma} \dots\dots\dots (30)$$

ところで、 $S_2 P : PA = m : n$  より、 $m \sin \gamma = n \sin \beta$  ..... (31)

また、 $\triangle AS_1 S_2$  において

$$\frac{c}{\sin \beta} = \frac{c \sqrt{(k^2/m^2) + 1 - 2(k/m) \cos \theta}}{\sin \theta} \dots\dots\dots (32)$$

(31)、(32) 式を (30) 式に代入して、 $\beta$ 、 $\gamma$  を消去すると

$$\cot \alpha = \frac{-n \sin \theta}{\sqrt{n^2 \cos^2 \theta - 2km \cos \theta + k^2 + m^2 - n^2}} \dots\dots\dots (33)$$

これは、(29) の-の符号をもつ式に一致し、(27) 式が成立することがわかる。ゆえに、 $t_1$  が  $P_1$  における卵形線の接線であることがわかる。 $t_2$  についても同様。

### 7. 総括

デカルトの卵形線を楕円の一般化と考え、考察した結果、以下のような二・三の幾何学的性質がわかった。

○円錐曲線には、準円、補助円、準線が付随しているが、これは、卵形線にも同じような準円、補助円、準線が付随していた。しかし、卵形線には、焦点が3つあり、したがって、準円が6個あった。また、卵形線の準線は円であり、円の中心が無限遠点にある場合が、円錐曲線の準線となった。このことから、デカルトの卵形線の特別な場合が円錐曲線であることが明らかになった。

○デカルトの卵形線の接線の作図法も得られた。また、デカルトの卵形線の特別な場合が、



リマソンであることが知られているが、卵形線の接線の作図法は、この場合にも使える。  
○卵形線の空間曲線をつくる三つの円錐について考えることにより、準円、補助円、準線および三つの焦点の位置が簡単にわかるようになった。

参 考 文 献

- 1) ERNST SCHÖRNER, "RAUMBILD-LEHRBUCH DER DARSTELLENDE GEOMETRIE" R. OLDENBOURG VERLAG MÜNCHEN, 1960  
P. 126~P. 127
- 2) F. ホーエンベルク著 増田祥三訳 "技術における構成幾何学" 日本評論社 1969  
P. 55~P. 66
- 3) ロックウッド著 松井政太郎訳 "カーブ" みすず書房 1964  
P. 1~P. 38 P. 200~P. 204
- 4) 栗田稔著 "いろいろな曲線" 共立出版 1969 P. 91