(2) The circle of curvature of the Cartesian Oval

curvature

デカルトの卵形線の曲率円*

蛭子井博孝**

デカルトの卵形線は，前論文[1)]において，焦点，準円，準線，補助円などの性質から楕円の一般化された曲線であることを述べた。本論は，引き続いて卵形線の円による包絡，および頂点（長軸，短軸）における曲率円の作図法を考察した。

1．卵形線を包絡する円群

この節では，ある円群を考え，その包絡線が卵形線となることを幾何学的に示す。

今，図1において，文献[1)]作図3によりP，Qが求まり，直線l_2と直線PQの交点をAとする。P，Qが卵形線を描くとき，Aは，準円S_1（中心；半径$=S_1$；S_1A）上を動く。ここで，$O_{12}M_1=\dfrac{kc}{m+n}$，$S_1O_{12}:O_{12}S_2=n:m$とすると，$S_1A=\dfrac{k}{m}c$となる。さて，直線$t_1$，$t_2$は，文献[1)]の6によってP，Qにおける卵形線の接線である。またPにおける卵形線の法線をn_1とする。そしてn_1とl_2の交点をR_1とすれば$\angle APM_1=\angle S_2PM_1$，$n_1$は$\triangle APS_2$の外接円の点Pにおける接線より$\angle R_1PA=\angle PS_2A$ゆえに$\angle R_1PM_1=\angle R_1M_1P$となり$\triangle R_1PM_1$は二等辺三角形となる。（同様に$\triangle R_1QM_1$も二等辺三角形となる。）ここで，点Pを通り直線$N_1M_1$に垂直な直線と$l_1$，$l_2$の交点を$N_2'$，$M_2$とする。すると$\angle S_1PN_2'=\angle N_2'PS_2$より$S_2M_2:M_2A=S_2M_1:M_1A=m:n$となり，$M_2$を通り直線$S_1A$に平行な直線と直線$S_1S_2$の交点を$O_{21}$とすれば，$M_2$は中心$O_{21}$，半径$\dfrac{kc}{m-n}$の卵形線の補助円上の点となる。$\angle M_2PM_1=\angle R$，$\triangle R_1PM_1$が二等辺三角形より，$M_2R_1=M_1R_1$となり，$M_1$，$M_2$が補助円$(O_{12};O_{12}M_1)=(O_{12};\dfrac{kc}{m+n})$および$(O_{21};O_{21}M_2)=(O_{21};\dfrac{kc}{m-c})$上をそれぞれ動くとき，$R_1$は中心$O_0$（線分$O_{12}O_{21}$の中点），半径

n

$$\left(\frac{kc}{m+n}+\frac{kc}{m-n}\right)/2=\frac{mkc}{m^2-n^2}=mkCo \quad (1)$$

をもつ円周上を動く。また，N_2'は$M_2N_2'\perp N_1M_1$より文献[1)]の作図4より補助円O_{21}上にあることがわかる。また補助円と準円の関係よりN_1O_{12} // $O_{21}N_2'$でR_2はN_1N_2'の中点，O_0は$O_{12}O_{21}$の中点よりO_0R_2 // $O_{12}N_1$となる。ゆえに

$$O_0R_2=\frac{O_{21}N_2'-O_{12}N_1}{2}$$

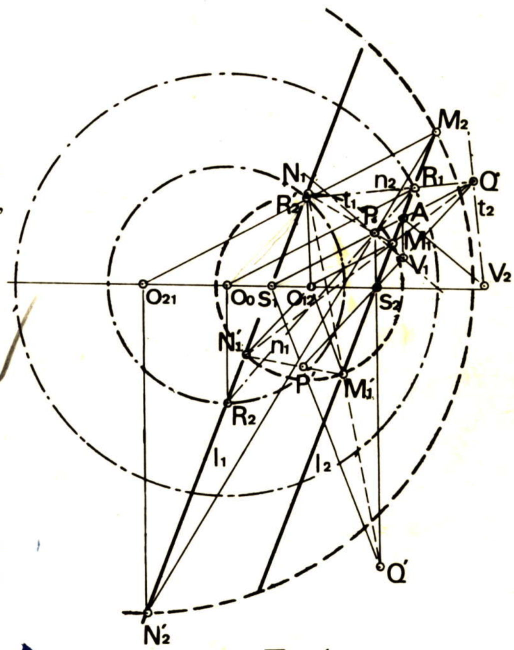


図 1

---

*　昭和51年6月10日受付

**　大阪大学

1976

$$=\left(\frac{kc}{m-n}-\frac{kc}{m+n}\right)/2=\frac{nkc}{m^2-n^2}=nkC_0 \qquad (2)$$

このように，円$(O_0;\ O_0R_1)$，$(O_0;\ O_0R_2)$の中心および半径は補助円$\left(O_{21};\ \frac{kc}{m-n}\right)$，$\left(O_{12};\ \frac{kc}{m+n}\right)$より求められる。また$R_1P$，$R_1Q$は等しくかつP，Qにおける卵形線の法線である。ゆえに，円$(R_1;\ R_1M_1)$は卵形線にP，Qで接する円となる。図2に示すように円$(O_0;\ O_0R_1)$上に中心をもち，$M_2R_1=R_1M_1$を半径，つまりM_1M_2を直径とする円（R_1を動点とし，直線S_2R_1よりM_1，M_2が決まる）の包絡線は卵形線の内，外分枝である。同様に円$(R_2;\ R_2N_1)$の包絡線も同じ一組の卵形線を与える。これらの同心円$(O_0;\ O_0R_1)=(O_0;\ mkC_0)$，$(O_0;\ O_0R_2)=(O_0;\ nkC_0)$ はその周が卵形線から等距離にあるので，卵形線に対する等距離円と名づけることにする。

2．等距離円と焦点との関係

ここでは，卵形線の第3の焦点も考慮して前節と同様な等距離円および等距離円と焦点の関係を調べる。

図1において等距離円$(O_0,\ O_0R_1)$，$(O_0;\ O_0R_2)$は補助円O_{12}，O_{21}より求められた。同様に卵形線には図3におけるような関係にある補助円（破線の円）$(O_{23};\ n(k-m)C_0)$，$(O_{32};\ n(k+m)C_0)$，補助円$(O_{13};\ m(k-n)C_0)$，$(O_{31};\ m(k+n)C_0)$がある。ここで，点$O_{ij}(i\neq j,\ i,j=1,2,3)$を通り互いに平行な直線$h_{ij}$を引く。補助円$O_{ij}$と$h_{ij}$の交点を$H_{ij}$，$H'_{ij}$とする。今$H_{ij}$と$H_{ji}$の中点を$R_i$，$H'_{ij}$と$H_{ji}$の中点を$R_j$とする。すると$O_{ij}O_{ji}$の中点を$O_0$とすれば（すべてのi，jに対してただ1つの点となる），O_0R_iは等距離円の半径となり次のように求まる。

半径は，補助円O_{23}，O_{32}に対して

$$(n(k+m)C_0+n(k-m)C_0)/2=nk\,C_0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (2)$$

$$(n(k+m)C_0-n(k-m)C_0)/2=mn\,C_0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (3)$$

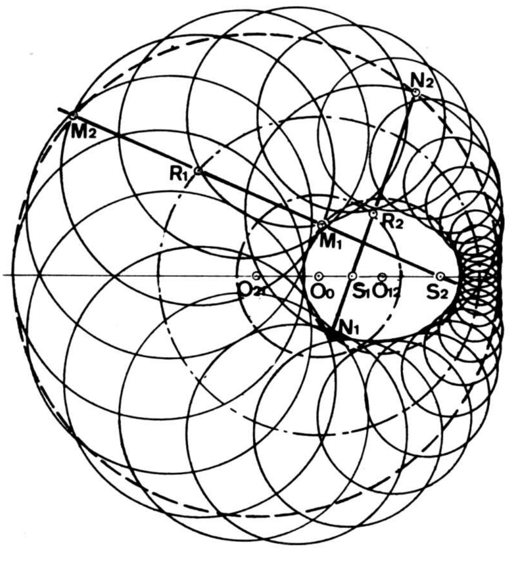


図 2

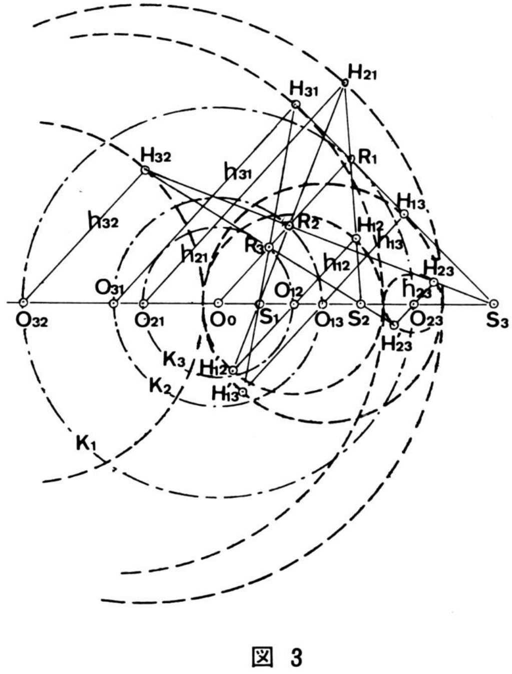


図 3

補助円 O_{13}, O_{31} に対して

$$(m(k+n)C_0+m(k-n)C_0)/2=mk\ C_0 \tag{1}$$

$$(m(k+n)C_0-m(k-n)C_0)/2=mn\ C_0 \tag{3}$$

ゆえに等距離円は，中心を O_0 とし半径 (1), (2), (3) の三つの同心円であることがわかる。これを等距離円 K_1, K_2, K_3 とする。

また，焦点は直線 $H_{ij}H_{ji}$, $H'_{ij}H_{ji}$ と直線 $O_{ij}O_{ji}$ のそれぞれの交点 S_j, S_i である。

計算により　$O_oS_i \cdot O_oS_j=O_oR_k^2 \quad (i \neq j \neq k)$　(4)

が成立する。式(4)は反転を表わしており，焦点 S_i は等距離円 K_k に関する S_j の反点である。さらに(4)式より，点 O_o, S_1, S_2, S_3 を与えるとき等距離円 K_1, K_2, K_3 を求めることができて，逆もまた成立する。ゆえに，つぎのように述べることができる。

1．卵形線は一直線上にある等距離円の中心 O_o，3焦点 S_1, S_2, S_3 より定められる。

2．卵形線は同心円である3つの等距離円より定められる。

3．卵形線の頂点における曲率円

さて，図3において等距離円が3つ求められた。いま，図4において，焦点 S_1, S_3 の組に対する等距離円 K_1, K_3 に対して S_1, S_3 を通り互いに平行な直線 l_1, l_3 を引く。その l_1, l_3 と円 K_3, K_1 との交点を R_1, R'_1, R_3, R'_3 とする。(図1において，R_1R_2, $R_1R'_2$ 等が卵形線の法線であったことから)，R_1R_3, $R_1R'_3$, R'_1R_3, $R'_1R'_3$ は卵形線の法線となる。また，R_1R_3, $R_3R'_1$ と円 K_2 の交点を R_2, R'_2 とすれば，点 S_1, S_2, S_3 円 K_1, K_2, K_3 の同等性より，$R_2R'_2S_3$ は同一直線上にあり，また，$S_1R'_2 /\!/ S_2R'_1$, $S_1R_2 /\!/ S_2R_1$, $R_3S_2 /\!/ S_3R_2$ となる。さて，$\angle R_1S_2O_o=\angle R'_1S_2S_3$ であることも簡単な考察からわかる。これにより，R_1S_2 と円 K_1 の交点 $\bar{R}'_1$ は点 R'_1 と直線 O_oS_3 に対して対称となる。同様に $\bar{R}_i$, $\bar{R}'_i$ が求まる。

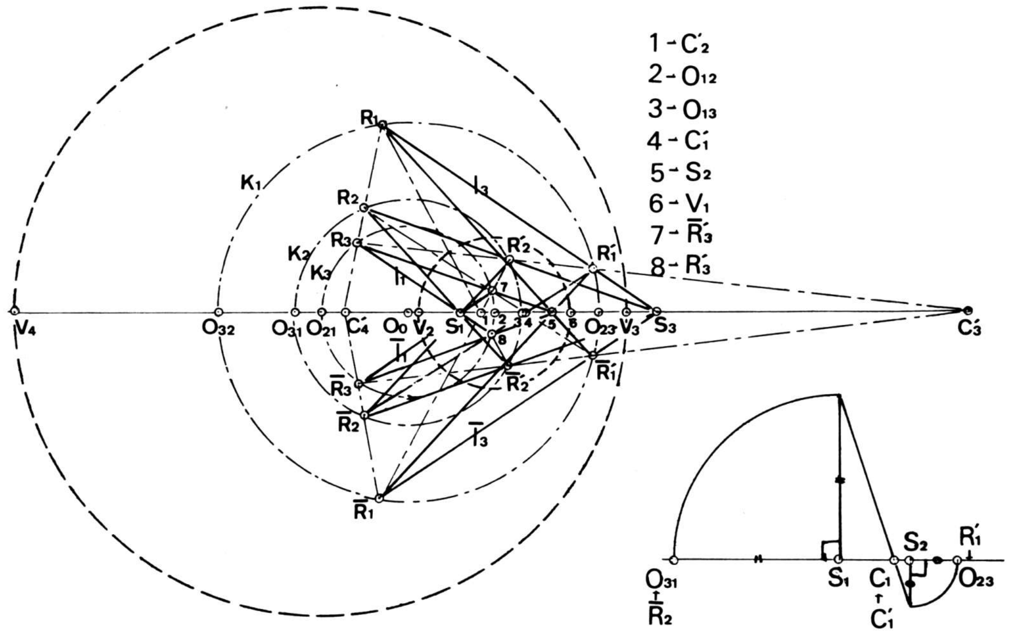


図　4

図4－1

さて，R_1R_3, $R_1R'_3$, $R_3R'_1$, $R'_1R'_3$ と $\bar{R}_1\bar{R}_3$, $\bar{R}_1\bar{R}'_3$, $\bar{R}_3\bar{R}'_1$, $\bar{R}'_1\bar{R}'_3$ はそれぞれ，直線 O_oS_3 上で交わる。それは R と $\bar{R}$ に関する 2 法線の交点で，そのため l_1 が O_oS_3 に一致する極限においてこの交点は曲率中心となる。つまり卵形線の対称軸（長軸）上の頂点での曲率中心の位置が求まり曲率半径が次のように求まる。

前節より卵形線の定義式が $mr_1 \pm nr_2 = kc\,(k > m > n > 0)$ のとき，等距離円 K_1, K_2, K_3 の半径は (1), (2), (3) となり，(4) 式より

$$O_oS_1 = n^2C_o,\ O_oS_2 = m^2C_o,\ O_oS_3 = k^2C_o \tag{5}$$

これより C'_1 を図のようにとると極限においても $S_1\bar{R}_2 /\!/ S_2R'_1$ で $\bar{R}_2 \to O_{31}$, $R'_1 \to O_{23}$　$C'_1 \to C_1$ となることより

$$S_1C'_1 = \frac{S_1S_2 \cdot S_1\bar{R}_2}{S_1\bar{R}_2 + S_2R'_1} \longrightarrow S_1C_1 = \frac{S_1S_2 \cdot S_1O_{31}}{S_1O_{31} + S_2O_{23}}$$

$$S_1C_1 = \frac{c(knC_o + n^2C_o)}{(knC_o + n^2C_o) + (kmC_o - m^2C_o)} = \frac{n(k+n)c}{(m+n)(k-m+n)} \tag{6}$$

ここで，C_1 の作図法のみ図 4 − 1 に示した。他も同様。なお (6) 式の計算に (1)〜(3), (5) を使用した。

さて，卵形線は補助円 O_{12}；O_{21} に V_1, V_2；V_3, V_4 で接し V_i は頂点である。
これより C_iV_i は長軸頂点 V_i の曲率半径となり，次のように求まる。(1)〜(3), (5), (6) を使って

$$C_1V_1 = O_{12}V_1 + S_1O_{12} - S_1C_1 = (O_oO_{23} - O_0O_{13}) + S_1O_{12} - S_1C_1$$

$$= \frac{kmc}{m^2-n^2} - \frac{knc}{m^2-n^2} + \frac{mnc}{m^2-n^2} - \frac{n^2c}{m^2-n^2} - \frac{n(k+n)c}{(m+n)(k-m+n)}$$

$$= \frac{(k-m)(k+n)c}{(m+n)(k-m+n)} \qquad \text{同様に}\quad C_2V_2 = \frac{(k+m)(k-n)c}{(m+n)(k+m-n)}$$

$$C_3V_3 = \frac{(k-m)(k-n)c}{(m-n)(k-m-n)} \qquad C_4V_4 = \frac{(k+m)(k+n)c}{(m-n)(k+m+n)}$$

さて，図 4 において，l_3 が円 K_1 に接するとき R_1, R'_1 は一致し，法線 R_1R_3, R'_1R_3 は一致し，その交点 R_3 は，図 5 のような一致した点 C_6 となることは明らかである。また，このとき，法線は図 1 より明らかなように $O_0R_1 /\!/ S_1V_5$ とすることにより求まる卵形線上の点 V_5, V_6 を通る。さてこの V_5, V_6 は解析的には $d\rho(s)/ds = 0$ を満す曲線の頂点であることも考察できる。[2] ゆえに点 C_5, C_6 は，頂点（短軸に相等）V_5, V_6 における曲率中心である。図 1 の関係を考慮して $O_0C_6 /\!/ S_3V_6$, $O_0C_5 /\!/ S_3V_5$ が成立し，$\angle R_1V_6S_3 = \angle R_1V_5S_3 = \angle R$ も成立する。

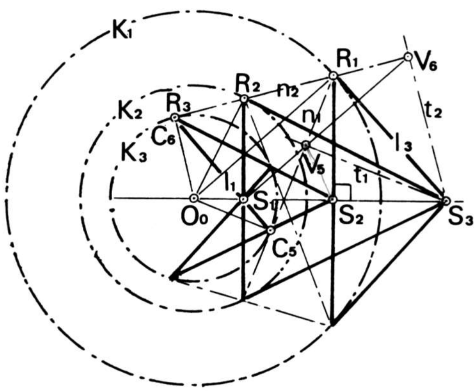


図　5

ゆえに，曲率半径　C_5V_5, C_6V_6 は

$$C_5V_5 = R_1C_5 - R_1V_5$$

$$= \sqrt{O_0R_1^2 - O_0C_5^2} - R_1S_3 \cdot \frac{O_0C_5}{O_0R_1} = \frac{\sqrt{k^2m^2 - m^2n^2}\ c}{m^2-n^2} - \frac{\sqrt{k^4 - k^2m^2}\ c}{m^2-n^2} \cdot \frac{n}{k}$$

$$= \frac{m\sqrt{k^2-n^2} - n\sqrt{k^2-m^2}}{m^2-n^2}\,c \qquad \text{同様に}\quad C_6V_6 = \frac{m\sqrt{k^2-n^2} + n\sqrt{k^2-m^2}}{m^2-n^2}\,c$$

これより，C_i を中心，C_iV_i を半径とする 6 つの頂点における曲率円が明らかとなった。

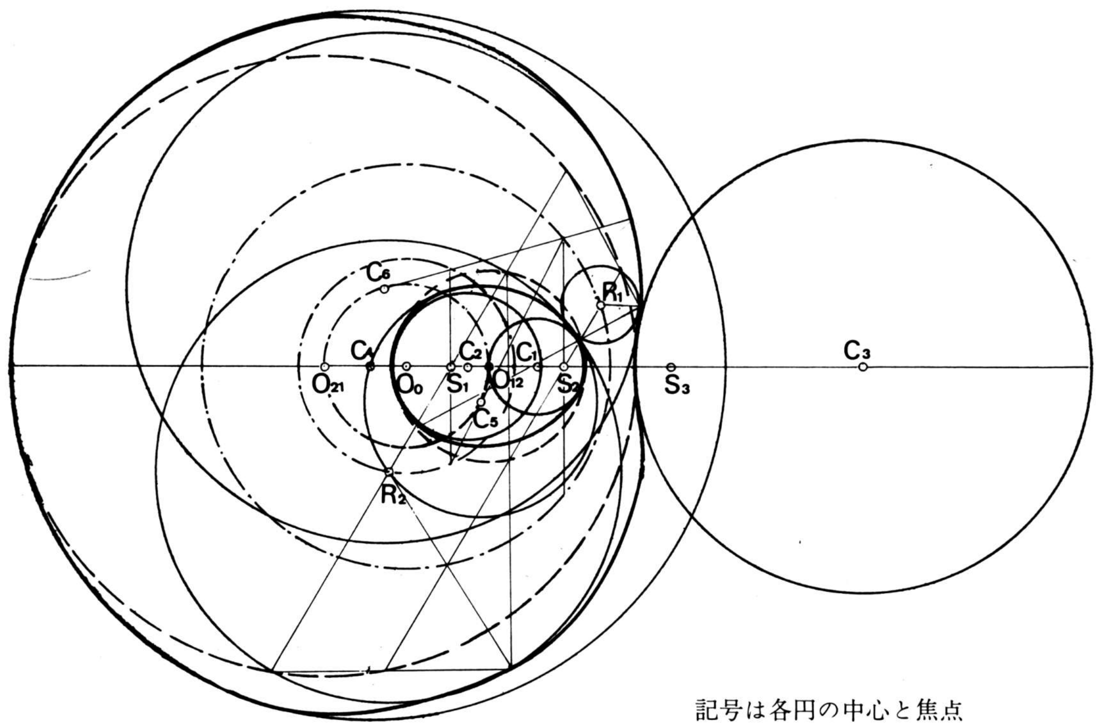
ここで焦点S_3を通る卵形線の接線t_1, t_2が短軸頂点の位置を与え，これはS_3が無限遠に行ったとき楕円に一致する。

以上，卵形線を包絡する円群の中心は等距離円上にあり，3つの等距離円が求まった。また卵形線の曲率円の幾何学的作図法，および，その証明がなされた。その曲率半径は，卵形線の定義式の任意定数m，n，kの簡単な関数であることがわかった。

また，ここで，この小論を書くに当り，御教示して下さった大阪大学の増田祥三先生に厚くお礼申し上げます。

参考文献

1）蛭子井博孝；"デカルトの卵形線の二・三の性質"，図学研究，12号
2）日本数学会編集；"岩波数学辞典"，p.445.



記号は各円の中心と焦点

補　図

昭和51年3月
9