Dovalの法接交点
（コンフィギュラチオン（15_4，20_3）のある作図法）

蛭子井博孝
卵形線研究センター

このノートでは、コンフィギュラチオン[1]（15_4，20_3）を構成する１５点と２０本の線分、および、補助となる１点、１直線、２線分、７つの円からなる図形について語る。　それは、図形（15_4，20_3）の作図手順と、それに伴う初等幾何学の帰結である。

その図形は、図１の中の１直線上の３点①、Ｆ、②、および直線外の点③より、以下のように定まるものである。このノートでは、仮定、帰結、仮定、帰結　帰結の証明と述べてゆく。その仮定の順序が、作図手順である。

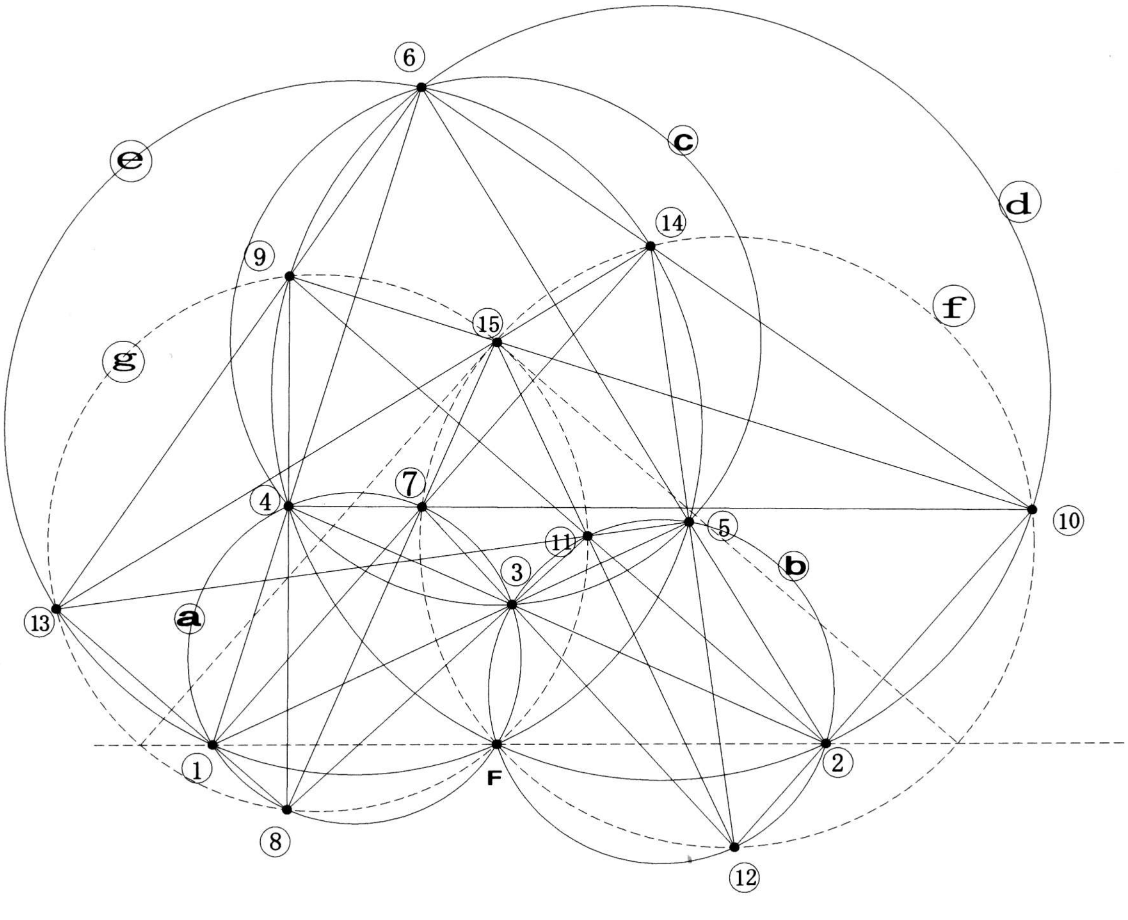

図 A

図Ａにおいて、

『仮定１』

１．１直線上に３点①、Ｆ、②、および直線外の点③をとる。

１．△ ①Ｆ③の外接円を円ａとする。

１．△ ②Ｆ③の外接円を円ｂとする。

１．直線②③と円ａとの交点を④とする。
１．直線①③と円ｂとの交点を⑤とする。
１．直線①④と直線②⑤との交点を⑥とする。

【帰結１】
４点③、④、⑥、⑤は、同一円周ｃ上にある。　【帰結２】
４点⑥、④，Ｆ、②は、同一円周ｄ上にある。
４点⑥、⑤、Ｆ、①は、同一円周ｅ上にある。

【帰結1の証明】図 1において、円に内接する 4 角形の性質より　α 1 ＝α 2 ＝α 3
故にα 1 ＝α 3
故に 4 角形③④⑥⑤の内対角の和が
180 度で【結論】4 点③、④、⑥、⑤は、同一円周ｃ上にある。

【帰結 2 の証明】図 2 において、円に内接する 4 角形と円周角の定理より赤字β 1 ＝β 2 ＝β 3
故にβ 1 ＝β 3
故に 4 角形⑥④Ｆ②の内対角の和は 180 度、故に 4 点⑥、④，Ｆ、②は、同一円周ｄ上にある。
同様に赤字β 1 ＝青字β 3 より
【結論】 4 点⑥、⑤、Ｆ、①は、同一円周ｅ上にある。

『仮定２』
１．線分③④ の垂直二等分線と円ａとの交点を⑦、⑧とする。

（明らかな帰結）線分⑦⑧は、円ａの直径
∠⑦④⑧＝∠Ｒ
∠⑦③⑧＝∠Ｒ
線分⑦④＝線分⑦③
∠⑦④③＝∠⑦③④

『仮定３』
１．直線⑧④ と円ｄとの交点を⑨とする。
１．直線④⑦ と円ｄとの交点を⑩とする。

（明らかな帰結）線分⑨⑩は、円ｄの直径
∠⑨④⑩＝∠Ｒ
∠⑨⑥⑩＝∠Ｒ

【帰結３】
直線⑨⑩は、線分④⑥の垂直二等分線である。

【帰結 3 の証明】図 3 において、円周角の定理よりα 1 ＝α 2、また円に内接する 4 角形の定理より
β 1 ＝β 2 ゆえにδ 3 ＝α 1+β 1 ＝α 2+β 2 ＝δ 4　円に内接する 4 角形よりδ 4 ＝δ 2　円周角の定理よりδ 2 ＝δ 1 また、∠⑨⑥⑩＝∠Ｒ
故にγ 1 ＝γ 2 ＝γ 3　故に 3 角形⑨⑥④は二等辺 3 角形また、δ 1 ＋γ 2 ＝∠ Ｒ
故に∠⑨Ｇ⑥は、∠ R。
ゆえに【結論】直線⑨⑩は、線分④⑥の垂直二等分線である。

『仮定４』
１．直線⑧③ と円ｂとの交点を⑪とする。
１．直線⑦③ と円ｂとの交点を⑫とする。

１．直線⑥⑨と直線⑤⑪との交点を⑬とする。

（明らかな帰結）線分⑪⑫は円ｂの直径
【帰結４】点⑬は、円ｅ上にある。

【帰結 4 の証明】図 4 において、仮定 2 よ

りε 2が等しい。また円に内接する4角形よりε 1＝ε 2
さらに、ε 3＝ε 4対頂角よりε 2＝ε 3
また、2α 2＝180度－2ε 2
2α 1＝180度－ε 1－ε 2
ゆえに　2α 2＝2α 1
円周角の定理より2α 3＝2α 2
ゆえに2α 1＝2α 2
円周角の逆定理より
ゆえに【結論】4点⑥⑬①⑤は同一円周e上にある

『仮定5』1．点⑫と点②を結ぶ
1．点②と点⑩を結ぶ

【帰結5】
点⑫、②、⑩は、同一直線上にある。

【帰結5の証明】図5において、対頂角、内接する4角形、円周角の定理よりδ 1＝δ 2＝δ 3＝δ 4
またδ 1+ε ＝180度
ゆえにδ 4+ε ＝180度
ゆえに【結論】点⑫、②、⑩は、同一直線上にある

『仮定6』
1．直線⑫⑤と直線⑥⑩との交点を⑭とする。

【帰結6】点⑭は、円e上にある。

【帰結6の証明】
図6においてβは、仮定、円周角、対頂角、円に内接する四角形の性質より、皆等しい。同様に、γも皆等しい。
故に∠⑫⑭⑩＝2∠R－2β
∠⑥⑬⑤＝2∠R－2β
ゆえに、4点⑬⑤⑭⑥は、同一円周上
ゆえに【結論】点⑭は、円e上にある

【帰結7】
直線⑪⑫は、線分③⑤の垂直二等分線である。

【帰結7の証明】図7において
円周角の定理と仮定2と対頂角よりαは皆等しい。対頂角、円周角、円に内接する4角形の性質よりβは、皆等しい。$\alpha+\beta=\gamma$とすれば、
内接する四角形の定理よりγ＝∠⑤③⑫＝∠⑤③⑫、故に3角形⑫⑤③は2等辺三角形。
また、仮定2の明らかな帰結より∠⑪③⑫は、∠R　故にδ 1＝∠R－γ＝δ 2
故に$\alpha+\beta+\delta$＝∠R
故に③⑤と⑪⑫は直交する。
2等辺三角形と直交することより
【結論】直線⑪⑫は、線分③⑤の垂直二等分線である。

【帰結8】
直線⑬⑭は、線分⑤⑥の垂直二等分線である。

【帰結8の証明】図8において
仮定2の帰結、円周角、円に内接する四角形、対頂角の性質よりγは皆等しい
仮定4の明らかな帰結より∠⑧③⑫＝∠⑭⑤⑬＝∠R
ゆえに、∠R－γでαは、等しい。
三角形⑥⑬⑤は、底角が等しく2等辺
また、$\gamma+\alpha$=∠Rで、⑬⑭と⑥⑤直交
ゆえに【結論】直線⑬⑭は、線分⑤⑥の垂直二等分線である。

『仮定7』1．点①と点⑬を結ぶ
1．点①と点⑧を結ぶ

【帰結９】
点⑧、①、⑬は、同一直線上にある。

【帰結９の証明】図９において
$\varepsilon 1 = \varepsilon 2 = \varepsilon 3 = \varepsilon 4$は、対頂角、円周角の定理、円に内接する４角形の内対角の和が 180 度、より、皆等しい。また、$\varepsilon 1 + \delta = 180$ 度　ゆえに$\varepsilon 4 + \delta = 180$度
【結論】点⑧、①、⑬は、同一直線上にある。

【帰結１０】
３点②、⑪、⑨は、同一直線上にある。
【帰結 10 の証明】図 10 において
帰結 3 より辺⑨⑥と⑨④は等しい。故にそれらの円周角も等しく、ゆえに線分②⑨は、∠⑥②④の 2 等分線、同様に帰結 7 より線分②⑪は、∠⑥②④の 2 等分線、故に、【結論】②⑪⑨は、同一直線上にある

【帰結１１】
３点①、⑦、⑭は、同一直線上にある。
【帰結 11 の証明】図 11 において
仮定２と帰結 8 より、線分①⑦、および、1⑭がともに∠⑥①⑤ 2 等分線、
故に【結論】３点①、⑦、⑭は、同一直線上にある。

『仮定８』
１．線分⑨⑩と線分⑬⑭との交点を⑮とする。

【帰結１２】
５点⑭、⑮、⑦、⑫、⑩は、同一円周 f 上にある。
【帰結 12 の証明】図 12 において
4 点⑥、⑭、⑤、①は、帰結 4 と帰結 6 より同一円周上にある。また、帰結 11 より、①⑦⑭は、同一直線上、故に、$\varepsilon 1 = \varepsilon 2$
また、4 点⑤③⑫②は、円 b 上にある
故に$\varepsilon 2 = \varepsilon 3$、故に、$\varepsilon 1 = \varepsilon 2$で、
【結論１】4 点⑭⑦⑫⑩は同一円周上 f にある。
図 13 において、円周角の定理よりαは皆等しい。
故に、【結論２】4 点⑭⑮⑦⑩は、同一円周上にある。【結論 1】,【結論２】より
【結論】５点⑭、⑮、⑦、⑫、⑩は、同一円周 f 上にある。

【帰結１３】
３点⑧、⑦、⑮は、同一直線上にある。
【帰結 13 の証明】図 14 において
【帰結 12】より$\delta 1 = \delta 2$
また、円周角と対頂角より$\delta 2 = \delta 3 = \delta 4 = \delta 5$　故に$\delta 1 = \delta 5$
また、①⑦⑭は、【帰結 11】より直線
ゆえに、【結論】３点⑧、⑦、⑮は、同一直線上にある。

【帰結１４】
５点⑮、⑨、⑬、⑧、⑪は、同一円周 g 上にある。
【帰結 14 の証明】図１５において、
円周角の定理より$\alpha 1 = \alpha 2 = \alpha 3 = \alpha 4$
故に、$\alpha 2 = \alpha 4$
また、【帰結 6】より$\alpha 1 = \alpha 5$、故に
$\alpha 2 = \alpha 5 = \alpha 4$
故に【結論】５点⑮、⑨、⑬、⑧、⑪は、同一円周 g 上にある。

『仮定９』１．点⑪と点⑮とを結ぶ。

【帰結１５】３点⑫、⑪、⑮は、同一直線上にある。
【帰結１５の証明】図 16 において
円周角の定理より

α 1＝α 2
対頂角よりα 2＝α 3、さらに円周角より
α 3＝α 4＝α 5＝α 6
故にα 1＝α 6　これと【帰結１０】より
【結論】３点⑫、⑪、⑮は、同一直線上にある。

以上より
【帰結１６】
点①から点⑮において、それらを結ぶ線分は、図のように４本ずつあり、逆に２０本の線分の上に３点ずつ点がある。
故に 点①から点⑮ とその点を通る２０本の線分は、（１５$_4$，２０$_3$）のコンフィギュラチオンをなす。
付【帰結１７】
点⑮と、円ｇと破線①②の交点を結ぶ線分は、円ｇの直径である。
点⑮と、円ｆと破線①②の交点を結ぶ線分は、円ｆの直径である。

【帰結 17 の証明】
図 17 において、円周角と、円に内接する 4 角形よりαは、皆等しい。ゆえに、同位角が等しく、【結論１】⑮を通る破線と直線①⑭は平行　同様に、βは皆等しい。⑦⑧　直径　ゆえに　$\alpha+\beta=\angle$ R、ゆえに、【結論２】線分⑨②と線分①⑭は、直交する。
結論１，２より【結論３】⑮を通る破線は、線分⑨⑪に垂直、
また、三角形⑦④③は仮定より 2 等辺三角形、帰結 13 より⑧⑦⑮は直線
故に、三角形⑮⑨⑪も、2 等辺三角形
これと、【結論 3】より、⑮を通る破線は円 g の直径、
円 f についても同様

参考文献

[1]ヒルベルト、コーン・フォッセン；”直観幾何学”、みすず書房、1970.

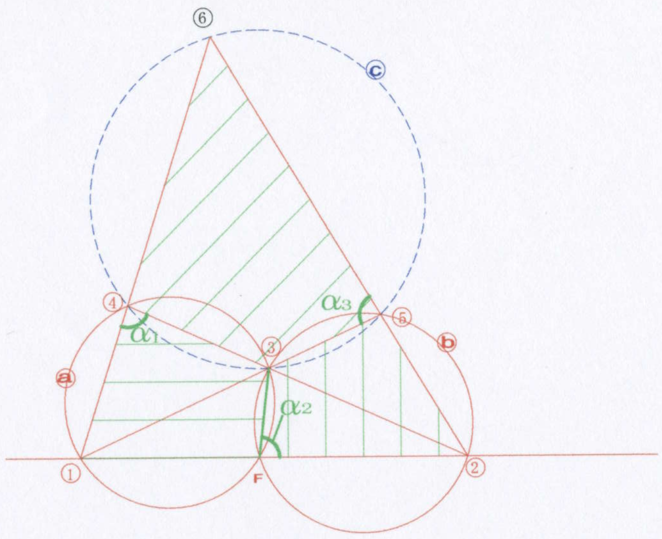

図1

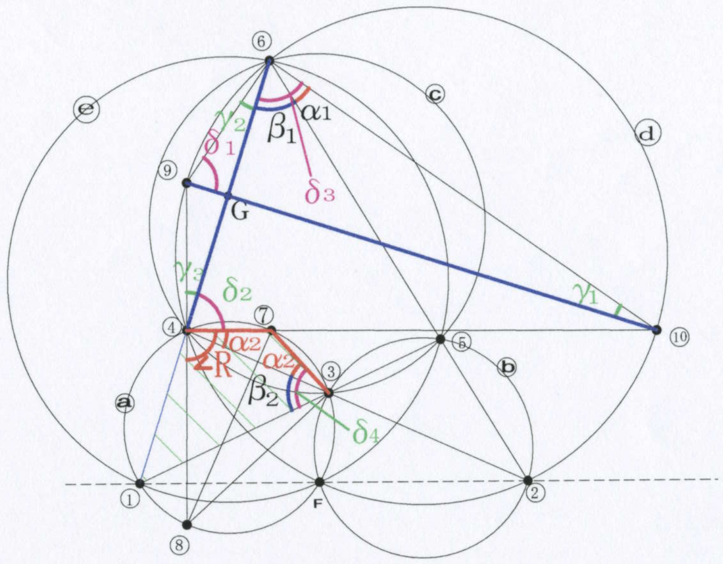

図 3

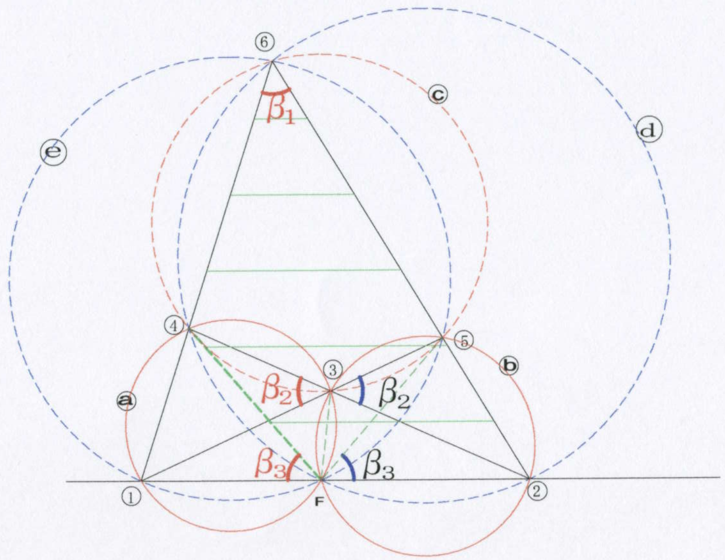

図 2

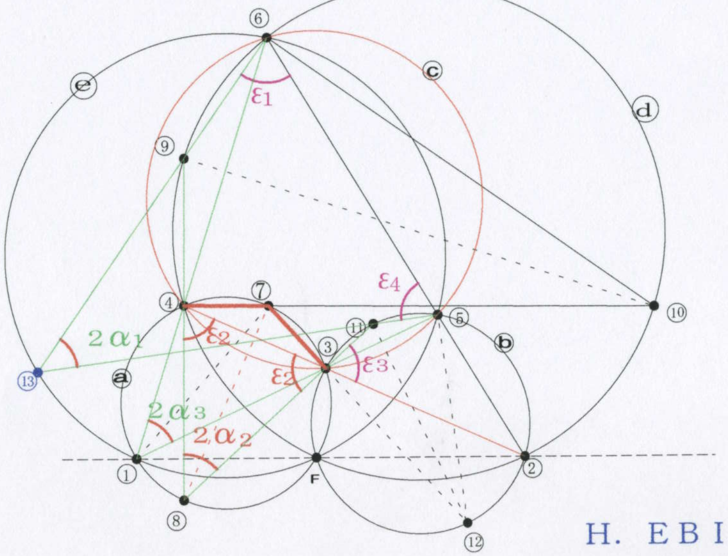

図 4

H. EBIS

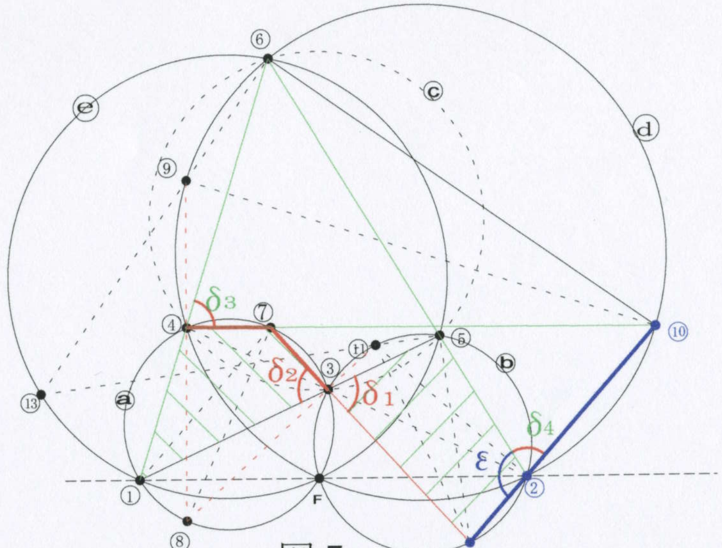

図５

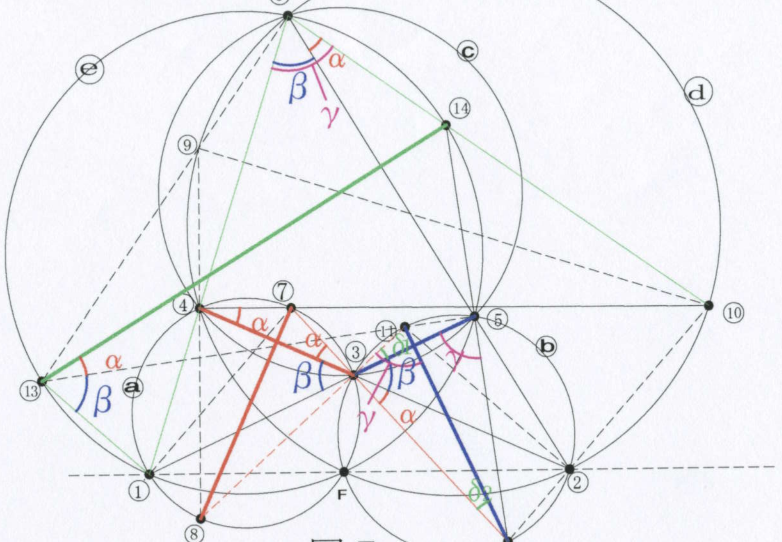

図７

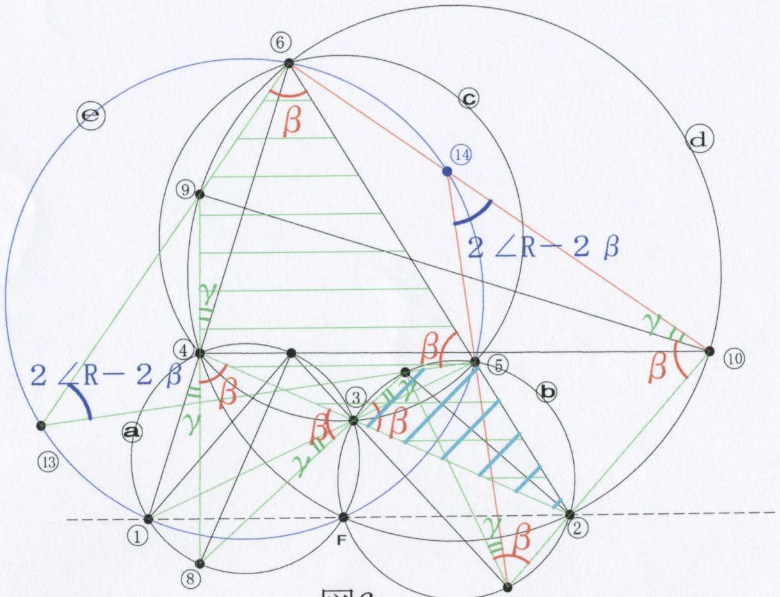

図6

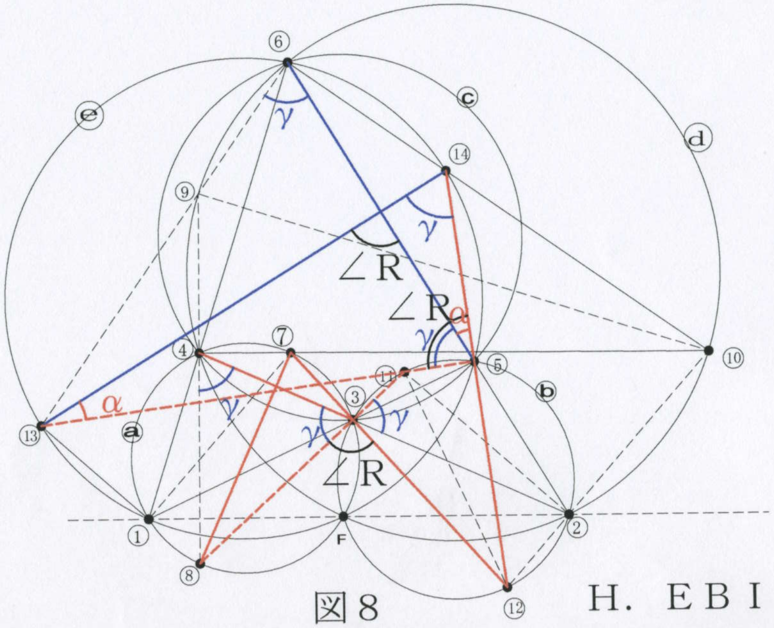

図８

H. ＥＢＩ

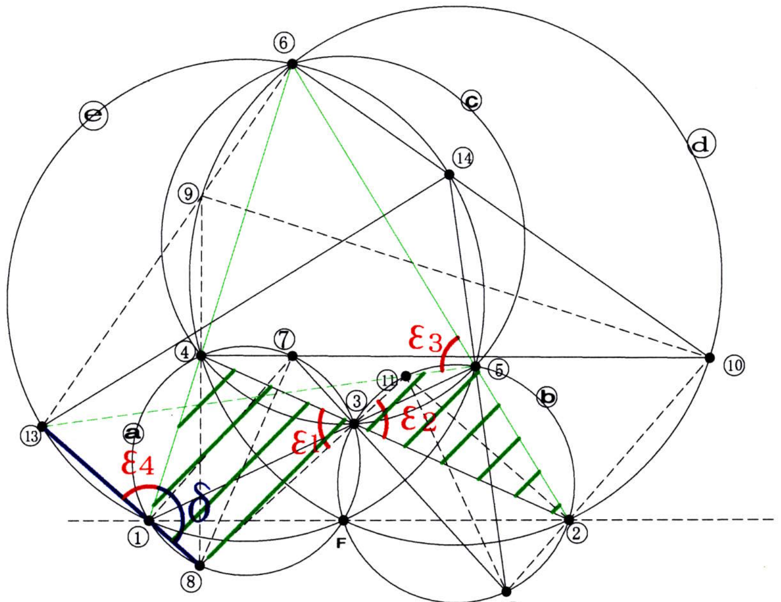

図9

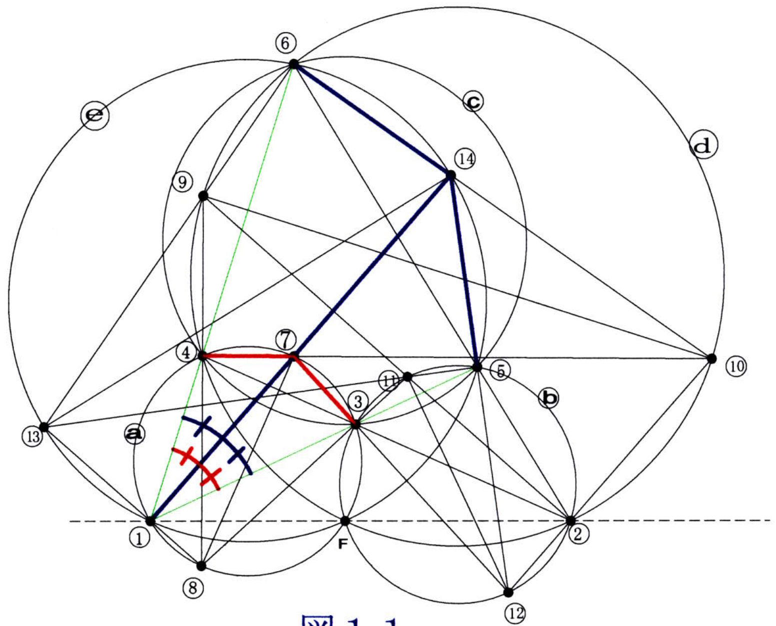
図１１

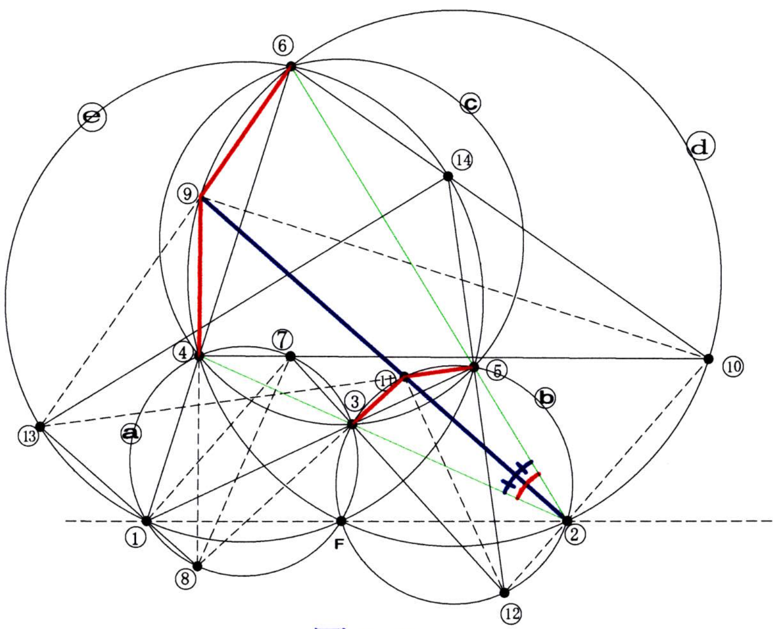
図１０

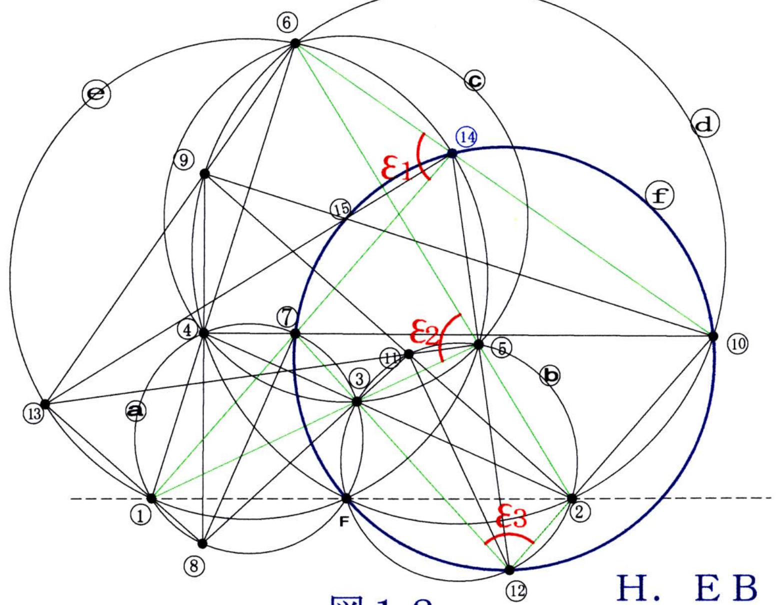

図１２

H．ＥB

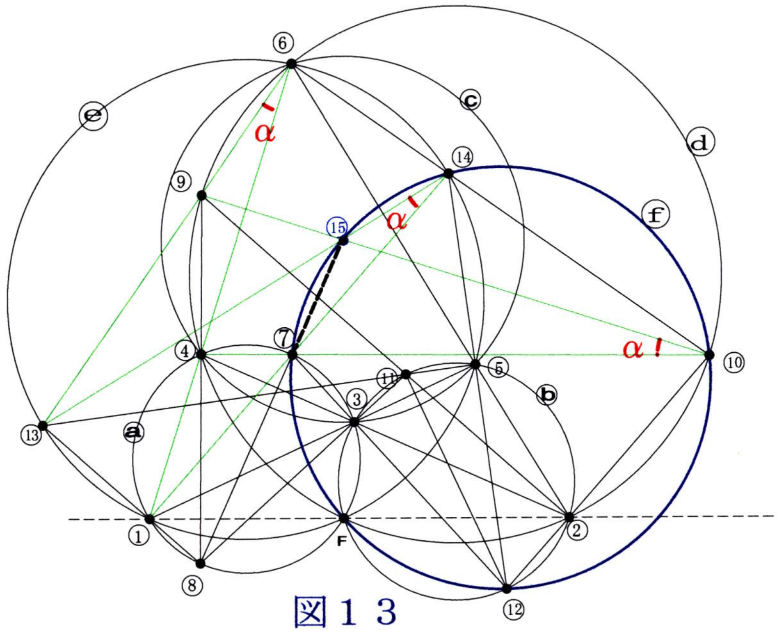

図１３

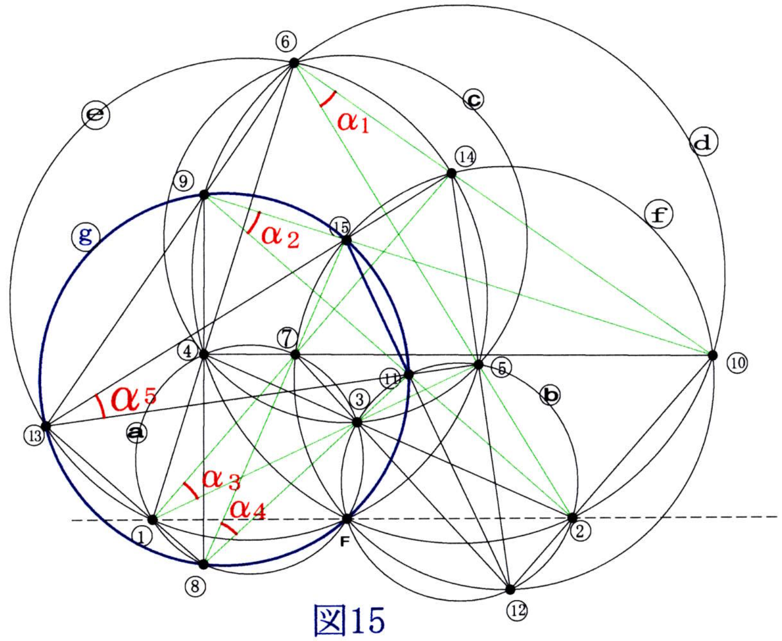

図15

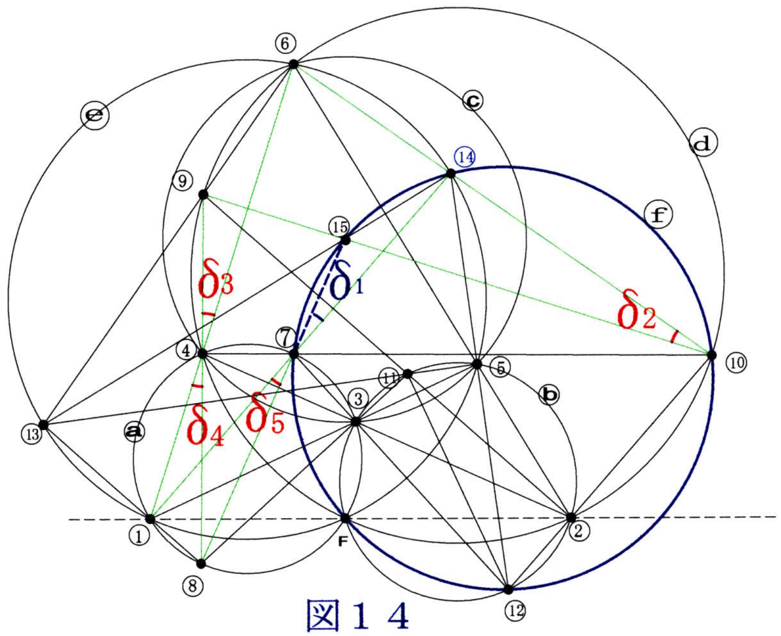

図１４

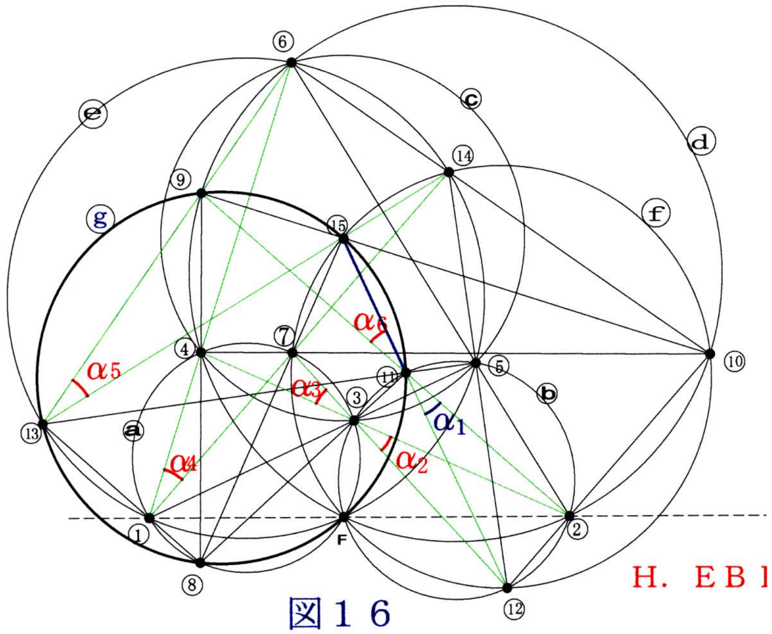

図１６

H.　ＥＢ l

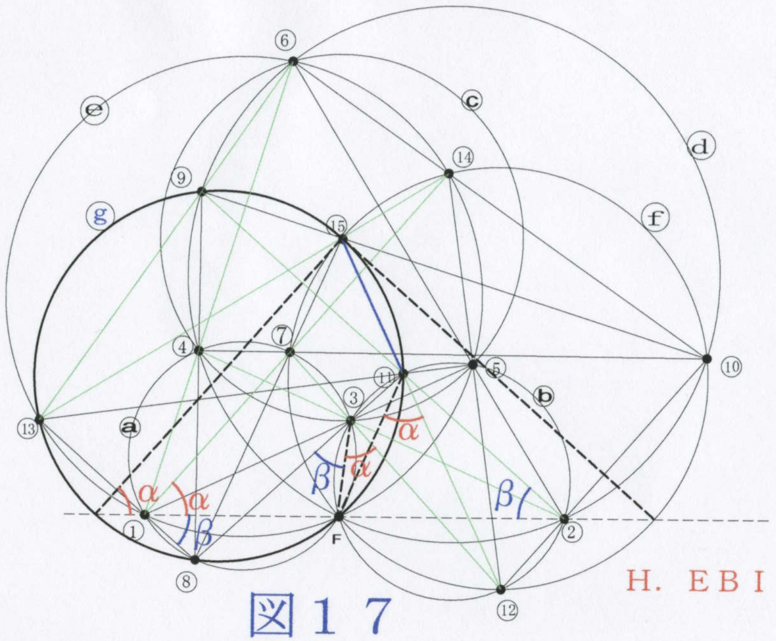

図１７

H. EBISUI