ラマヌジャン数について

X＾３+Y＾3=Z＾3+w＾3

蛭子井博孝

$383662070451^3+464114756685333^3= 464114844012243^3+34878367854^3$

$227^4+157^4 = 239^4+7^4$

卵形線研究センター

Ramanujan 数について

蛭子井博孝
卵形線研究センター
E-mail ~~hirotaka.ebisui@nifty.ne.jp~~
hirotaka.ebisui@clear.ocn.ne.jp

要約：方程式　x^3+y^3=z^3 は、フェルマーの定理と呼ばれ、自然数解を持たないことは、有名である。ところが、その変形である方程式　x^3+y^3=z^3+1 は、自然数解を持つ。この方程式は、ラマヌジャンの方程式 x^3+y^3=z^3+w^3　の特別な場合である。この方程式　x^3+y^3=z^3+w^3 ＝Ｔの自然数解を Maple　V　のプログラムを用いて解いた。その初めの 600 組の数値解を小さい順に示す。この６００組には,w=1 の場合をいくつか含む。

また、ラマヌジャンの方程式 x^3+y^3=z^3+w^3 の一般部分解を見つけた。さらに方程式　x^3+y^3=z^3+1　の一般部分解も見つけた。　これらの一般解より、x=383662070451,　y=46411475668533,　z=　46411484401224,　w=34878367854　, T=99971538772614746324923301814093358719288

1440000^3+72001^3=1440060^3+1= 2986357263552216001.

のような解が見つかる。

ここでは、これらの一般解を利用して、いくつかの数値解を示す。

また、最後に、ラマヌジャン方程式を拡張した方程式　X^4+Y^4=Z^4+W^4　の解を 小さい順に幾組か示す。

１．はじめに

方程式 x^n+y^n=z^n は、n>2　のとき、自然数解を持たないことが、フェルマーの定理として 最近証明された。　しかし、類似した方程式　 x^3+y^3=z^3+1 は、無限組の解を持つ。　フェルマーの式にただ１を加えただけである。　これは、整数解を持つ方程式の不思議さと言える。さて、ラマヌジャン方程式　x^3+y^3=z^3+w^3 は、無数の自然数解を持つ。ここで、その条件　w＝１の時、先ほどの式となる。

この小論では、ラマヌジャン方程式の解を示す。それらの数値解は、コンピューターのプログラムを用いて得ている。このとき、解の桁数が大きいため、多倍精度プログラムへの考慮がいる。また、解のサーチ時間についても考慮する必要がある。というのは、仮に x, y, z, w が、１から 1000 までだったとしても、そのすべての組み合わせは　1000 × 1000 × 1000 × 1000 で非常に大きな数になる。そのため、すべての方程式の解を求めることは、困難である。しかし、ここでは、初めの６００組の x^3+y^3=z^3+w^3 の解を求めた。 また、これまでに、ラマヌジャン方程式に関して、一般部分解が、既存の数式の変形から求まっている。その一般部分解の式は、無限の解を含むが、すべての解を表しているわけではない。それで、６００組の解も重要になる。

とにかく、ここでは、数値解と数式によりラマヌジャン方程式の解を表したものを示す。

２。　方程式x^3+y^3=z^3+w^3の解

初めに、Basic プログラムを解のサーチに用いていたが、ここでは、整数の多倍長演算が簡単に出来る　Maple V　用いることにした。その 方程式の解を求めるプログラムは、次のようになる。

```
[> n:=0 : for  x  from 1  to 1000 do
        for  y  from 1  to x do
        for  z  from x+1  to (13/10)*x do
        for  w  from 1  to y do
        if  x^3+y^3=z^3+w^3 then n:=n+1 : print (n,x,y,z,w); fi;
        od;od;od;od;
```

表１に、解（n, x, y, z, w）（1<=n<=600）を示した。このとき　x>y,　x<z,　z>w,　y>w 、が満たされている。解を求めるため、１昼夜以上かかった。この数表を調べることにより x^3+y^3=z^+w^3=s^3+t^3　となる解が見つかった。それは、次の値である。

414^3+255^3=423^3+228^3=436^3+167^3

423^3+408^3=460^3+359^3=522^3+111^3

428^3+346^3=492^3+90^3=493^3+11^3

さて、ここで、方程式 x^3+y^3=z^3+w^3 の一般部分解の式を示す。

(9*a^7+81*a^4+729*a)^3+(a^9-243*a^3-729)^3=(a^9-729)^3
+(27*a^6+243*a^3)^3

=17496*a^18+531441a^15+4782969*a^12+15943230*a^9+a^27-387420489

さらに、a に数値を代入して次の表を得た。

a	x	y	z	w
1:	819,	-971,	-728,	270
2:	3906,	-2161,	-217,	3672
3:	28431,	12393,	18954,	26244
4:	171108,	245863,	261415,	126144
5:	757395,	1922021,	1952396,	452250
6:	2628774,	10024479,	10076967,	1312200
7:	7611471,	40269529,	40352878,	3259872
8:	19211976,	134092583,	134216999,	7202304
9:	43584723,	387242613,	387419760,	14526054
10:	90817290,	999756271,	999999271,	27243000

ここで、－は、移項すればよい。また、値が大きいので、表１は、この式による解の範囲外であり、そのことから、この一般解では、表せない解があることがわかり、この式は部分解を表すことがわかる。

３．方程式x^3+y^3=z^3+１の解

上の方程式は、２節の方程式のｗ＝１の場合である。表１からは、次の５組が見つかる。

10^3+9^3=12^3+1

94^3+64^3=103^3+1

144^3+73^3=150^3+1

235^3+135^3=249^3+1

438^3+334^3=495^3+1

また、方程式 x^3+y^3=z^3+１の一般解の一つは、方程式 x^3+y^3+z^3=1 のオイラーの解[1)]を変形して得られる。つまり、次のように表される。

(-9*t^4-3*t)^3+(9*t^4)^3+(9*t^3+1)^3=1

移項して、次の一般部分解が得られる。

(9*t^4)^3+(9*t^3+1)^3=(9*t^4 ＋ 3*t)^3 ＋ 1

これより数値解は、次のようになる。

t	x	y	z
1:	9,	10,	12
2:	144,	73,	150
3:	729,	244,	738
4:	2304,	577,	2316
5:	5625,	1126,	5640
6:	11664,	1945,	11682
7:	21609,	3088,	21630
8:	36864,	4609,	36888
9:	59049,	6562,	59076
10:	90000,	9001,	90030

この表の値とは異なるサーチ解があり、一般解は部分解であることがわかる。

４．方程式　X^4+Y^4=Z^4+W^4の解

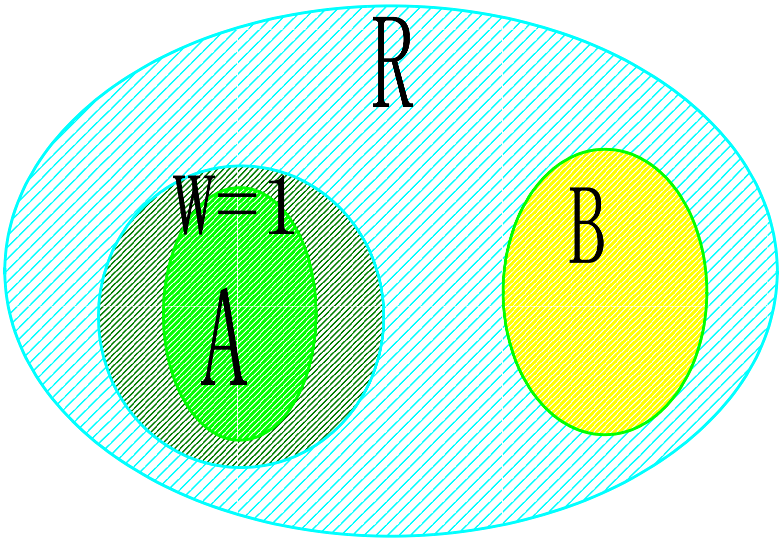
ラマヌジャンの方程式の発展として、上記の方程式の解が、サーチ解として次のものが見つかった。

N	X	Y	Z	W	
1	134	133	158	59	○
2	227	157	239	7	○
3	257	256	292	193	○

4	268	266	316	118	▲
5	402	399	474	177	▲
6	454	314	478	14	▲
7	497	298	502	271	○
8	514	359	542	103	○
9	514	512	584	386	▲
10	536	532	632	236	▲
11	558	503	631	222	○

５．むすび

以上、 方程式 x^3+y^3=z^3+1、 x ^3+y^3=z^3+w^3 について、今回見つけた一般部分解を略図で示したのが、下の図の集合Ａ， B であり、集合Ｒがラマヌジャン数全体である。



また、X^4+Y^4=Z^4+W^4 の解を若干見つけた。さらに、この方程式のW＝１の場合 X, Y, Z が１から１０００までには、解がないことを確かめた。

このように、フェルマーの定理の変形であるラマヌジャンの方程式には、解があり、また、そのすべてを表す一般解を見つけることは、これからの課題である。さらに、４乗数、５乗数についての方程式については、さらなる数値実験で、解についての予想が出来るようになるだろう。

参考文献

1） Andrew Bremner;" INTEGER POINTS ON A SPECIAL CUBIC SURFACE"; DUKE MATHEMATICAL JOURNAL Vol.44,No.4 December 1977

About Ramanujan's Equations

Hirotaka Ebisui
Oval Research Center
E-mail ~~hirotaka.ebisui@nifty.ne.jp~~
hirotaka.ebisui@clear.ocn.ne.jp

Abstract:

Equation x^3+y^3=z^3 is famous as Fermat's problem that has no natural-number solution . x^3+y^3=z^3+1, however, has nutural-number solutions. This equation is a special case of Ramanujan's Equation x^3+y^3=z^3+w^3. We used the Maple V program to find out natural-number solutions to x^3+y^3=z^3+w^3=T. Only 600 solutions, therefore, are shown below in numerical order. These 600 solutions included a few ones to Case w=1.

On the way, we have known a general partial solution to Ramanujan's Equation x^3+y^3=z^3+w^3. In addition, we have also known a general partial solution to x^3+y^3=z^3+1

From these general solutions, we obtain x=383662070451, y=46411475668533, z= 46411484401224, w=34878367854 , T=99971538772614746324923301814093358719288 and

1440000^3+72001^3=1440060^3+1= 2986357263552216001.

We have shown the two general partial solutions. At the same time, we have obtained numerical value cases, using the general partial solutions and numerical expression processing software, Maple V. And we will discuss about the difficulties involved in searching for all solutions to Ramanujan's Equation.

1. Introduction

We know Fermat Problem (Equation x^n+y^n=z^n has no natural-number solution when n>2) were solved. A similar equation x^3+y^3=z^3+1, however, has an infinite number of solutions. Only adding 1 changes the situation of the Equation. This is the mystery of those equations which have an integer solution. We know that Ramanujan's Equation x^3+y^3=z^3+w^3 has natural- number solutions. And Condition w=1 makes up the equation referred to above.

In this paper, we will show you solutions to Ramanujan's Equation. Those solutions has been found out while using computer programs. To make such programs , it is necessary to take into consideration the multiple accuracy problem. And it is also necessary to take into account the time required to search for the solutions. If x,y,z,and w should vary from 1 to 1000, then, Equation x^3+y^3=z^3+w^3 may be substituted for 1000*1000*1000*1000 times. This is too large to compute entirely. And such status has made it difficult to solve the equation. Shown herein, however, are six hundred sets of the solution to x^3+y^3=z^3+w^3. Those in the past, however, strove to solve such equation using general formulas. As far as Ramanujan's equations are concerned, a general partial solution thereto is to be obtained by correcting the equations known to us. These equations have an infinite number of solutions, but do not cover all the solutions to Ramanujan's equations. The six hundred sets of solutions would turn important.

Anyway, we show numerical-solutions and formulas-solutions to Ramanujan's Equation.

2. The solutions of x^3+y^3=z^3+w^3 (1)

The Basic program, first of all, was used to search for a solution. The Maple V, however, is capable of readily processing the multiple accuracy of an integer. To solve the equation, therefore, the following program was used:

```
[> n:=0 : for  x  from 1  to 1000 do
         for  y  from 1  to x do
         for  z  from x+1  to (13/10)*x do
         for  w  from 1  to y do
         if  x^3+y^3=z^3+w^3 then n:=n+1 : print (n,x,y,z,w); fi;
         od;od;od;od;
```

we have obtain (n, x, y, z, and w) (1<=n<=600). These solutions are shown in Table 1. And they satisfy x>y, x<z, z>w, and y>w .

To obtain the solutions, 24 hours or more were taken. Using this table 1, we could find out a few solutions, such as x^3+y^3=z^+w^3=s^3+t^3. In other words,

414^3+255^3=423^3+228^3=436^3+167^3

423^3+408^3=460^3+359^3=522^3+111^3

428^3+346^3=492^3+90^3=493^3+11^3

Now, the following formula are available as a general partial solution to equation(1).

(9*a^7+81*a^4+729*a)^3+(a^9-243*a^3-729)^3=(a^9-729)^3
+(27*a^6+243*a^3)^3

=17496*a^18+531441a^15+4782969*a^12+15943230*a^9+a^27-387420489

a	x	y	z	w
1:	819,	-971,	-728,	270
2:	3906,	-2161,	-217,	3672
3:	28431,	12393,	18954,	26244
4:	171108,	245863,	261415,	126144
5:	757395,	1922021,	1952396,	452250
6:	2628774,	10024479,	10076967,	1312200
7:	7611471,	40269529,	40352878,	3259872
8:	19211976,	134092583,	134216999,	7202304
9:	43584723,	387242613,	387419760,	14526054
10:	90817290,	999756271,	999999271,	27243000

From the large values referred to above, it might be gather that they were outside the range of Table 1. And they were not all the solutions to Equation (1).

So we can say that they are general partial solutions of Equation(1).

3. The solutions of Equation x^3+y^3=z^3+1 (2)

Equation (2) is Equation (1) with w=1. The following five solutions were obtained, with Table 1 searched for.

10^3+9^3=12^3+1

94^3+64^3=103^3+1

144^3+73^3=150^3+1

235^3+135^3=249^3+1

438^3+334^3=495^3+1

Euler's solution to Equation(ref 1) x^3+y^3+z^3=1 is:

(-9*t^4-3*t)^3+(9*t^4)^3+(9*t^3+1)^3=1

The first term in the equation above may be transferred to the right side.

Then a general partial solution to Equation x^3+y^3=z^3+1 was obtained. In other words,

(9*t^4)^3+(9*t^3+1)^3=(9*t^4+3*t)^3+1

This equation was used to obtain the following numerical values:

t	x	y	z
1:	9,	10,	12
2:	144,	73,	150
3:	729,	244,	738
4:	2304,	577,	2316
5:	5625,	1126,	5640
6:	11664,	1945,	11682
7:	21609,	3088,	21630
8:	36864,	4609,	36888
9:	59049,	6562,	59076
10:	90000,	9001,	90030

4 Conclusion

we have shown some solutions to Equatins x^3+y^3=z^3+w^3 and x^3+y^3=z^3+1.

They are not,however, all the solutions to the equations.

Another method, therefore, must be used to search for the solutions not shown.

This is a pleasure for us while showing the importance of Equations x^3+y^3=z^3+w^3 and x^3+y^3=z^3+1 in the areas of algebra and computer sciense.

Reference

1) Andrew Bremner;" INTEGER POINTS ON A SPECIAL CUBIC SURFACE"; DUKE MATHEMATICAL JOURNAL Vol.44,No.4 December 1977

Ramanujan's Equation

$$X^3+Y^3=Z^3+W^3$$

Solution＞＞＞＞＞X?,　Y?,　Z?,　W?

Example

X=90817290,　Y= 999756271,

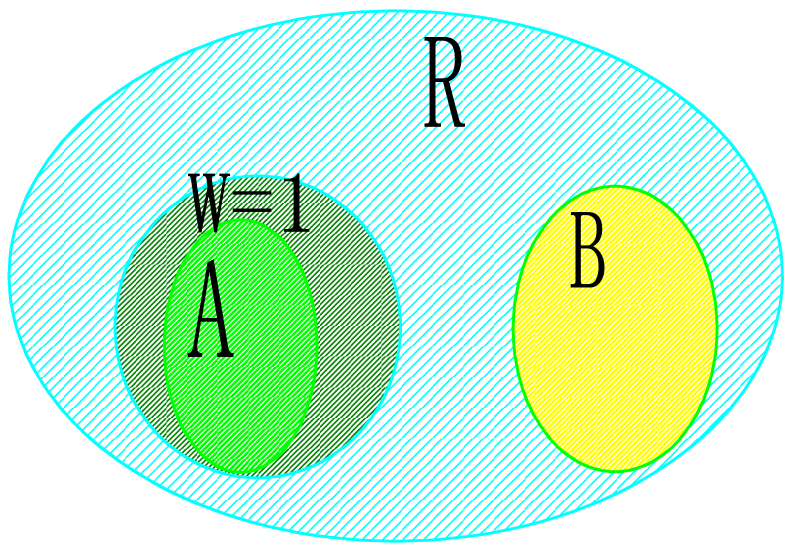
Z=999999271,　W=27243000

1. Cut and Try Generation of Solution using Computer Program

2. Systematic Generation of Solution using Formular

Solution Set of Ramanujan's Equation

$$X^3+Y^3=Z^3+W^3$$



A is a partial general solution to X^3+Y^3=Z^3+1.

B is a partial general solution to X^3+Y^3=Z^3+W^3.

（W＞1）

1. Cut and Try Generation of Solution

(1) MapleV Program to search for the solutions to x^3+y^3=z^3+w^3

```
[> n:=0 :
for  x  from 1 to 1000  do
for  y  from 1 to x     do
  for  z  from x+1 to (13/10) *x do
  for  w  from 1 to y     do
    if  x^3+y^3=z^3+w^3 then
      n:=n+1 :
      print (n,x,y,z,w) ; fi;
                    od;od;od;od;
```

（2 ）Table of the solutions to X^3+Y^3=Z^3+W3

	N	X	Y	Z	W
NO.	204	231^3+217^3 =280^3 +84^3			
	205	232	190	268	46
	206	232	204	268	120
	207	235	135	249	1

［207 235^3 + 135^3 = 249^3 + 1］

208	236	88	240	12
209	236	151	255	18
210	236	235	292	107
211	237	228	293	22
212	239	94	240	87
213	240	98	242	84
214	240	103	246	31
215	240	144	256	32
216	240	190	270	100
217	240	194	275	69

(3) some Solutions to $x^3+y^3=z^3+1$

The following five solutions were obtained, with Table 1 searched for.

No.	
1	$10^3+9^3=12^3+1$
48	$94^3+64^3=103^3+1$
91	$144^3+73^3=150^3+1$
207	$235^3+135^3=249^3+1$
527	$438^3+334^3=495^3+1$

2 。 Systematic Generation of Solution

A: Partial General Solution to X^3+Y^3=Z^3+1

（9*t^4）^3+（9*t^3+1）^3=（9*t^4+3*t）^3+1

X=9*t^4, Y=9*t^3+1, Z=9*t^4+3*t

Above equation was used to obtain the following numerical values:

t	X	Y	Z
1:	9,	10,	12
2:	144,	73,	150
3:	729,	244,	738
4:	2304,	577,	2316
5:	5625,	1126,	5640
6:	11664,	1945,	11682
7:	21609,	3088,	21630
8:	36864,	4609,	36888
9:	59049,	6562,	59076
10:	90000,	9001,	90030

B:Partial General Solution to （$X^3+Y^3=Z^3+W^3$）

X=9*a^7+81*a^4+729*a ,
Y=a^9-243*a^3-729,

Z=a^9-729,
W=27*a^6+243*a^3

B. Partial General Solution to X^3+Y^3=Z^3+W^3

x=9*a^7+81*a^4+729*a , Y=a^9-243*a^3-729,

Z=a^9-729, W=27*a^6+243*a^3

x ^ 3 + y ^ 3 = z ^ 3 + w ^ 3

=17496*a^18+531441a^15+4782969*a^12+15943230*a^9+a^27-387420489

a	x	y	z	w
1:	819,	-971,	-728,	270
2:	3906,	-2161,	-217,	3672
3:	28431,	12393,	18954,	26244
4:	171108,	245863,	261415,	126144
5:	757395,	1922021,	1952396,	452250
6:	2628774,	10024479,	10076967,	1312200
7:	7611471,	40269529,	40352878,	3259872
8:	19211976,	134092583,	134216999,	7202304
9:	43584723,	387242613,	387419760,	14526054
10:	90817290,	999756271,	999999271,	27243000

Future Work

To find a new general solution.

To find a faster cut and try method.

To extend the Ramanujan's Equation.

Example

$$X^4+Y^4=Z^4+W^4$$

N	X	Y	Z	W	
1	134	133	158	59	○
2	227	157	239	7	○
3	257	256	292	193	○
4	268	266	316	118	▲
5	402	399	474	177	▲
6	454	314	478	14	▲
7	497	298	502	271	○
8	514	359	542	103	○
9	514	512	584	386	▲
10	536	532	632	236	▲
11	558	503	631	222	○