卵形線とコンフィギュラチオン

蛭子井博孝
卵形線研究センター＊

要旨： 楕円の構図を拡張すると、卵形線になることを以前見つけた。その卵形線は、作図法や、その性質、右離心率、左離心率、短軸、接線、法線、等距離円等、多くの図示できる性質を持つ。今回は、そのような構図の中で、射影幾何的性質、コンフィギュラチオンの構図を含むことを見つけた。ここで、卵形線の作図法を、作図定理として再度示し、また、コンフィギュラチオンとは何か、パップスの定理、デザルグの定理の構図等で復習し、卵形線の構図とコンフィギュラチオンの関係等、図形の不思議さを味わいたい。

キーワード：平面幾何学：卵形線、作図定理、射影幾何：パスカルの定理、デザルグの定理、コンフィギュラチオン

１．はじめに

卵形線は、点と円からの距離の比が一定な曲線と定義される。これは、デカルトが発見した卵形線と同じもので、楕円を拡張した曲線といえる。この曲線の作図法定理は、【１】定円（準円）と点（焦点）と比を与えて、そこから、作図するもの、【２】２円（準円）を与えて、作図するもの、【３】円（補助円）と中心線上の２点を与えて、作図するもの、【４】２補助円を与えて、作図するものがある。この４つの作図法は、拙論［１］で報告している。そして、作図法【４】の証明は、拙論［２］で報告している。

さて、今回、作図法と言う構図の中のある補助線と点が、射影幾何学的性質であるコンフィギュラチオン(3)をなしていることを見つけた。コンフィギュラチオンとは、ｐ個の点をｑ本の線が通り、逆に、ｓ本の線上にｔ個の点があり、ｐｑ＝ｓｔの関係を満たしている構図を言う。

ここでは、卵形線の定義、コンフィギュラチオンの基本的例、作図法の構図とコンフィグラチオンを、図示する。その構図が成り立つことは、構図が作図できること、つまり、共線や共点が、ＣＡＤ的確認が取れる。つまり、数値入力を使わず、円や線や平行線を描き、範囲拡大を１０００倍ぐらいしてみて、共点性を確かめることが出来たことを持って、その図の確からしさを確認した。しかし、これで、十分でないと思う人に、構図の成立の初等幾何学による証明も示す。

とにかく、卵形線の構図を、コンフィギュラチオンと言う構図を通して、その射影幾何学的側面や、図の持つおもしろさを味わっていただきたい。

740-0012　岩国市元町４丁目 12-10

２。　卵形線の定義、作図定理

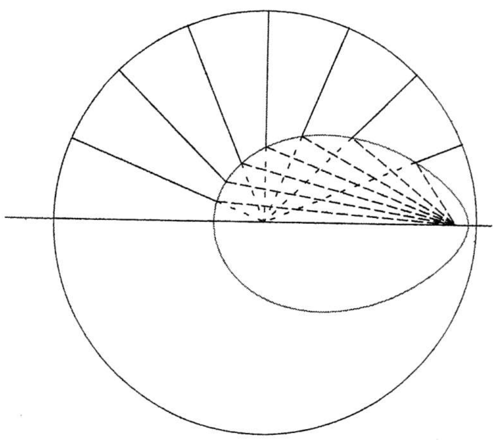


図１　卵形線の定義

卵形線は、点と円からの距離の比が一定な曲線と定義される。図１に、この定義による卵形線を示す。

次に，準円，補助円などが与えられたときの卵形線の作図定理を述べる。

作図定理において、卵形線は描かれていないが、点P、および点Qを動点として、考えてほしい。図１、および４節において、卵形線の具体例を示している。

【作図定理１】．任意の１つの円S１を準円とし，他に１つの焦点S２（S１≠S２）と定比　が与えられたとき，この卵形線を描くこと。

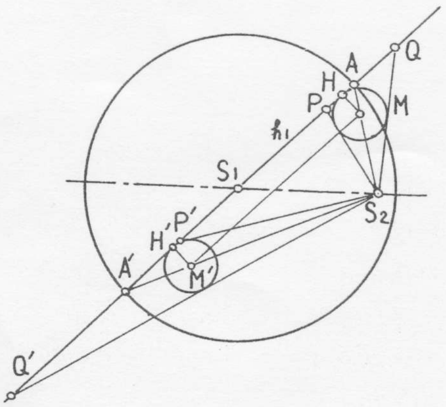


図２　　作図定理１による卵形線の構図

図２にいて，円 Ｓ １と１点 Ｓ ２が与えられている。今，中心 Ｓ １を通る任意な直線ｈ１と円 Ｓ １との交点を Ａ とする。Ａ と Ｓ ２を結ぶ直線上に Ｓ ２Ｍ：MA ＝ｍ：ｎとなるようにＭをとる。次に，Ｍ から直線ｈ１を下し，その足を Ｈ とする。Ｍ を中心とし，MH を半径とする円を描き，Ｓ ２を通り，その円に接する直線ｈ１との交点をP、Qとする。Ｓ１を中心にｈ１を１回転させるとき，P，Q は，卵形線を描く。ここで，P，Q は同じ性質をもつが，P は内分枝を，Q は外分枝を満たすものを表わす。以下の図においても同様である。

【作図定理２】．任意の２つの円を準円として与えられたとき，この卵形線を描くこと。

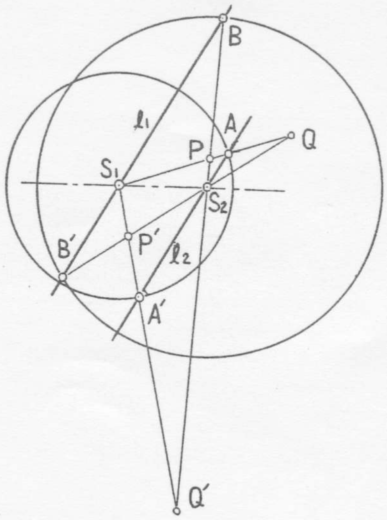


図３　作図定理２による卵形線の構図

図３において，円 Ｓ １と円 Ｓ ２が与えられている。まず，Ｓ １，Ｓ ２を通り，互いに平行な直線ｌ１，ｌ２を引く．ｌ１が円Ｓ２と交わる点B，ｌ２が円Ｓ１と交わる点をＡとする。このとき，直線Ｓ１ＡとＳ２Ｂの交点P，Qは，Ａ あるいはＢが，円 Ｓ ２上あるいは円 Ｓ １上をそれぞれ動くとき，卵形線を描く。

【作図定理３】．任意の１つの円0を補助円とし，他に２つの焦点S1，S２（S１≠S２）が0と共線であるように与えられたとき，この卵形線を描くこと。

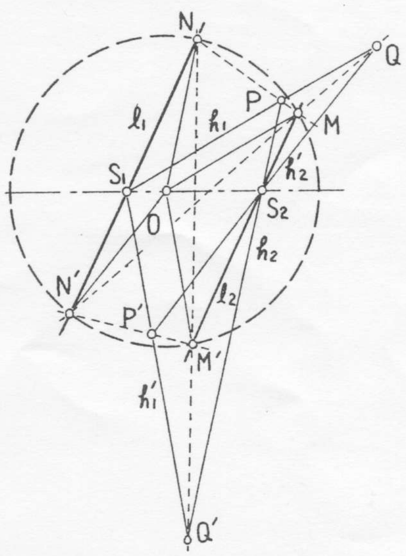


図４　作図定理３による卵形線の構図

図４において，円 Ｏ と、その中心線上に任意に

二点Ｓ１，Ｓ２が与えられている。　まず，Ｓ１Ｓ２を通り，互いに平行な直線を１１，１２とする。１１，１２が円Ｏと交わる点をそれぞれ N，Ｍとする。次に、ON に平行にＳ２を通る直線ｈ２を引く。同様に OM に平行にＳ１を通る直線ｈ１を引く。すると，ｈ１，ｈ２の交点 P，ｈ1,ｈ２’の交点Ｑは，ＮあるいはＭが円Ｏ上を動くとき，卵形線を描く。ここで，N，P，Ｍあるいは N’，Q，Ｍが共線であることは，パップスの定理より明らか。

【作図定理４】．任意の２つの円01，円02が補助円として与えられたとき，この卵形線を描くこと。

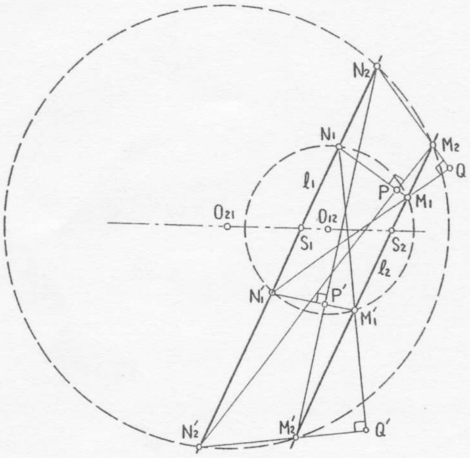


図５　作図定理４による卵形線の構図

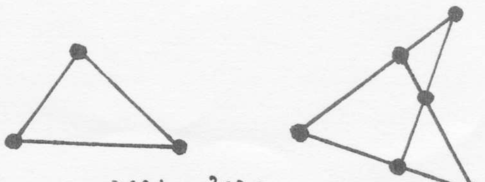
図５において，円Ｏ１，円Ｏ２（Ｏ１≠Ｏ２）が与えられている。前節の準円と補助円の関係より，焦点Ｓ１，Ｓ２を求め，Ｓ１，Ｓ２を通り，互いに平行な直線１１，１２を引く。Ｉ１と円Ｏ１，Ｏ２が交わる点をそれぞれＮ１，Ｎ２とし，同様にＭ１，Ｍ２をとる。次に直線Ｎ１Ｍ１と直線Ｎ２Ｍ２が垂直に交わる点をＰあるいはＱとする。すると，Ｐ，Ｑは，Ｎ１あるいはＭ１が円Ｏ１上を動くとき，卵形線を描く。

３．コンフィギュラチオンの例

この節では、１節で述べたコンフィグラチオンｐｑ＝ｓｔの例を数例示す

点の数（線の数）＝線の数（点の数）

ｐ（ｑ）＝ｓ（ｔ）で表す



3(2) = 3(2)

図６　三角形~~3(3)=3(3)~~、 四辺形６（２）＝４（３）

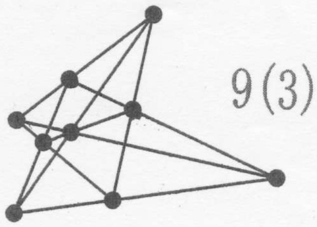


図７　パップスの定理　９（３）

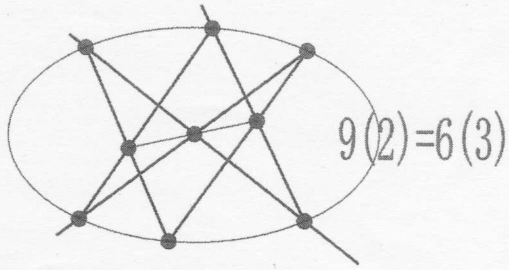


図８　パスカルの定理　９（２）＝６（３）

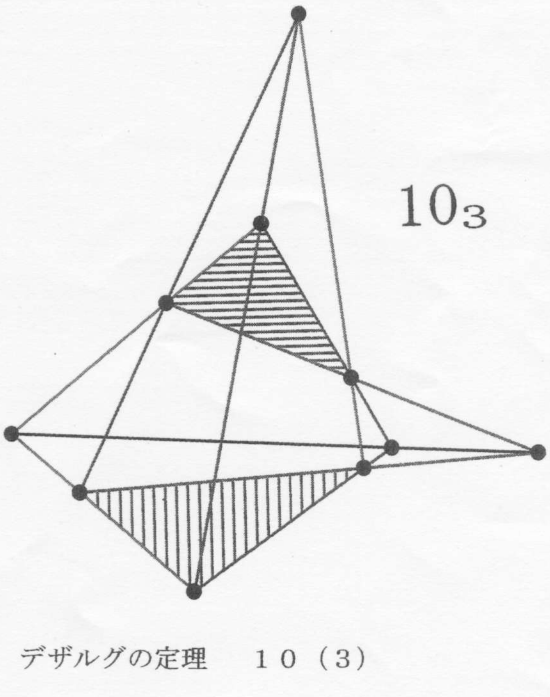


図９　デザルグの定理　　１０（３）

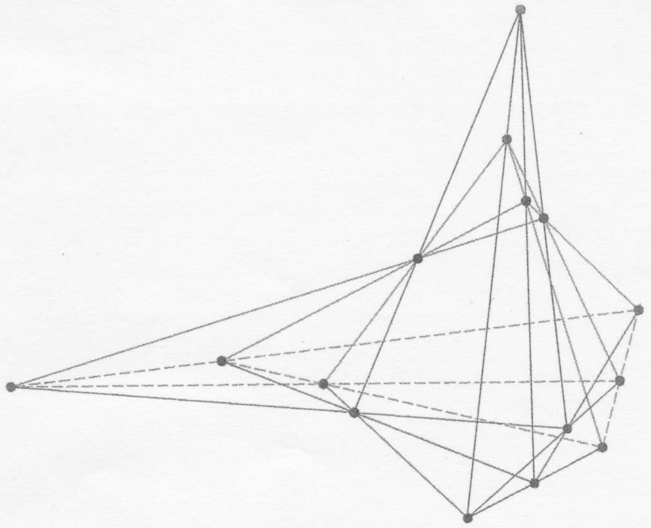


図１０　４次元のデザルグの定理　　15(4)=20(3)

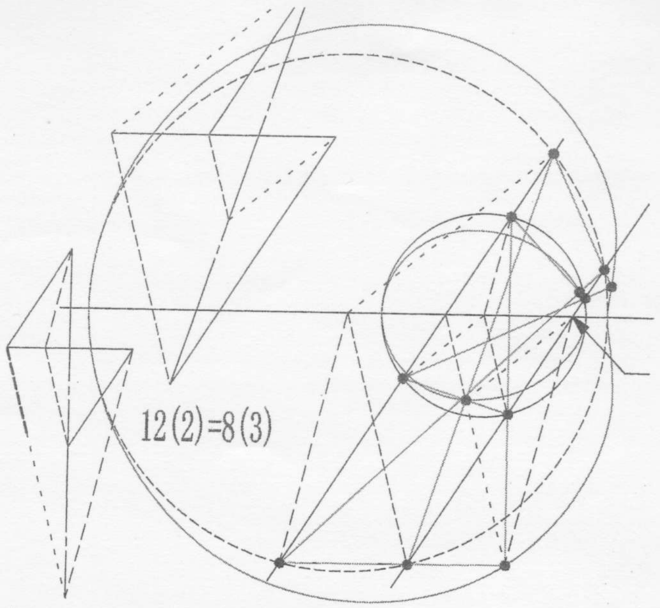
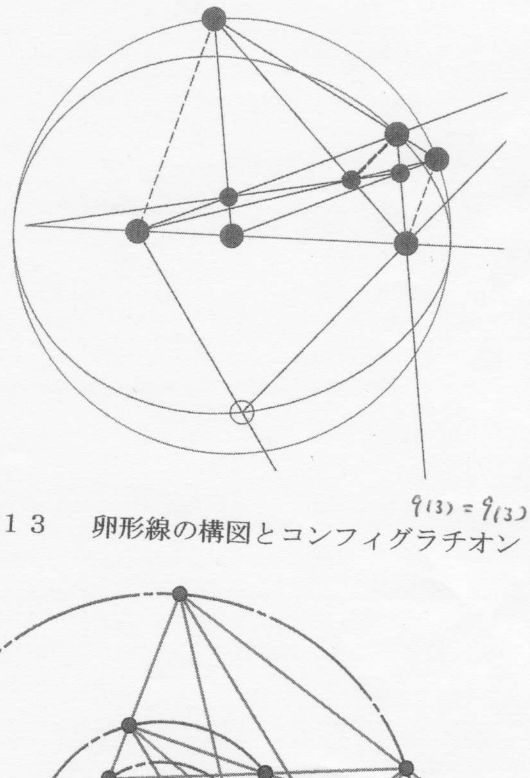


図 12　補助円上の８点と卵形線上の４点

４．卵形線の構図の中のコンフィギュラチオン

今回のテーマである図を２，３示す。
図１１，図１２、図１３に、卵形線と黒丸のコンフィギュラチオンの点の示す。図１４は、卵形線の構図の中の等距離円上の点を考えた。この作図法は、拙論［４］を参照されたい。



9(3) = 9(3)

図１３　　卵形線の構図とコンフィグラチオン ~~9(3)=9(3)~~

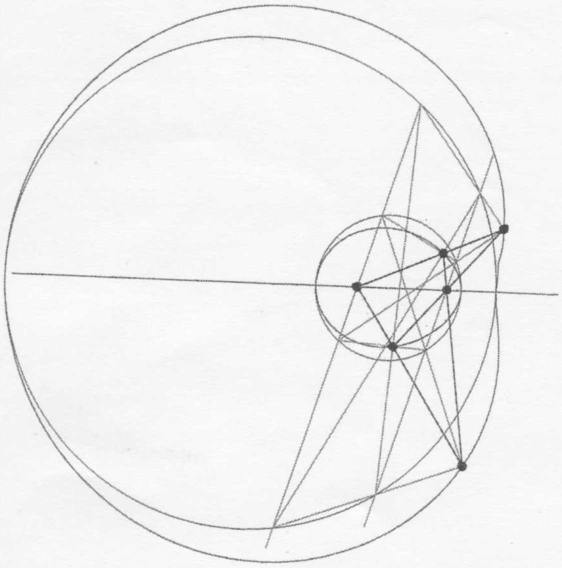


図 11　２焦点と卵形線上の４点　　6(2)=4(3)

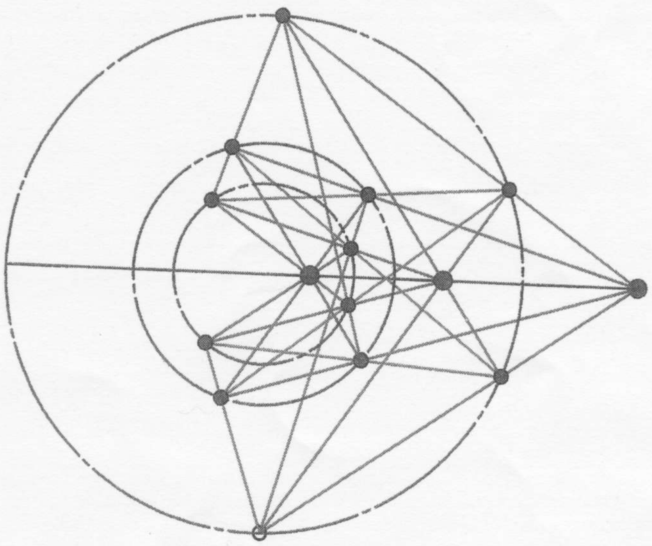


図１４　卵形線の等距離円上の点が構成する
コンフィギュラチオン　15(4) = 20(3)

図１５において、その構成順序を、仮定、帰結で示す構図の①、F、②は焦点、③、④、⑤、⑥が卵形線上の点である。この証明は、紙面の関係上、口頭報告のみにする

『仮定１』

１．１直線上に３点①、F、②、および直線外の点③をとる。

１．△ ①F③の外接円を円 a とする。

１．△ ②F③の外接円を円 b とする。

１．直線②③と円 a との交点を④とする。

１．直線①③と円 b との交点を⑤とする。

１．直線①④と直線②⑤との交点を⑥とする。

【帰結１】

４点③、④、⑥、⑤は、同一円周 c 上にある。

【帰結２】

４点⑥、④，F、②は、同一円周 d 上にある。

４点⑥、⑤、F、①は、同一円周 e 上にある。

『仮定２』

１．線分③④ の垂直二等分線と円 a との交点を⑦、⑧とする。

（明らかな帰結） 線分⑦⑧は、円 a の直径

∠⑦④⑧＝∠R

∠⑦③⑧＝∠R

線分⑦④＝線分⑦③

∠⑦④③＝∠⑦③④

『仮定３』

１．直線⑧④ と円 d との交点を⑨とする。

１．直線④⑦ と円 d との交点を⑩とする。

（明らかな帰結） 線分⑨⑩は、円 d の直径

∠⑨④⑩＝∠R

∠⑨⑥⑩＝∠R

【帰結３】

直線⑨⑩は、線分④⑥の垂直二等分線である。

『仮定４』

１．直線⑧③ と円 b との交点を⑪とする。

１．直線⑦③ と円 b との交点を⑫とする。

１．直線⑥⑨と直線⑤⑪との交点を⑬とする。

（明らかな帰結） 線分⑪⑫は円 b の直径

【帰結４】点⑬は、円 e 上にある。

『仮定５』１．点⑫と点②を結ぶ

１．点②と点⑩を結ぶ

【帰結５】

点⑫、②、⑩は、同一直線上にある。

『仮定６』

１．直線⑫⑤と直線⑥⑩との交点を⑭とする。

【帰結６】点⑭は、円 e 上にある。

【帰結７】

直線⑪⑫は、線分③⑤の垂直二等分線である。

【帰結８】

直線⑬⑭は、線分⑤⑥の垂直二等分線である。

『仮定７』１．点①と点⑬を結ぶ

１．点①と点⑧を結ぶ

【帰結９】

点⑧、①、⑬は、同一直線上にある。

【帰結１０】

３点②、⑪、⑨は、同一直線上にある。

【帰結１１】

３点①、⑦、⑭は、同一直線上にある。

『仮定８』

１．線分⑨⑩と線分⑬⑭との交点を⑮とする。

【帰結１２】

５点⑭、⑮、⑦、⑫、⑩は、同一円周 f 上にある。

【帰結１３】

３点⑧、⑦、⑮は、同一直線上にある。

【帰結１４】

５点⑮、⑨、⑬、⑧、⑪は、同一円周 g 上にある。

『仮定９』１．点⑪と点⑮とを結ぶ。

【帰結１５】
３点⑫、⑪、⑮は、同一直線上にある。
以上より
【帰結１６】
点①から点⑮において、それらを結ぶ線分は、図のように４本ずつあり、逆に２０本の線分の上に３点ずつ点がある。

故に 点①から点⑮ とその点を通る２０本の線分は、１５（４）＝，２０（３）のコンフィギュラチオンをなす。
付【帰結１７】
点⑮を通る点線分は、円ｆ、ｇの直径である。

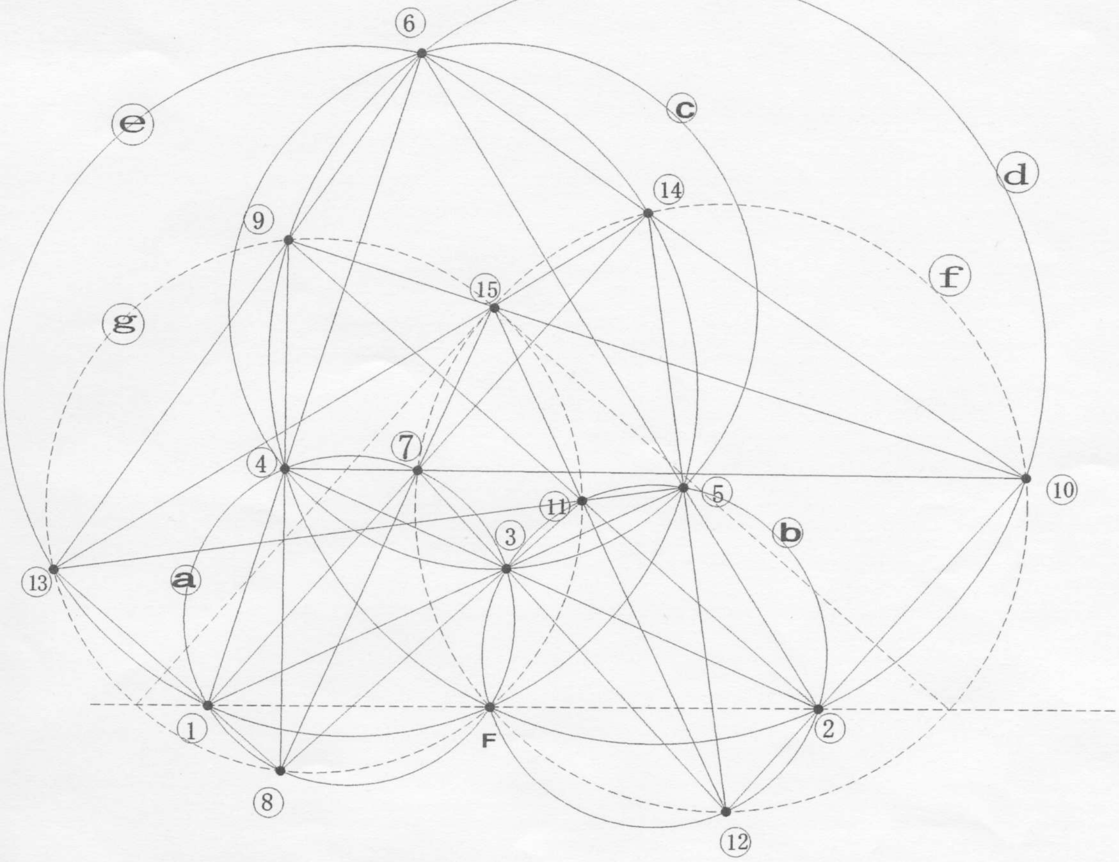


図１５　卵形線の構図とコンフィギュラチオン

５．結び

卵形線の構図の中のコンフィギュラチオンを示してきた．ところで、卵形線が、楕円を拡張したものであり、楕円のパスカルの定理に相当する、卵形線のパスカルの定理のようなものを、見つけることが、これからの課題である。なお、図学的には、ここで示した図は、作図順序持った構図であり、幾何学の図であるため、数値でない正確な作図を書く練習に、この報告が、役立てば幸いである。

参考文献

［１］蛭子井博孝；”デカルトの卵形線の２，３の性質”、日本図学会誌、図学研究、12 号、1973 年
［２］EBISUI、Ｈ；”An Extension To Fourth Order Surface by the Oval with ３ Inversion　Points”, Proc, 8th ICGG, Austin、1998、
［３］ヒルベルト、コーン・フォッセン；”直観幾何学”、みすず書房、1970.
［４］蛭子井博孝；”デカルトの卵形線の曲率円” 日本図学会誌、図学研究、19 号、1976 年