●研究資料

直極点による卵形線の拡張としての多極多重曲線

Multiple, Multi–polar Curve extended from the Oval using the infinity chain of orthopole

蛭子井 博孝 *Hirotaka Ebisui*

要旨

楕円を拡張した卵形線には，焦点が3つあり，さらに，4つ以上焦点を持つ曲線を探していた．それは，直極点を用いた卵形線の定義と直極点の一般化（無限連鎖化）の方法を組み合わせることにより卵形線の定義を拡張したものとしてあらわせることがわかった．そうして，卵形線の焦点の多数化（多極化）ができた．そこで，この小論では，直極点の一般化（拡張）を述べ，次に，以前報告した，直極点による卵形線の定義を述べ，さらに，一般化された直極点による卵形線の拡張を考える．そして，その考えの基に，拡張された卵形線（多極曲線（愛称 chocoid））の図をコンピュータで描いた．この多極曲線は，4直線に関する直極点を用いるとき，その極は，直線上に6点あり，そのうち5点の座標で形が決まる．さらに，数例の数値例を描くと，自己交差した多重閉曲線であることがわかった．5直線に関する直極点を用いる場合も，MapleV と言う数式処理，関数グラフィックソフトで，媒介変数表示を求め，CG 化した．その性質は，まだ未知なるものが多いが，一応の形を報告する．

キーワード：平面幾何／焦点／極／直極点／無限連鎖化／多極曲線／多重曲線

Abstract

In this paper, an extension of the Oval is shown using generalized Orthopole. This extended curve has a structure on the definition. And according to the structure, we may say that the curve has Multiplicity and Multi–foci. First, We will show the definition of the Oval using Orthopole and its three foci, and next, we will show the infinity chain of Orthopole, and more show Multi–polar structure and the definition of Multiple Multi–polar Curve . At last, we show their CGs which are ploted by Maple V.

Keywords: Oval / Orthopole / Multi–polar / Focus point / Multiple Curve

1．はじめに

曲線を拡張一般化する方法は，数多く知られている．その中で，多極曲線は，J.C.Maxwell が，若干14歳で1846年にその書き方を見つけている[1]．しかし，それは，たとえば3極からの距離を r_1，r_2，r_3として，$5r_1+3r_2+2r_3=15$などで表したもので，ひもを用いた描き方は示しているが，その媒介変数表示を導くのは難しい．ところで，デカルトの卵形線は，楕円の拡張であり，一直線上に3焦点を持っている[2],[3]．この3焦点と直極点を定義する三角形の3頂点は，図形的に結びついている．また，直極点は，完全4辺形についても拡張でき，それにより，4焦点以上に多極化した曲線が定義できる．そして，下記の順に，定義より解析幾何で媒介変数表示式を求め，CG を描いた．なお，これは，第33回 JSGS 大会の発表に基づいている．

1．卵形線には，3焦点あること

1．直極点の定義の拡張（無限連鎖化）[4]

1．直極点を用いた卵形線の定義[5]

1．直極点の一般化による卵形線の定義の拡張

1．CG によるその表現

2．卵形線と3焦点

古くは，卵形線について，ケプラーなどが，惑星の軌道を卵形と考えていたことがある．この卵形の曲線や，カシニの卵形線，その他多くの卵形線がその式とともに知られている[6]．また，微分幾何学では，凸図形として卵形線を定義したりする．この中で，デカルトの卵形線は，”点と円からの距離の比が一定な曲線である”と定義できることを以前見つけ[3]，それが，楕円の拡張であることを示してきた．このとき，楕円には，焦点が2つあり，またその拡張である卵形線には，焦点が3つあることも知られている．その卵形線を式で定義するとき，双極座標による方法がある．このとき，同じ卵形線が，異なる3つの式で表せることを以前報告した．つまり，一直線上に，3つの固定点（焦点）F_1，F_2，F_3があり，

そこから卵形線上までの距離 r_1, r_2, r_3が，次の関係式を満たす．それは，以前報告した式[3]を少し変形した，次の３つである．

$mr_1 \pm nr_2 = kc$

$-kr_2 + mr_3 = \pm n\ (k^2 - m^2)\ c / \ (m^2 - n^2)$

$\pm nr_3 + kr_1 = m\ (k^2 - n^2)\ c / \ (m^2 - n^2)$

複号の＋は，内分枝，－は，外分枝を表す．

焦点間距離　F_1F_2の長さが c であり，F_2F_3の長さが $(k^2 - m^2)\ c / \ (m^2 - n^2)$ であり，F_1F_3の長さが $(k^2 - n^2)\ c / \ (m^2 - n^2)$ である．

また，任意定数 k，m，n は，k>m>n＞0を満たす定数である．

たとえば，k＝10, m＝9, n＝6, c＝10の時，３つの式は，次の数値式となる．

$9\ r_1 \pm 6\ r_2 = 10 \cdot 10$

$-10\ r_2 + 9\ r_3 = \pm 6 \cdot (38/9)$

$\pm 6\ r_3 + 10\ r_1 = 9 \cdot (128/9)$

さて，この３つの式が示すように卵形線は，３極のうちどの二つの極からの距離によっても表されると言える．

故に，３極（３焦点）は，同等の役割を演じている．さて，３点 F_1, F_2, F_3から，r_1, r_2, r_3の距離にある上式（＋のみ）を満たす点は，その距離の値を少しずつ変えると，図１のような３つの同心円群とその交点を通る卵形線を描く．

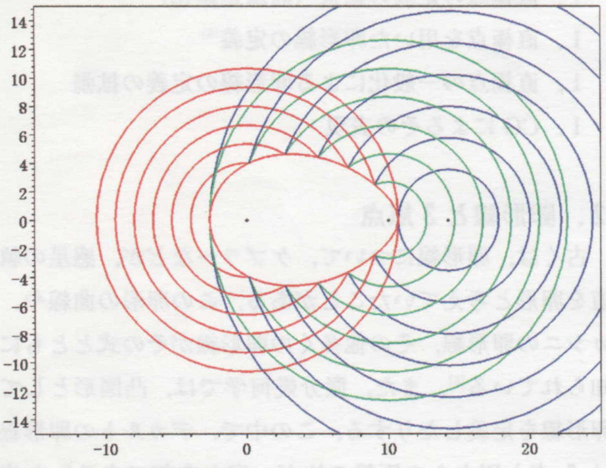


図１　３つの同心円群による卵形線

このとき，円の間隔の比は，6 ： 9 ：10である．

これは，ちょうど3点 F_1, F_2, F_3から，6秒，9秒，10秒間隔で，それぞれ水滴が水面に落ち，水の輪が重なって出来る図形といえる．このどの２つだけからでも卵形線は描け，同等な３つの焦点があることが解る．さらに，３焦点あることの意味は，３つの軸の平行な円錐面の相貫曲線を考えると明らかになる[3]．

３．拡張の準備：直極点の無限連鎖化

ここでは，卵形線の拡張の手段となる直極点の無限連鎖化を考える．直極点とは，三角形と１つの直線の間に成立する簡単な定理であり，以下のように表される．そして，その拡張が，以下のように定義できる．なお，この定理の証明は，文献［７］を参照されたい．

【直極点の定理】

一本の定直線ｇと一般の位置の３本の直線を与えたとき，次のように，直極点が定まる．すなわち，３本の直線の２本の交点からできる三角形 ABC の頂点から，定直線ｇへ垂線を下し，その３つの垂線の足から，２本を選んだ残りの直線へ垂線をそれぞれ下すと，３本の直線ができるが，これらは，１点で交わる．図２のように，この点を△ABC に関する（または，３直線に関する）直線ｇの直極点という．

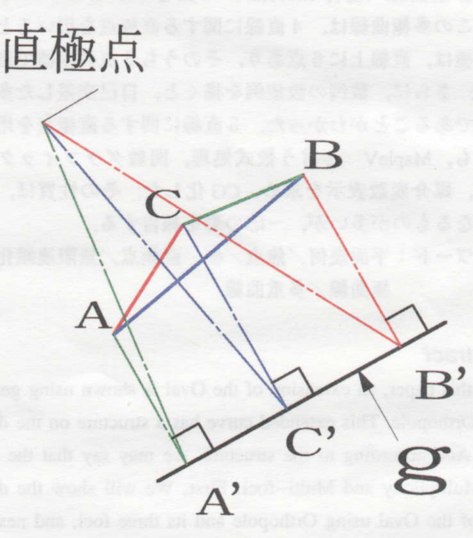


図２　　直極点

【直極点の定理の無限連鎖化】

さて，一般の位置にある直線を１本増やし４本にする．すると，４本から３本を任意に選ぶ毎に，その三角形に関する直線ｇの直極点が，定まる．これらは，４点あり，同一直線上にある．さらに，この４点より，それぞれ直線ｇに垂線を下し，その足より，３本を選んだ残りの１本にそれぞれ垂線を下す．すると，このときできた４本の垂線は，１点で交わる．この点を４直線のつくる完全四辺形に関する直線ｇの直極点という．さらに，５本，６本，７本，．．．，ｎ本，と直線を増やし，一般に，ｎ直線のつくる完全ｎ辺形に関する直線ｇの直極点を定義できる．これを直極点の無限連鎖化という．

図3，図4は，それぞれ，4直線，5直線に関する直線gの直極点である．このとき，連鎖4，連鎖5の直極点という．図中，丸の数字は，連鎖3，4，5を意味する．

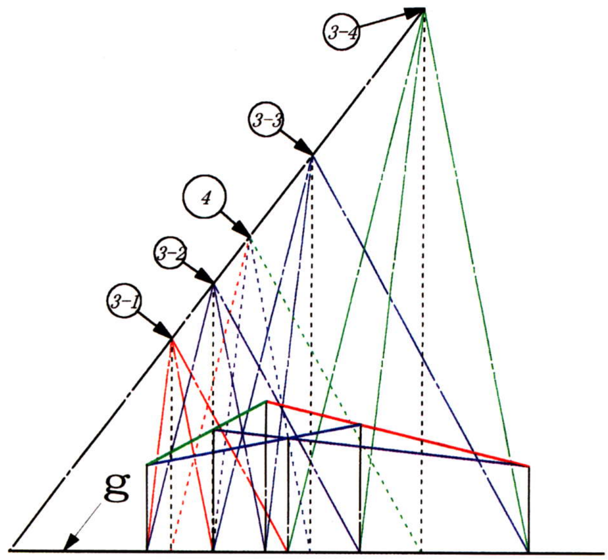


図3　連鎖4の直極点

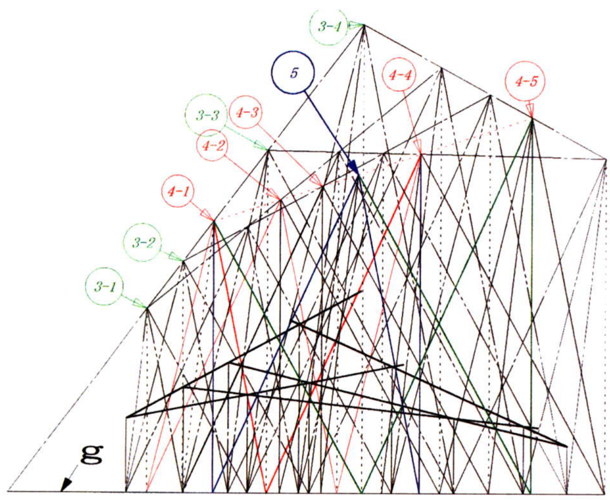


図4　連鎖5の直極点

4．直極点による卵形線の定義

直極点を用いた卵形線の定義または作図法とその証明は，以前，拙論[5]で報告したので，ここでは，その作図法のみ，もう一度述べ，さらに若干の事柄を補足する．

【作図法／定義】

今，図5において，直線g上に，異なる4点を取り，それを順に，左から，O，F_1，F_2，F_3とすると，これらから，卵形線の内分枝外分枝を，次のようにして作図できることが，わかっている．今，F_1，F_2，F_3を通り，直線gに垂直な直線h_1，h_2，h_3を引く．次に，直線g上に，動点Tをとり，OTが直径となる円を描く．ただし，OT>=OF_3である．そして，この円と，直線h_1，h_2，h_3との交点をそれぞれU_1，U_2，U_3とする．すると，△$U_1U_2U_3$に関する直線gの直極点は，卵形線上にあり，動点Tが，F_3の右側を動くとき，直極点は卵形線を描く．

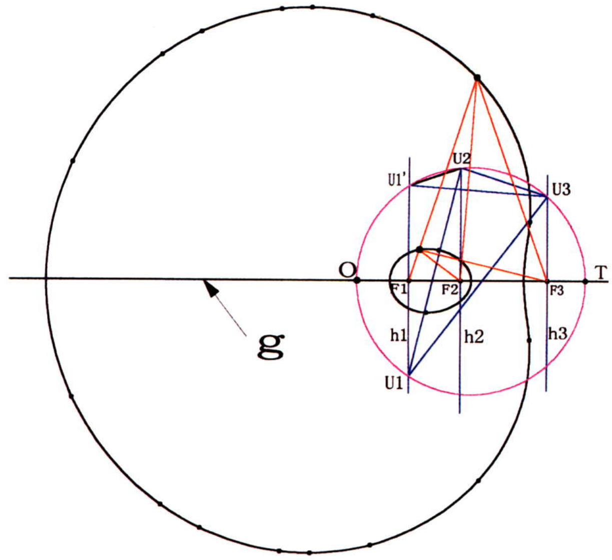


図5　直極点を用いた卵形線の定義

このとき，Oを卵形線の等距離円[8]の中心，F_1を第一焦点，F_2を第二焦点，F_3を第三焦点とする卵形線の内外分枝を描く．

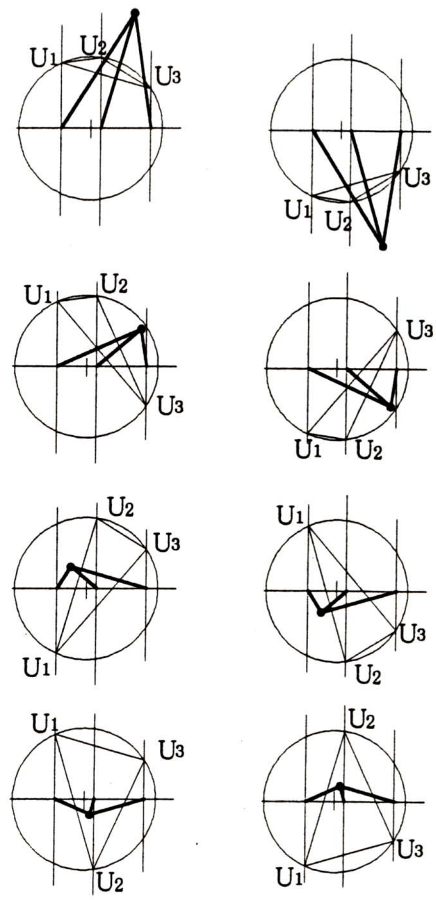


図6　8つの直極点

さて，ここで，$\triangle U_1U_2U_3$は，円と直線の交点から，図6のように8個できるが，それに関する直極点も，8個できるが，すべて1つの卵形線上にある．逆に言えば，図7のように卵形線の内分枝外分枝が，色を変えた8個の部分に分解されることを意味する．

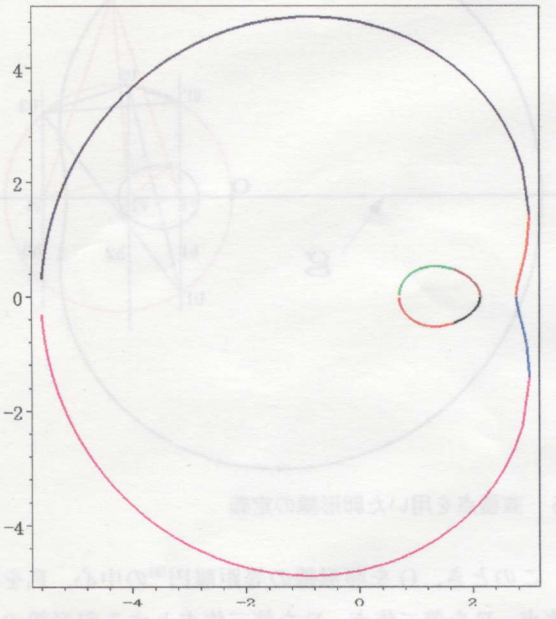


図7　8つの部分からなる卵形線

5．拡張した直極点による卵形線の拡張

ここでは，卵形線の拡張を考える．それには，2節の直極点の無限連鎖のうち，連鎖4, 連鎖5を用いるが，連鎖6, 7を用いても同様に拡張でき，無限に拡張できる．ただし，連鎖nに対し，2^nのオーダーで図や式の計算が複雑になるので，現在のCGによる連鎖7以上の表現は難しい．さて，拡張に関して，その定義が卵形線そのものの定義ほど簡潔明瞭でない．多少技巧的になっている．しかし，その図が卵形線の拡張にふさわしいので，ここであえて報告する．

5.1.　4直線の直極点による卵形線の拡張

5.1.1.　「定義」1＋5定点を与えて定義すること

4節と同様に，図8のように卵形線を拡張定義する．つまり，1直線g上に1定点Oとそれとは異なる5定点F_1，F_2，F_3，F_4，F_5を定める．そして，直線g上にF_1，F_2，F_3，F_4，F_5を通る垂線h_1，h_2，h_3，h_4，h_5を立てる．つぎに，F_3より右側に1点Tを定め線分OTを直径とする円を描く．この円と，直線h_1，h_2，h_3との交点をU_1，U_2，U_3とする．今仮に，平面を2つに分ける直線gの一方側にある交点を考える．

U_1とU_2を結ぶ直線m_1と直線h_4との交点をU_4とし，U_1とU_3を結ぶ直線m_2と直線h_5との交点をU_5とする．

そして，U_2とU_3を結ぶ直線をm_3とし，U_4とU_5を結ぶ直線をm_4とする．このとき，直線m_3とm_4の交点をU_6とし，U_6より直線gに下した垂線の足をF_6とする．ところで，円OTを変え，同様の図を描いてもF_6は，不変である．図9には，3つの動円OTと，そのときの4直線と直線h_1からh_6を描いている．U_6が同じh_6上にあることが解る．この図は1つの定理を表す．

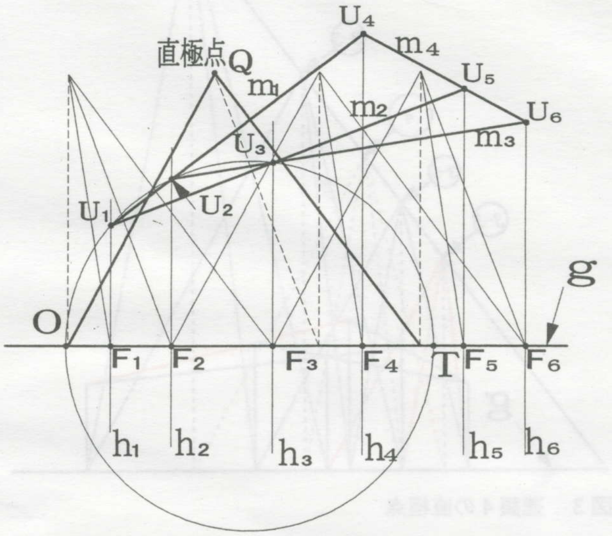


図8　4直線の直極点による卵形線の拡張

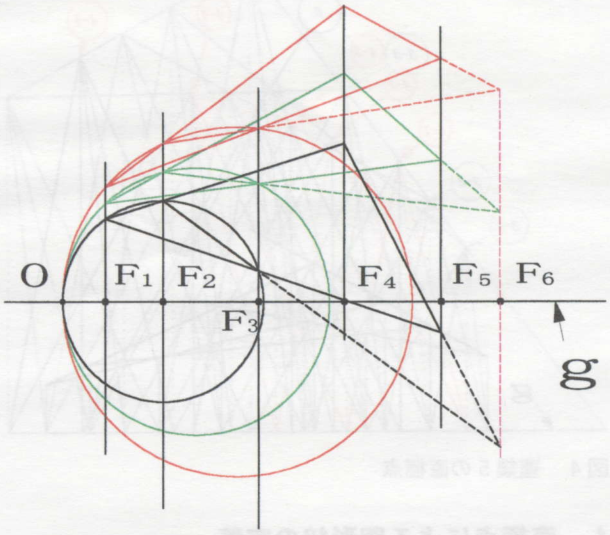


図9　動円と4直線

さて，以上のようにして定まった4本の直線m_1，m_2，m_3，m_4に関する直線gの拡張された直極点は，動点Tがg上を動くとき，拡張された卵形線（多極曲線）を定める．

5.1.2.　焦点について

ここで，焦点について，今まで述べてきたことを図を変えて述べる．図10におけるように焦点の任意性として，O，F_1，F_2，F_3，F_4，F_5よりF_6を定めたものと，O，F_1，F_2，F_3，F_5，F_6よりF_4を定めたものがある．このとき，O，F_1，F_2，F_3，F_4，F_5，F_6は，同じ位置にあるこ

とが解る．このことの証明として，MapleV の数式処理で，O を原点とし，F_1，F_2，．．．．，F_5の座標を文字変数とすれば，その5つの文字式で，F_6が一意的に定まる．故に，4直線による多極曲線は，原点以外の x 軸上の5定点より定まることが言える．つまり，5つのパラメーターのより定義できるのである．
ただし，焦点は，F_1からF_6の6点である．

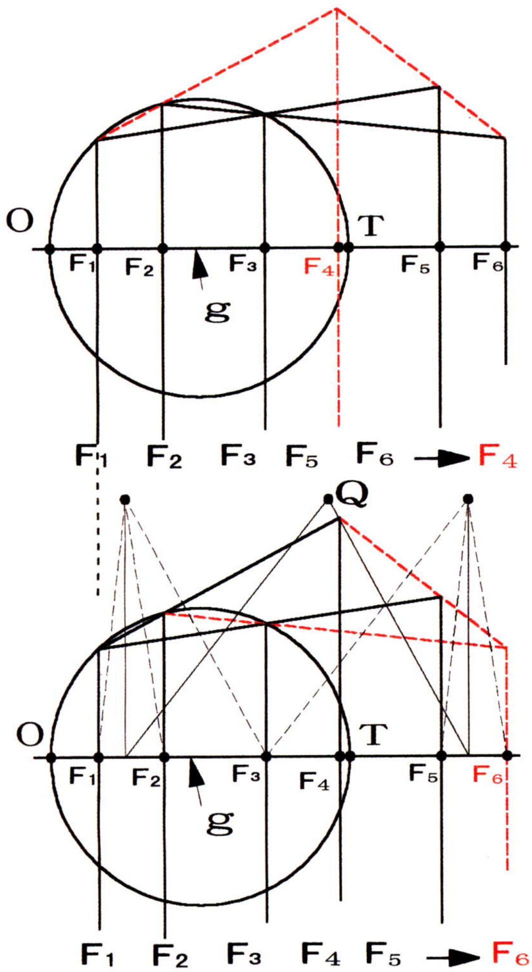


図10　焦点の任意性について

5.2　5直線の直極点による卵形線の拡張

〔定義〕この図11におけるように，直線上に定点 O と7定点，F_1，F_2，F_3，F_4，F_5，F_7，F_8を定める．そして，この7つの定点を通る直線 g との垂線をそれぞれ，h_1，h_2，h_3，h_4，h_5，h_7，h_8とする．さらに，定点 O を通り g 上に直径 OT を持つ動円を考える．その円と，h_1，h_2，h_3との交点 U_1，U_2，U_3から，図のように5直線 m_1，m_2，m_3，m_4，m_5に関する直線 g の直極点を考える．その直極点が，動円が動いて変化するとき，拡張された卵形線である焦点F_1からF_{10}を持つ多極曲線を描く．ここで，F_6，F_9，F_{10}は，その他の初めに定めた7焦点より一意的に定まる．

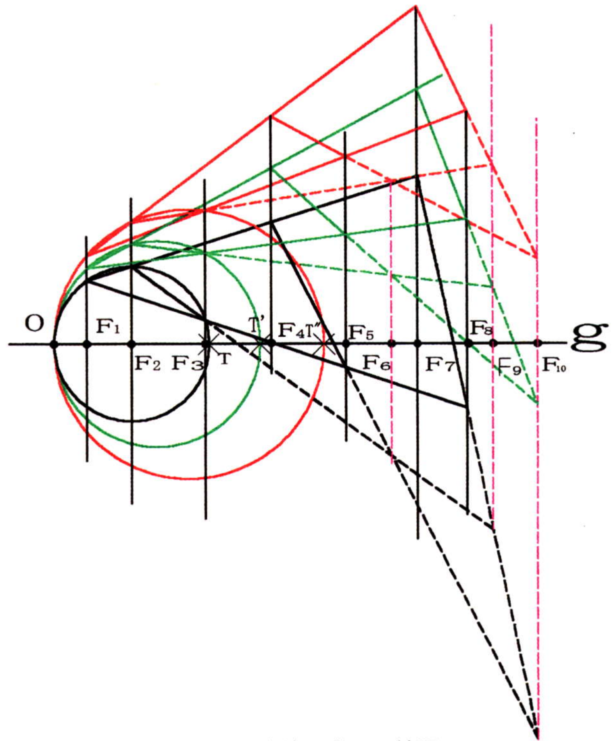


図11　黒1＋7点より5直線を求めて拡張

6．4直線，5直線による多極曲線の CG

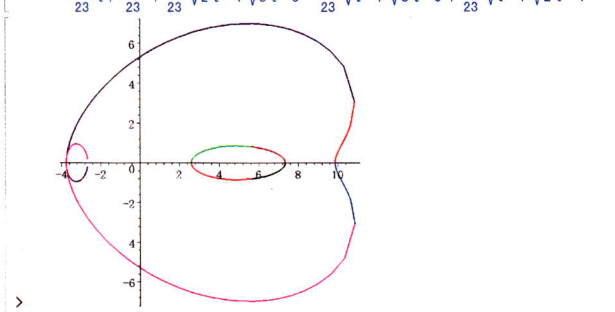
多極曲線は，その作図法より，曲線上の点をいくつでも作図できるが，そう簡単ではない．そこで，解析幾何を用いて交点を求める方法を，　Maple V のプログラム上で行い，その数式処理によって得た図12の媒介変数表示式（1つの曲線に8組ある）をもとに，plot コマンドを用いて図を描いた．この際，直極点の定義では，連鎖4の場合4直線が1点で交わるが，プログラムは，そのうちの2直線で交点を求めて，コンピュータの負荷を軽くした．さて，前述のように，連鎖4の多極曲線には，パラメーターが5つあり，その変化により多極曲線

> X=

$$\frac{\frac{1980}{23}\sqrt{2t-4}\sqrt{3t-9}-\frac{118980}{529}t+\frac{276060}{529}-\frac{17100}{529}\sqrt{t-1}\sqrt{3t-9}+\frac{1140}{23}\sqrt{t-1}\sqrt{2t-4}}{\left(\sqrt{3t-9}+\sqrt{t-1}-2\sqrt{2t-4}\right)\left(\frac{114}{23}\sqrt{2t-4}-\frac{57}{23}\sqrt{3t-9}-\frac{57}{23}\sqrt{t-1}\right)}$$

> Y=

$$-\frac{\frac{5670}{529}\sqrt{3t-9}+\frac{3990}{529}\sqrt{t-1}-\frac{420}{23}\sqrt{2t-4}}{-\frac{684}{23}t+\frac{1482}{23}+\frac{228}{23}\sqrt{2t-4}\sqrt{3t-9}-\frac{114}{23}\sqrt{t-1}\sqrt{3t-9}+\frac{228}{23}\sqrt{t-1}\sqrt{2t-4}}$$

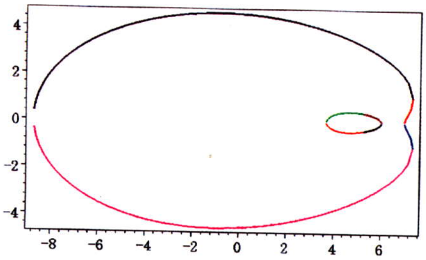


>

$x1 = 1,\ x2 = 2,\ x3 = 3,\ x4 = 5,\ x5 = \frac{150}{23},\ x6 = \frac{165}{19}$

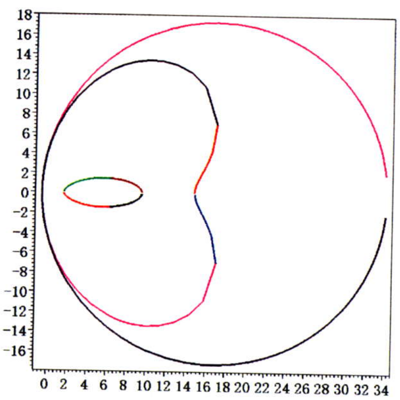
図12　多極曲線の媒介変数表示と CG

は変わった図になる．また，連鎖５の多極曲線には，パラメーターが７個あり，それによる CG の変化の様子も図13に示した．なお，曲線の図で線が離れているのは，プログラム上，変数の値を無限大に出来ないためで，別の方法で，極限値をとれば線が閉じることを確認している．



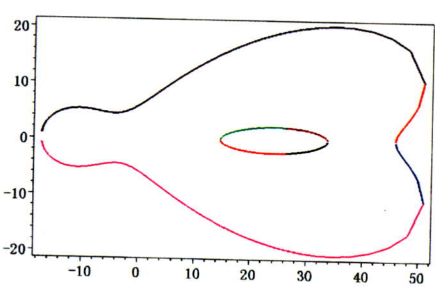
$x1=1,\ x2=2,\ x3=3,\ x4=5,\ x5=\frac{35}{6},\ x6=\frac{125}{19}$

(a)



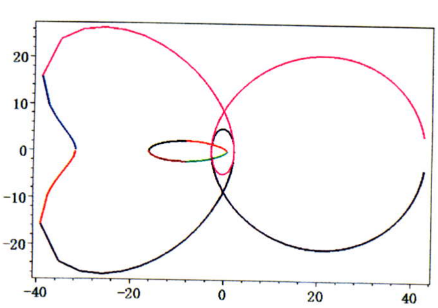
$x1=1,\ x2=2,\ x3=3,\ x4=5,\ x5=\frac{43}{6},\ x6=\frac{133}{11}$

(b)



$x1=1,\ x2=2,\ x3=3,\ x4=5,\ x5=6,\ x6=7,\ x7=8,\ x8=\frac{19}{2},\ x9=\frac{124}{11},\ x10=\frac{61}{2}$

(c)



$x1=1,\ x2=2,\ x3=3,\ x4=5,\ x5=6,\ x6=7,\ x7=8,\ x8=\frac{61}{6},\ x9=\frac{388}{29},\ x10=\frac{-23}{2}$

(d)

図13　多極曲線；連鎖４（a），（b）；連鎖５（c），（d）

7．結び

ここでは，卵形線の拡張を，直極点を用いて行った．つまり，４直線（完全４辺形）の直極点による多極曲線の焦点は，${}_4C_2=6$個あり，５直線（完全５辺形）の直極点による多極曲線には，焦点が，${}_5C_2=10$個あり，以下同様に，多極曲線も拡張され，その方法で，焦点の数も拡張できる．しかし，まだ，エレガントな焦点の性質は見つかってない．もっと，図形的な考察や，式についての研究が必要であろう．

また，その CG より，拡張した曲線は，連鎖４の場合，２重の閉曲線になったり，３重の自己交差閉曲線になったりする．故に，多重曲線といえる．さらにまた，連鎖が１つ増えると多重性が１つ増えると予想される．

ところで，この拙論と，参考文献の同じ意味を表す文字や添え字など異なる点があり，注意されたい．

参考文献

[１] J.C.Maxwell；“On the description of Oval curves, and those having plurality of foci”,the Royal Society of Edinburgh,（1846）

[２] ロックウッド，松井政太郎訳；“カーブ”，みすず書房，（1964）

[３] 蛭子井博孝；“デカルトの卵形線の二三の性質”，図学研究，12，（1973）

[４] 蛭子井博孝；“無限連鎖定理に関する考察”，図学研究，87，（2000）

[５] 蛭子井博孝；“デカルトの卵形線の性質に関する考察ーその幾何学的構図ー”，図学研究，49，（1990）

[６] 蛭子井博孝；“Basic と CAD による卵形線の幾何学”，日本図学会，1997年度大会（東京）学術講演論文集

[７] 岩田至康編；“幾何学大辞典１「67」，３”，槇書店，（1976）

[８] 蛭子井博孝；“デカルトの卵形線の曲率円”，図学研究，19，（1976）

●2000年６月23日受付

えびすい　ひろたか

卵形線研究センター

1950年生　大阪大学工学部応用物理修了後　高校数学教師，RERF 研究員

現在　Free で卵形線，卵形面，共点図形等　図形の幾何学　研究中

Email hirotaka.ebisui@nifty.ne.jp